

УДК 528.48

UDC 528.48

**К ОПРЕДЕЛЕНИЮ КООРДИНАТ ТОЧЕК
ОБРАТНЫМИ УГЛОВЫМИ ЗАСЕЧКАМИ
МЕТОДОМ ПОСЛЕДОВАТЕЛЬНЫХ
ПРИБЛИЖЕНИЙ.**

**TO DEFINITION OF CO-ORDINATES OF
POINTS BY RETURN ANGULAR NOTCHES BY
THE METHOD OF CONSECUTIVE
APPROXIMATIONS**

Соколов Юрий Григорьевич
к. т. н., профессор

Sokolov Yuri Grigorievich
Cand. Tech. Sci., professor

Губанова Наталья Яковлевна

Gubanova Natalya Yakovlevna
assistant professor

Гурский Иван Николаевич

Gurskiy Ivan Nikolaevich
senior lecturer

*Кубанский государственный аграрный
университет, Краснодар, Россия*

Kuban State Agrarian University, Krasnodar, Russia

В работе рассматривается вопрос определения координат геодезических пунктов для сгущения плановых сетей, привязочных и других работ путем выполнения угловых измерений на определяемых пунктах. Исходными при этом являются два геодезических пункта на каждую определяемую точку. Приведен алгоритм вычисления координат искомых точек и числовой пример его реализации.

In this article the question of definition of co-ordinates of geodetic points for a condensation of planned networks, survey controls and other works by performance of angular measurements on defined points is considered. Initials here are two geodetic points on each defined point. The algorithm of calculation of co-ordinates of required points and a numerical example of its realisation is resulted.

Ключевые слова: ПУНКТЫ, ЛИНЕЙНЫЕ ИЗМЕРЕНИЯ, ОЦЕНКА ТОЧНОСТИ, ПОПРАВКИ

Keywords: POINTS, LINEAR MEASUREMENTS, ESTIMATION OF ACCURACY, CORRECTIONS

Для определения координат точек, которые могут быть использованы в дальнейшем как пункты съемочного обоснования или как пункты, необходимые для решения любых практических задач, существует множество различных способов. Многие из них основаны на использовании прямых угловых и обратных засечек. Для их реализации и с целью контроля требуется иметь не менее 3-4 исходных пунктов для каждой определяемой точки, что не всегда возможно. В работе предлагается обойти эти ограничения путем использования метода последовательных приближений.

Пусть пункты А, В, С и D – исходные с известными координатами, на которых измерены углы b_1, b_2, b_3 и b'_1, b'_2, b'_3 (рис.1).

Для определения координат точки Е имеются два исходных пункта А и В. Координаты третьего пункта – точки F неизвестны, но можно найти их приближенные значения по плану или карте.

Тогда, решая обратную угловую засечку одним из известных способов [1,2,3] можно определить в первом приближении координаты точки X^I_E, Y^I_E .

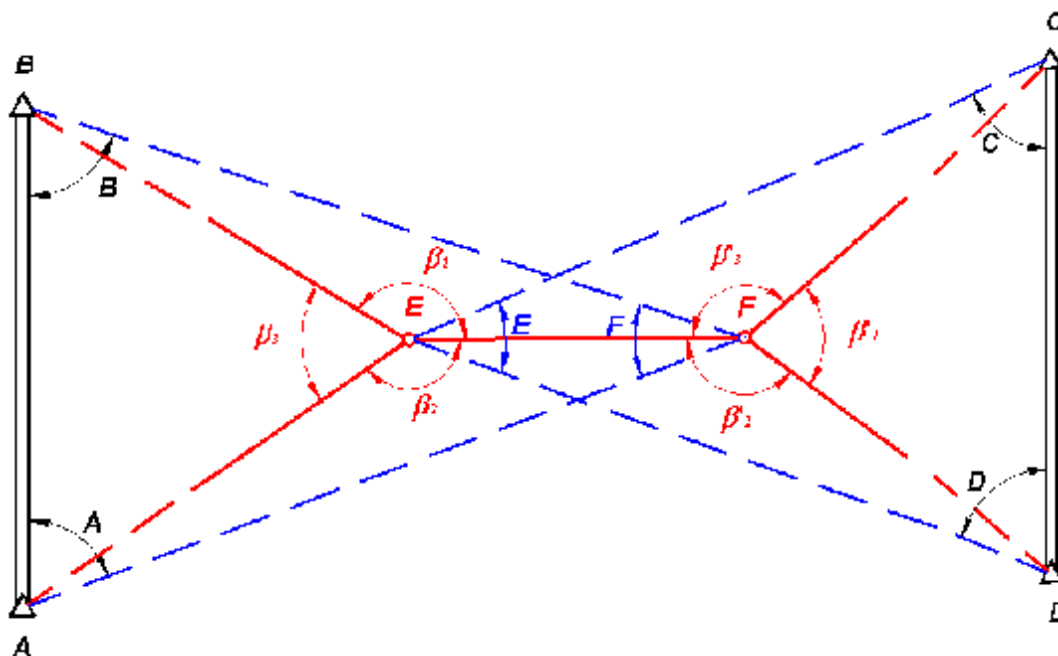


Рис 1. К определению координат точек E и F обратными засечками.

Нами предлагается использовать для этой цели способ Ансермета (весового среднего), который на наш взгляд, более простой. В результате получим

$$X^I_E = \frac{X_A P^0_A + X_B P^0_B + X^0_F P^0_F}{P^0_A + P^0_B + P^0_F} = \frac{[XP^0]}{[P^0]} ; \tag{1}$$

$$Y^I_E = \frac{Y_A P^0_A + Y_B P^0_B + Y^0_F P^0_F}{P^0_A + P^0_B + P^0_F} = \frac{[YP^0]}{[P^0]} .$$

где: X^0_F и Y^0_F – приближенные координаты точки F определенные по плану или карте.

P^0_A, P^0_B, P^0_F – приближенные значения весов пунктов вычисленные по формулам

$$P^0_A = \frac{1}{ctgA^0 - ctgb_1} ; \quad P^0_B = \frac{1}{ctgB^0 - ctgb_2} ; \quad P^0_F = \frac{1}{ctgF^0 - ctgb_3} .$$

A^0, B^0 и F^0 – приближенные значения углов при точках A, B, F, вычисленные по разностям дирекционных углов

$$A^0 = a^0_{AF} - a_{AB}; \quad B^0 = a_{BA} - a^0_{AF}; \quad F^0 = a^0_{FB} - a^0_{FA}.$$

$$\text{Здесь: } a^0_{AF} = \arctg \frac{Y^0_F - Y_A}{X^0_F - X_A}; \quad a^0_{BF} = \arctg \frac{Y^0_F - Y_B}{X^0_F - X_B}; \quad a^0_{FA} = \arctg \frac{Y_A - Y^0_F}{X_A - X^0_F}.$$

Далее по исходным координатам точек С и D и координатам точки E, найденным в первом приближении X^I_E, Y^I_E , вычисляют координаты точки F по аналогичным формулам.

$$X_F = \frac{X^I_E P^I_E + X_C P^I_C + X_D P^I_D}{P^I_E + P^I_C + P^I_D} = \frac{[XP^I]}{P^I}; \tag{2}$$

$$Y_F = \frac{Y^I_E P^I_E + Y_C P^I_C + Y_D P^I_D}{P^I_E + P^I_C + P^I_D} = \frac{[YP^I]}{P^I};$$

$$\text{где: } P^I_E = \frac{1}{ctgE^I - ctgb'_1}; \quad P^I_C = \frac{1}{ctgC^I - ctgb'_2}; \quad P^I_D = \frac{1}{ctgD^I - ctgb'_3};$$

$$E^I = a^I_{ED} - a^I_{EC}; \quad C^I = a^I_{CE} - a_{CD}; \quad D^I = a_{DC} - a^I_{DE};$$

$$a^I_{ED} = \arctg \frac{Y_D - Y^I_E}{X_D - X^I_E}; \quad a^I_{EC} = \arctg \frac{Y_C - Y^I_E}{X_C - X^I_E}; \quad a^I_{DE} = \arctg \frac{Y^I_E - Y_D}{X^I_E - X_D}.$$

Опираясь на исходные пункты А и В и координаты точки X^I_F и Y^I_F находят координаты точки E во втором приближении X^{II}_E, Y^{II}_E и т.д.

Процесс приближений заканчивается, как только два следующих друг за другом приближения для искомым координат точек E и F будут одинаковыми. Эти приближенные значения и являются окончательными значениями координат искомым точек.

Следует отметить, что в формулах для вычисления весов пунктов А,В,С, Д, E и F фигурируют котангенсы углов при этих пунктах, которые целесообразно находить непосредственно через их координаты. Запишем

$$ctgA^0 = ctg(a^0_{AF} - a_{AB}) = \frac{ctga^0_{AF} * ctga_{AB} + 1}{ctga_{AB} - ctga^0_{AF}} \tag{4}$$

Выражая через координаты котангенсы дирекционных углов и после несложных преобразований получим

$$ctgA^0 = \frac{X^0_F + Y^0_F * tga_{AB} - (X_A + Y_A * tga_{AB})}{Y^0_F - X^0_F * tga_{AB} - (Y_A - X_A * tga_{AB})}; \tag{4}$$

$$ctgB^0 = \frac{X^0_F + Y^0_F * tga_{BA} - (X_B + Y_B * tga_{BA})}{X^0_F * tga_{BA} - Y^0_F - (X_B * tga_{BA} - Y_B)} ; \quad (5)$$

$$ctgF^0 = \frac{X^0_{F^2} + Y^0_{F^2} - X^0_F(X_A + X_B) - Y^0_F(Y_B - Y_A) + (Y_B Y_A + X_B X_A)}{Y_F(X_B - X_A) + X^0_F(Y_A - Y_B) + (X_A Y_B - Y_A X_B)} . \quad (6)$$

Аналогично для пунктов E, C и D будем иметь

$$ctgE^I = \frac{X^I_{E^2} + Y^I_{E^2} - X^I_E(X_D + X_C) - Y^I_E(Y_D + Y_C) + (X_D X_C + Y_D Y_C)}{Y^I_E(X_D - X_C) + X^I_E(Y_C - Y_D) + (X_C Y_D - X_D Y_C)} ; \quad (7)$$

$$ctgC^I = \frac{X^I_E + Y^I_E * tga_{CD} - (X_C + Y_C * tga_{CD})}{Y^I_E - X^I_E * tga_{CD} - (Y_C - X_C * tga_{CD})} ; \quad (8)$$

$$ctgD^I = \frac{X^I_E + Y^I_E * tga_{DC} - (X_D + Y_D * tga_{DC})}{X^I_E * tga_{DC} - Y^I_E - (X_D * tga_{DC} - Y_D)} . \quad (9)$$

Заметим, что $ctg F^0$ и $ctg E^I$ по формулам (6) и (7) можно и не вычислять, а, получив по формулам (4) и (5), (8) и (9) значения котангенсов A^0 , B^0 , C^I и D^I , найти углы F^0 и E^I , как дополнения до 180^0 . Формулы же (6) и (7) могут служить для выполнения контрольных вычислений.

Рассмотрим пример реализации предлагаемого способа вычислений.

Исходные данные для определения координат точки E^I в первом приближении

$X^0_F = 750,3м$	$X_A = 0,000$	$X_B = 1000,000$	$tga_{AB} = \frac{Y_B - Y_A}{X_B - X_A} = 0$
$Y^0_F = 1566,8м$	$Y_A = 0,000$	$Y_B = 0,000$	

Вычисление значений углов при точках A, B, F.

$ctgA^0 = \frac{X^0_F + Y^0_F * tga_{AB} - (X_A + Y_A * tga_{AB})}{Y^0_F - X^0_F * tga_{AB} - (Y_A - X_A * tga_{AB})} ;$	$ctgA^0 = 0,478874;$ $A^0 = 64,41145^{\circ} .$ $ctgB^0 = 0,159369;$ $B^0 = 80,94496^{\circ} .$
$ctgB^0 = \frac{X^0_F + Y^0_F * tga_{BA} - (X_B + Y_B * tga_{BA})}{X^0_F * tga_{BA} - Y^0_F - (X_B * tga_{BA} - Y_B)} ;$	
$ctgF^0 = \frac{X^0_{F^2} + Y^0_{F^2} - X^0_F(X_A + X_B) - Y^0_F(Y_B - Y_A) + (Y_B Y_A + X_B X_A)}{Y_F(X_B - X_A) + X^0_F(Y_A - Y_B) + (X_A Y_B - Y_A X_B)} ;$	
<u>Контроль $F^0 = 180^{\circ} - (A^0 + B^0)$</u>	
$F^0 = 34,64360^{\circ} .$ $F^0 = 34,64359^{\circ} ;$	

Определение весов для решения обратной засечки

$b_1 = 96^0,20671$	$P^0_A = \frac{1}{ctgA^0 - ctgb_1} ;$	$P^0_A = 1,701758$
$ctg b_1 = -0,1087533$		$P^0_B = 0,106938$
$b_2 = 123^0,79108$		

$\text{ctg } b_2 = -9,191828$ $b_3 = 90^0,00221$ $\text{ctg } b_3 = -0,0000039$	$P^0_B = \frac{1}{\text{ctg}B^0 - \text{ctg}b_2};$ $P^0_F = \frac{1}{\text{ctg}F^0 - \text{ctg}b_3}.$	$P^0_F = 0,690959$
		$[P] = 2,499656$

Вычисление координат точки E^I в первом приближении

$X^I_E = \frac{X_A P^0_A + X_B P^0_B + X_F P^0_F}{P^0_A + P^0_B + P^0_F};$	$X^I_E = 250.180$
$Y^I_E = \frac{Y_A P^0_A + Y_B P^0_B + Y_F P^0_F}{P^0_A + P^0_B + P^0_F}.$	$Y^I_E = 433.098$

Исходные данные для определения координат точки F^I в первом приближении

$X^I_E = 250.180; X_C = 1000,000; X_D = 0.000$ $Y^I_E = 433.098; Y_C = 2000,000; Y_D = 2000.000$	$\text{tg}a_{CD} = \frac{Y_D - Y_C}{X_D - X_C} = 0$
---	---

Вычисление значений углов при точках C, D, E.

$\text{ctg}C^I = \frac{X^I_E + Y^I_E * \text{tg}a_{CD} - (X_C + Y_C * \text{tg}a_{CD})}{Y^I_E - X^I_E * \text{tg}a_{CD} - (Y_C - X_C * \text{tg}a_{CD})};$	$\text{ctg}C^I = 0.478537$ $C^I = 64.42716^0$
$\text{ctg}D^I = \frac{X^I_E + Y^I_E * \text{tg}a_{DC} - (X_D + Y_D * \text{tg}a_{DC})}{X^I_E * \text{tg}a_{DC} - Y^I_E - (X_D * \text{tg}a_{DC} - Y_D)};$	$\text{ctg}D^I = 0.159665$ $D^I = 80.92842^0$
$\text{ctg}E^I = \frac{X^I_E{}^2 + Y^I_E{}^2 - X^I_E(X_D + X_C) - Y^I_E(Y_D + Y_C) + (X_D X_C + Y_D Y_C)}{Y^I_E(X_D - X_C) + X^I_E(Y_C - Y_D) + (X_C Y_D - X_D Y_C)}.$	$\text{ctg}E^I = 1,447181$ $E^I = 34.64442^0$
<u>Контроль</u> $E^I = 180^0 - (C^I + D^I)$	$E^I = 34.64442^0$

Определение весов для решения обратной засечки

$\beta'_1 = 89,99800^0;$ $\text{ctg}\beta'_1 = 0,000035$	$P^I_E = \frac{1}{\text{ctg}E^I - \text{ctg}\beta'_1};$	$P^I_E = 0.691015$
$\beta'_2 = 96,20586^0;$ $\text{ctg}\beta'_2 = -0,108738;$	$P^I_C = \frac{1}{\text{ctg}C^I - \text{ctg}\beta'_2};$	$P^I_C = 1.702779$
$\beta'_3 = 173,79614^0$ $\text{ctg}\beta'_3 = -9,199384$	$P^I_D = \frac{1}{\text{ctg}D^I + \text{ctg}\beta'_3}.$	$P^I_D = 0.106848$
		$[P] = 2,500644$

Вычисление координат точки F^I в первом приближении

$$\begin{aligned}
 X^I_F &= \frac{X^I_E P^I_E + X^I_C P^I_C + X^I_D P^I_D}{P^I_E + P^I_C + P^I_D}; & X^I_F &= 750.070 \\
 Y^I_F &= \frac{Y^I_E P^I_E + Y^I_C P^I_C + Y^I_D P^I_D}{P^I_E + P^I_C + P^I_D}. & Y^I_F &= 1567.010
 \end{aligned}$$

Ниже приведены сводные результаты приближений по определению координат точек F и E.

$$\begin{array}{ll|ll}
 X^0_F=750,3; & Y^0_F= 1566,8; & X^I_E= 250.180; & Y^I_E= 433.098; \\
 X^I_F= 750.070; & Y^I_F= 1567.010; & X^{II}_E= 250.043; & Y^{II}_E= 433.016; \\
 X^{II}_F= 750.027; & Y^{II}_F= 1566.985; & X^{III}_E= 250.027; & Y^{III}_E= 433.009; \\
 X^{III}_F= 750.021; & Y^{III}_F= 1566.982; & X^{IV}_E= 250.025; & Y^{IV}_E= 433.008; \\
 X^{IV}_F= 750.020; & Y^{IV}_F= 1566.982. & X^V_E= 250.0.25; & Y^V_E= 433.008.
 \end{array}$$

Третьи и четвертые приближения оказались одинаковыми и окончательные значения искомым координат составили

$$X_F=750.020; Y_F=1566.982 \quad X_E=250.025; Y_E=433.008$$

Проведены исследования быстроты сходимости значений координат при различных погрешностях определения приблизительного значения координат точки F.

Номер приближения	Координаты точки F		Координаты точки E		Координаты точки F		Координаты точки E	
	X	Y	X	Y	X	Y	X	Y
	При погрешности 2 м				При погрешности 5 м			
Начальное	752	1565	-	-	755	1572	-	-
I приближение	750.327	1567.051	251.262	433.720	750.406	1567.211	251.219	433.695
II приближение	750.059	1567.004	250.043	433.016	750.060	1567.005	250.148	433.079
III приближение	750.024	1566.984	250.037	433.015			250.037	433.015

Как видно из приведенных данных, уже на уровне 2-3 приближения независимо от величины погрешности в определении приближенного значения координат точки F наблюдается быстрая сходимость определяемых координат.

В результате исследований установлено, что процесс приближений быстросходящийся и при определении приблизительного значения координат точки F даже с точностью 10-15м достаточно выполнить 3-4 приближения, чтобы получить окончательные значения координат определяемых точек.

Изложенная методика может быть использована и для определения координат трех точек E , M и F , если на точке M выполнить угловые измерения на точки E и F и на одну исходную точку, например, точку D (рис.2).

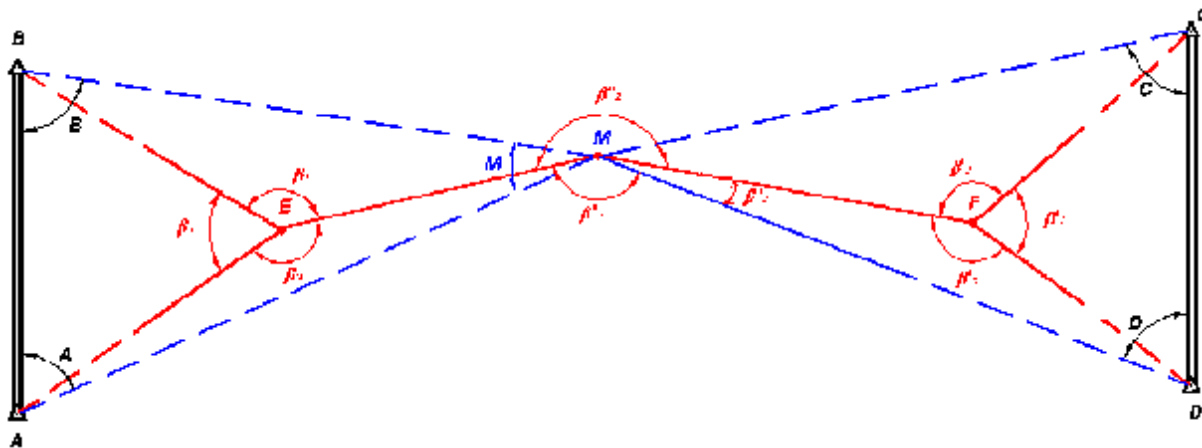


Рис 2. К определению координат точек E , F и M обратными засечками.

Как и в предыдущем случае координаты точки M определяют графически по плану (карте), а на пунктах E, M , и F измеряют горизонтальные углы $b_1, b_2, b_3, b_1'', b_2'', b_3'', b_1', b_2', b_3'$ соответственно.

Решая обратные угловые засечки определяют координаты точек E и F в первом приближении. Затем по полученным координатам точек E и F и исходным координатам точки D в результате решения обратной угловой засечки находят координаты точки M в первом приближении. Далее переходят опять к определению координат точек E и F во втором приближении и координат точки M , используя полученные координаты точек E и F во втором приближении и т.д.

Литература.

1. Ганьшин В.В., Коськов Б.И., Хренов Л.С. Геодезические работы в строительстве. М.,Стройиздат,1975; -208с.
2. Данилов В.В, Хренов Л.С., Кожевников Н.П., Кононов Н.С.Геодезия, Недра, 1976 ; -483с.
3. Соколов Ю.Г. и др. Лабораторный практикум по геодезии (ч.2), Краснодар, КубГАУ, 2005-120с.