

УДК 519.722 + 536.751

UDC 519.722 + 536.751

**СИНЕРГЕТИЧЕСКАЯ ТЕОРИЯ
ИНФОРМАЦИИ Часть 3. Информа-
ционные функции и энтропия Больцмана**

**SYNERGETIC INFORMATION
THEORY Part 3. Information functions
and Boltzmann entropy**

Вяткин Виктор Борисович, к.т.н.

Vyatkin Victor Borisovich. Dr.Sc.(Tech.)

Екатеринбург, Россия

Ekaterinburg, Russia

В статье показывается, что информационно-синергетические функции, в лице отражаемой информации, аддитивной негэнтропии и энтропии отражения, имеют непосредственную взаимосвязь с энтропией Больцмана.

In the article it is shown that information-synergistic functions, in the face reflected information, additive negentropy and entropy of reflection, they have direct interrelation with Boltzmann entropy.

Ключевые слова: ЭНТРОПИЯ
БОЛЬЦМАНА, ИНФОРМАЦИОННО-
СИНЕРГЕТИЧЕСКИЕ ФУНКЦИИ,
ТЕРМОДИНАМИЧЕСКАЯ
ВЕРОЯТНОСТЬ, ИДЕАЛЬНЫЙ ГАЗ

Keywords: BOLTZMANN ENTROPY,
INFORMATION-SYNERGETIC
FUNCTIONS, THERMODYNAMIC
PROBABILITY, IDEAL GAS

«Развитие теории информации, и в частности связь этой теории с термодинамикой, происходило в недавнее время, поэтому в будущем вполне могут появиться новые непредугаданные результаты»

П. Шамбадаль.

Введение

Ранее [1] было установлено, что информация I_A , отражаемая произвольной системой A через совокупность своих частей B_1, B_2, \dots, B_N , разделяется на отраженную и неотраженную части, равные аддитивной негэнтропии I_Σ и энтропии отражения S , соответственно. То есть:

$$I_A = I_\Sigma + S \quad (1)$$

При этом:

$$I_A = \log_2 M_A \quad (2)$$

$$I_{\Sigma} = \sum_{i=1}^N \frac{M_{B_i}}{M_A} \log_2 M_{B_i} \quad (3)$$

$$S = - \sum_{i=1}^N \frac{M_{B_i}}{M_A} \log_2 \frac{M_{B_i}}{M_A} \quad (4)$$

где: M_A – общее количество элементов в составе системы A ; M_{B_i} – количество элементов в составе B_i части.

Выражение (1) занимает в синергетической теории информации ключевое положение и, в зависимости от того, с каких позиций рассматривается, имеет несколько качественно различных интерпретаций. – Так, в отношении собственно отражения системы, как единого целого, выражение (1) интерпретируется как *информационный закон отражения*. Если рассматривается структура системы со стороны ее упорядоченности и хаотичности, то соотношение (1) выражает *закон сохранения суммы хаоса и порядка*. С позиций соотношения и взаимных переходов друг в друга различных видов информации (связанной с управлением и существующей независимо от него), данное выражение представляет *собой закон сохранения информации* на межвидовом информационном уровне. И, наконец, с позиций различных подходов к определению понятия «количество информации», выражение (1) показывает неразрывную взаимосвязь комбинаторного, вероятностного и синергетического подходов.¹

В настоящей статье показывается, что дополнительно к указанным интерпретациям, информационное соотношение (1), с термодинамических позиций, характеризует переход изолированной системы идеальных газов из структурно-упорядоченного состояния в состояние термодинамического равновесия, а каждая из информационно-синергетических функций (2) – (4) при определенных условиях имеет непосредственную взаимосвязь с энтропией Больцмана.

¹ Подробное описание приведенных интерпретаций выражения (1) дано в работе [1].

Взаимосвязь информационно-синергетических функций и термодинамической энтропии Больцмана

Макроскопическое состояние той или иной термодинамической системы, состоящей из конечного множества элементов (атомов, молекул), традиционно характеризуется с помощью энтропии Больцмана (E), статистически выражающей второе начало термодинамики и имеющей вид:

$$E = k \ln W, \quad (5)$$

где: $k = 1,38 \cdot 10^{-23}$ дж / град – постоянная Больцмана, а W – термодинамическая вероятность, представляющая собой число возможных микросостояний системы, посредством которых может быть реализовано данное макросостояние.

При этом напомним, что термодинамическая вероятность W является однозначной функцией макросостояния системы, достигает своего максимального значения, когда система приходит в состояние термодинамического равновесия и обладает свойством мультипликативности. То есть вероятность W системы, состоящей из N невзаимодействующих между собой частей, равна произведению вероятностей этих частей:

$$W = W_1 \cdot W_2 \cdot \dots \cdot W_N = \prod_{i=1}^N W_i \quad (6)$$

Выражения (5) и (6) показывают, что энтропия Больцмана является аддитивной величиной или, иначе говоря, общая энтропия E системы равна сумме энтропий ее изолированных друг от друга частей:

$$E = k \ln W = k \ln \prod_{i=1}^N W_i = k \sum_{i=1}^N \ln W_i = \sum_{i=1}^N E_i \quad (7)$$

Рассмотрим теперь с помощью энтропии Больцмана переход некоторой системы разнородных идеальных газов из структурно-упорядоченного состояния в состояние термодинамического равновесия.

Возьмем какую-либо емкость объемом V и разделим ее непроницаемыми перегородками произвольным образом на N частей с объемами V_1, V_2, \dots, V_N . При одинаковых температуре и давлении заполним каждую часть объема V одним из идеальных газов B_1, B_2, \dots, B_N и изолируем емкость от влияния внешней среды. Сохраним при этом прежние обозначения и будем считать, что количество молекул газа в каждой части равно $M_{B_1}, M_{B_2}, \dots, M_{B_N}$, соответственно. Образованная таким образом система идеальных газов $A = B_1 + B_2 + \dots + B_N$ включает в себя $M_A = \sum_{i=1}^N M_{B_i}$ молекул и находится в структурно-упорядоченном состоянии, наглядный пример которого (для $N=3$) приведен на рисунке 1а.

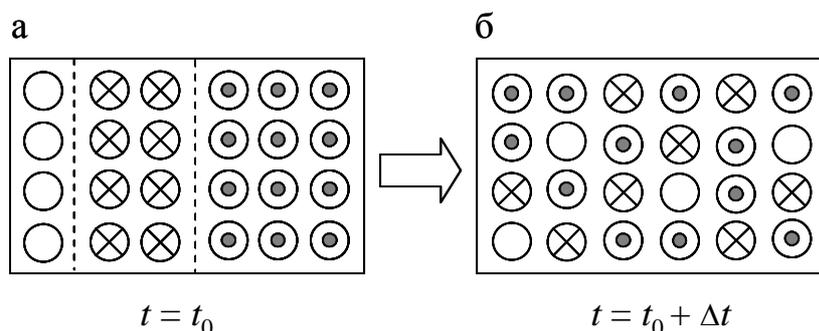


Рисунок 1. Переход системы идеальных газов из структурно-упорядоченного состояния (а) в состояние термодинамического равновесия (б)

Это состояние системы в наших рассуждениях наблюдается в момент времени t_0 , а его общая энтропия E_0 равна сумме энтропий частей системы. Так как каждый из частных объемов V_1, V_2, \dots, V_N равномерно заполнен соответствующим идеальным газом, то термодинамическая вероятность каждой части системы A определяется числом возможных перестановок составляющих ее молекул

$$W_{B_i} = M_{B_i} !$$

и, соответственно:

$$E_0 = k \sum_{i=1}^N \ln W_{B_i} = k \sum_{i=1}^N \ln M_{B_i}! \quad (8)$$

После убирания перегородок каждый из газов, вследствие теплового движения молекул, перемешивается с другими газами и в момент времени $t_R = t_0 + \Delta t$ статистически равномерно распределяется по всему объему V , что приводит систему A в состояние термодинамического равновесия, соответствующего молекулярному хаосу (см. рисунок 1б).

Термодинамическая вероятность W при этом, на протяжении времени Δt неуклонно возрастает и в момент t_R достигает своего максимально возможного значения $W_R = M_A!$. Энтропия E_R термодинамически равновесного состояния системы A соответственно равна:

$$E_R = k \ln M_A! \quad (9)$$

Разность энтропий системы в термодинамическом равновесии и в структурно-упорядоченном состоянии, в свою очередь, представляет собой энтропию смешения газов ΔE , которая согласно (8) и (9) имеет вид:

$$\Delta E = E_R - E_0 = k \ln \frac{M_A!}{\prod_{i=1}^N M_{B_i}!} \quad (10)$$

Из выражений (8) – (10) следует, что общая схема самопроизвольного процесса перехода изолированной системы идеальных газов из структурно-упорядоченного состояния в состояние термодинамического равновесия, может быть выражена через уравнение баланса энтропии Больцмана:

$$E_0 + \Delta E = E_R \quad (11)$$

Освободимся в формулах (8) – (10) от факториалов, для чего воспользуемся формулой Стирлинга

$$\ln n! \approx n(\ln n - 1) \quad (12)$$

и, пренебрегая единицей при $n \rightarrow \infty$, будем применять её в огрубленном виде:

$$\ln n! \approx n \ln n \quad (13)$$

Основанием для такого огрубления служит тот факт, что относительная погрешность замены формулы (12) на (13), в соответствии с числом Лошмидта $N_L = 2,687 \cdot 10^{19} \text{ л/см}^3$, выражающим количество молекул идеального газа в 1 см^3 при нормальных условиях, составляет: для $1 \text{ см}^3 - 2,3\%$, для $1 \text{ м}^3 - 1,7\%$ и т.д. В то же самое время многие из реально существующих природных систем имеют несравненно большие размеры, что делает указанное огрубление оправданным.²

Делая соответствующие замены факториалов в формулах (8) – (10), получаем:

$$E_0 \approx k \sum_{i=1}^N M_{B_i} \ln M_{B_i} \quad (14)$$

$$E_R \approx k M_A \ln M_A \quad (15)$$

$$\Delta E \approx k (M_A \ln M_A - \sum_{i=1}^N M_{B_i} \ln M_{B_i}) \quad (16)$$

Умножим и разделим правую часть выражения (14) на M_A и, учитывая, что в соответствии со свойствами логарифмов $\ln a = \log_2 a \cdot \ln 2$, приведем выражения (14) – (16) к виду:

$$E_0 \approx k M_A \ln 2 \cdot \sum_{i=1}^N \frac{M_{B_i}}{M_A} \log_2 M_{B_i} \quad (17)$$

$$E_R \approx k M_A \ln 2 \cdot \log_2 M_A \quad (18)$$

² Например, запасы месторождений природного газа иногда исчисляются триллионами кубометров.

$$\Delta E \approx k M_A \ln 2 \cdot (\log_2 M_A - \sum_{i=1}^N \frac{M_{B_i}}{M_A} \log_2 M_{B_i}) \quad (19)$$

При этом отметим, что произведение $k M_A \ln 2$, присутствующее в каждом из выражений (17) – (19), сохраняет свое постоянное значение при любых преобразованиях системы A . Поэтому, в дальнейшем будем обозначать его как постоянный коэффициент c , то есть $c = k M_A \ln 2$.

Проводя теперь сравнение информационно-синергетических функций (2) – (4) с выражениями (17) – (19), не трудно видеть, что крайние правые сомножители последних равны аддитивной негэнтропии I_Σ , энтропии отражения S и отражаемой информации I_A , соответственно. Отсюда следует, что каждая из этих функций имеет определенную, присущую только ей, взаимосвязь с энтропией Больцмана:

$$I_\Sigma \approx \frac{E_0}{c} \quad (20)$$

$$I_A \approx \frac{E_R}{c} \quad (21)$$

$$S \approx \frac{\Delta E}{c} \quad (22)$$

Подставляя значения информационно-синергетических функций I_A, I_Σ, S из выражений (20) – (22) в информационное соотношение (1), получаем для последнего его асимптотический термодинамический эквивалент:

$$M_A \rightarrow \infty \Rightarrow (I_A = I_\Sigma + S) \sim (E_R = E_0 + \Delta E) \quad (23)$$

То есть, информационное соотношение (1), дополнительно к отмеченным во введении интерпретациям, в термодинамическом отношении характеризует процесс перехода системы идеальных газов из структурно-упорядоченного состояния в состояние термодинамического равновесия. Данный факт позволяет говорить о том, что синергетическая теория ин-

формации имеет непосредственную взаимосвязь со статистической термодинамикой и, по-видимому, может быть включена в арсенал ее средств познания.

Информационная энтропия и энтропия Больцмана: коллизия мнений

В работе [1] было показано, что синергетическая и традиционная теории информации непосредственно взаимосвязаны друг с другом и в своей совокупности образуют единую количественную теорию информации. Поэтому, установив взаимосвязь синергетической теории информации со статистической термодинамикой в лице выражений (20) – (23), целесообразно также осветить существующие взгляды на взаимоотношения энтропии Больцмана с информационно-энтропийными мерами Хартли [2] и Шеннона [3], которые при использовании двоичных логарифмов, математически тождественны отражаемой информации I_A (2) и энтропии отражения S (4), соответственно. При этом сразу отметим, что вопрос взаимосвязи энтропии Больцмана с традиционными информационно-энтропийными мерами длительный период времени является предметом дискуссии.

Приверженцы этой взаимосвязи [4,5] считают, что энтропия Больцмана и информационная энтропия эквивалентны друг другу. При этом в качестве аргумента приводится тот факт, что в формулах Хартли и Шеннона, формально похожих на формулу Больцмана, присутствует коэффициент пропорциональности K , зависящий от выбора единиц измерения информации. Поэтому, беря в качестве K постоянную Больцмана k , можно осуществлять переход от информационной энтропии к энтропии термодинамической. Более того, например, по мнению Бриллюэна [4], при рассмотрении физических систем информацию и термодинамическую энтропию лучше выражать одними и теми же единицами.

Противники наличия такой взаимосвязи между энтропией Больцмана и информационно-энтропийными функциями [6,7], в свою очередь, утверждают, что это разные величины и задают вопрос: «Разве достаточно формального сходства двух выражений, чтобы одну величину измерять в единицах другой и на этом основании устанавливать между ними непосредственную взаимосвязь?» [6, с.72]. И, указывают на то, что «в литературе вначале отмечалось отличие этих двух величин, обозначаемых одним словом, но позже многие авторы последовали за Бриллюэном, отождествившим термодинамическую и информационную энтропии» [7, с. 50].

Кроме этих полярных точек зрения, существует и ряд промежуточных, более осторожных мнений. Так, например Эшби, один из основоположников кибернетики, не отрицая определенной связи между энтропией Шеннона и термодинамической энтропией, указывает, что «выводы в этих вопросах требуют большой осторожности, ибо самое незначительное изменение условий или допущений может превратить высказывание из строго истинного в абсурдно ложное» [8, с. 254]. Интересным представляется также мнение Шамбадаля, который в своей работе сначала, вслед за Бриллюэном, берет в качестве коэффициента пропорциональности K постоянную Больцмана k , а затем говорит о том, что «тождественность величин I и S (информации и энтропии Больцмана – прим. В.В.) происходит не столько от самой природы вещей, сколько от нашего произвола» [9, с. 191].

Принимая участие в этой заочной дискуссии, с позиций полученных в предыдущем разделе результатов, можно сказать следующее. Так как информационно-энтропийные меры Хартли и Шеннона выражаются такими же формулами, что и отражаемая информация I_A и энтропия отражения S , то на основании выражений (21) и (22) можно утверждать, что они действительно имеют взаимосвязь с энтропией Больцмана, но эта взаимосвязь отрицает их эквивалентность и тождественность. Причем каждая из этих информационных энтропий имеет свой физический аспект интерпре-

тации: энтропия Хартли связана с термодинамически равновесным состоянием системы идеальных газов, а энтропия Шеннона, – с энтропией смешения газов и, соответственно, увеличивается по мере приближения системы к состоянию термодинамического равновесия.

Заключение

В статье, на основе рассмотрения процесса перехода изолированной системы разнородных идеальных газов, из структурно-упорядоченного состояния в состояние термодинамического равновесия, установлено, что информационно-синергетические функции в лице отражаемой информации, аддитивной негэнтропии и энтропии отражения, имеют непосредственную взаимосвязь с термодинамической энтропией Больцмана. При этом показано, что совокупность данных функций в виде соответствующего соотношения, представляет собой асимптотический эквивалент уравнения баланса энтропии Больцмана. Это свидетельствует о взаимосвязи синергетической теории информации со статистической термодинамикой и, по всей видимости, позволяет говорить о том, что синергетическая теория информации по своей сущности является физической теорией.

Литература

1. Вяткин В.Б. Синергетическая теория информации. Часть 2. Отражение дискретных систем в плоскости признаков их описания // Научный журнал КубГАУ [Электронный ресурс]. – Краснодар: КубГАУ, 2009. – №45(1). Режим доступа: <http://ej.kubagro.ru/2009/01/pdf/12.pdf>
2. Хартли Р.В.Л. Передача информации. // Сб.: Теория информации и ее приложения. – М.: Физматгиз, 1959. – С. 5-35.
3. Шеннон К. Работы по теории информации и кибернетике. – М.: Изд. иностр. лит., 1963. – 830с.
4. Бриллюэн Л. Научная неопределенность и информация. – М.: Мир, 1966. – 272 с.
5. Волькенштейн М.В. Энтропия и информация. – М.: Наука, 1986. – 192с.
6. Оксак А.И. Гносеологический анализ соотношения энтропии и информации // Философские науки. – 1972, №5 – С. 68-76.
7. Базаров И.П. Заблуждения и ошибки в термодинамике. – М.: МГУ, 1993. – 56с.
8. Эшби У.Р. Введение в кибернетику. – М.: Изд. иностр. лит., 1959. – 432с.
9. Шамбадаль П. Развитие и приложение понятия энтропии. – М.: Наука, 1967. – 280с.