УДК 511.11

05.20.01 – Технологии и средства механизации сельского хозяйства (технические науки)

ВИЗУАЛИЗАЦИЯ КОМПЛЕКСНЫХ КОРНЕЙ КВАДРАТНОГО УРАВНЕНИЯ

Галиев Карим Сулейманович
к.т.н., доцент
РИНЦ SPIN-код=8093-5110
E-mail: shachri42.galiev@yandex.ru
Кубанский государственный аграрный университет имени И.Т.Трубилина, Краснодар, Россия

В статье рассматривается дополнительный метод визуализации корней квадратных уравнений. Квадратные уравнения могут иметь любые вещественные коэффициенты, в том числе приводящие к комплексным корням. Приведены геометрические иллюстрации двух квадратичных функций, построенных с использованием Excel

Ключевые слова: КОМПЛЕКСНЫЕ ЧИСЛА, МНИМАЯ ЕДИНИЦА, КВАДРАТНОЕ УРАВНЕНИЕ, ВИЗУАЛИЗАЦИЯ КОМПЛЕКСНЫХ КОРНЕЙ, ПАРАБОЛА, СЕДЛОВИДНАЯ ПОВЕРХНОСТЬ

http://dx.doi.org/10.21515/1990-4665-174-006

UDC 511.11

05.20.01 Technologies and means of agricultural mechanization (technical sciences)

VISUALIZATION OF COMPLEX ROOTS FOR A QUADRATIC EQUATION

Galiev Karim Suleymanovich
Cand.Tech.Sci., associate professor
RSCI SPIN - code =8093-5110
E-mail: shachri42.galiev@yandex.ru
Kuban state agricultural university, Krasnodar, Russia

The article discusses a technique for visualizing the roots of quadratic equations. Quadratic equations can have any real coefficients, including those leading to complex roots. We have also given geometric illustrations of two quadratic functions constructed using Excel

Keywords: COMPLEX NUMBERS, IMAGINARY UNIT, QUADRATIC EQUATION, VISUALIZATION OF COMPLEX ROOTS, PARABOLA, SADDLE-SHAPED SURFACE

Часть 1. Предисловие

Часть 1 является мотивационной в том смысле, что без нее часть 2 является сухим изложением вопроса, вынесенного в название статьи. Сухое изложение наиболее короткое, но зачастую не совсем понятное. Часто говорят, что все «понятно», однако проверка показывает, что «понятно» с точки зрения отвечающего, а проверяющий говорил о другом, значит, отвечающий не так понял. Опыт преподавания свидетельствует об этом [7-12]. В некоторых учебных пособиях приводятся формулы или утверждения, но без убедительных доказательств, доступных пониманию обучающегося. Отговорка, что понимание материала является проблемой обучающегося, не снимает с автора учебного пособия главного назначения – научить, т. е. объяснить так, чтобы было понятно.

Понятие комплексного числа. Еще в средней школе знакомятся с этим понятием. Можно пересмотреть огромное количество учебников, учебных пособий [1-5], где приводятся примеры решения квадратного уравнения, у которых «нет корней», точнее, есть два корня, но они мнимые, поэтому на графике квадратичной функции этих корней показать нельзя. Рисуется в плоскости x0y график квадратичной функции y(x) и отдельно рисуется комплексная плоскость с реальной осью x и мнимой осью Im, где показываются точки, имитирующие эти мнимые корни. У школьника возникает состояние ступора (шока) – вот график, на графике нет этих корней, а ему внушают, что корни есть, но они в другом месте, в какой-то комплексной плоскости, у которой есть мнимая (?) ось.

Надо объяснить так, чтобы школьник видел, где же на кривой линии (на графике) эти корни. График есть, корни есть (они вычислены), а где эти корни на графике? Речь идет также о студенте, который изучает дисциплины, в которых используются формулы преобразования с комплексными числами, например, основы систем автоматического управления.

Часть 2

Рассмотрим квадратичную функцию $y(x) = x^2 + bx + a$. Пусть b = -3, a = 1,5; в другом примере b = -3, a = 4. Построим графики (рисунок 1).

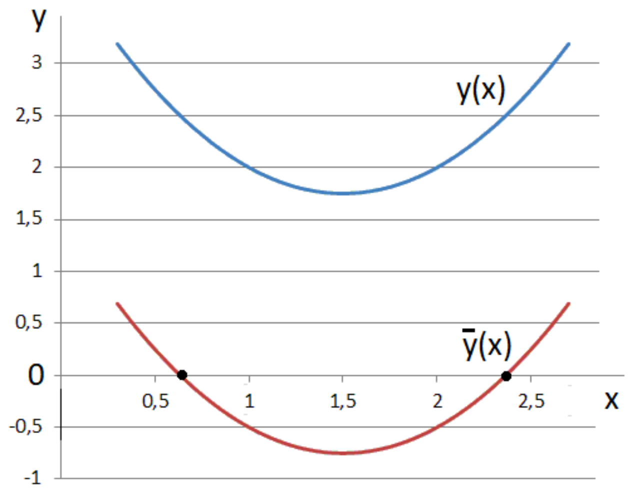

Рисунок 1 – Графики квадратичных функций

Если написать y(x) = 0, то это квадратное уравнение. Вычислим корни уравнений. Для функции $\bar{y}(x)$: x1 = 0,634; x2 = 2,366. Эти корни видны на графике (точки пересечения кривой с осью x).

Для функции y(x): x1 = 1,5+ $\boldsymbol{i}$·1,323; x2 = 1,5 - $\boldsymbol{i}$·1,323; где $i = \left|\sqrt{-1}\right|$. Где на графике y(x) эти точки? Ведь корни имеются, это x1 и x2, и они должны быть связаны с осью x (они же обозначены как x1 и x2).

Рассмотрим квадратичную функцию, у которой на графике «не видны корневые точки». Пусть функция $y(x) = x^2 - 3x + 4$ (рисунок 2).

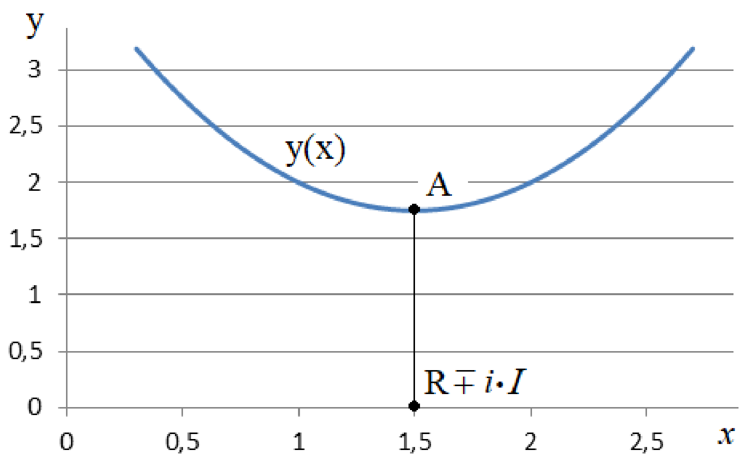

Рисунок 2 – Квадратичная функция с комплексными корнями

Корни уравнения: $x_{1,2} = R \pm i \cdot I$, где R = 1,5 ; I = 1,323 ; $i = \left|\sqrt{-1}\right|$. Такие числа называются комплексными (двойными) – одна часть вещественное число R и оно может быть показано на числовой оси x, вторая часть $i{\cdot}I$ является добавком к первой части. Заметим, что корни отличаются только знаком добавляемой части. Такие комплексные числа называются сопряженными.

Осью, по определению, называется пересечение двух плоскостей: пусть пересекаются вертикальная и горизонтальная плоскости Y и X, их пересечение образует ось x (рисунок 3). На плоскости Y виден график функции y(x). На вещественной оси x показана точка R , а точки с числами $\pm i \cdot I$ на оси x нельзя показать, потому что на этой оси нет чисел $i = \left|\sqrt{-1}\right|$. Однако, числа $\pm i \cdot I$ должны быть **как-то связаны** с осью x.

Посмотрим на числовую ось x с конца оси z0, или лучше с конца оси z. Видим то же, что и прежде. Значит надо изменить точку зрения (наблюдения) на ось x. Эврика! Именно, *надо изменить точку наблюдения оси x.* Посмотрим на ось x в области точки R с высоты над линией z . Чем больше угол φ, тем четче проявляются точки (добавки) $\pm i \cdot I$ (рисунок 3).

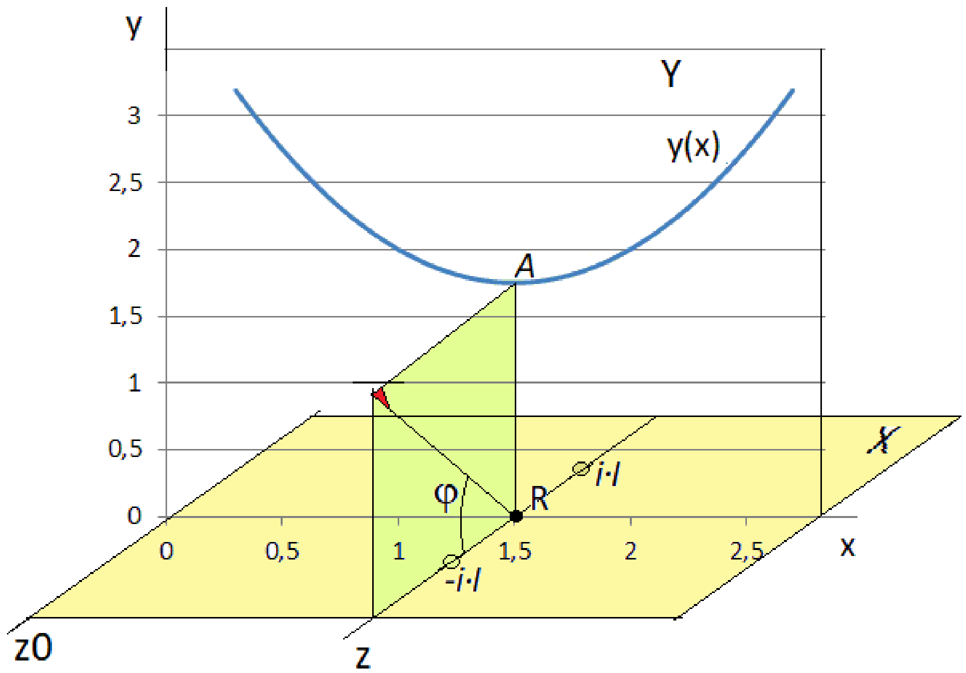

Рисунок 3 – Квадратичная функция

Такая идея была отмечена в [6], что для детализации (визуализации) невидимой характеристики объекта, необходимо изменить направление наблюдения за объектом таким образом, чтобы увеличить размерность наблюдаемого пространства на единицу. Например, простая ситуация (рисунок 4). На рисунке 4а представлена числовая ось. На рисунке 4б представлен некий объект ‘A’ , который на числовой оси описан как $0 \pm i$, где ‘0’ является координатой объекта, ‘ $\pm i$ ’ окрестность точки. На рисунке 4в показана числовая ось, которая поворачивается на 90 градусов. На рисунке 4г показана картина после поворота оси, при этом значение $i = 1$ (ограничений на i не накладывалось), а отрезок оси длиной $\mathrm{u}(1) - \mathrm{u}(0)$ рассматривается как единичный вектор. В такой картине размерность пространства увеличилась на единицу (была одномерная ось ‘u’, получили двумерную плоскость с дополнительной осью ‘v’). Точка конца вектора принимает значения 1; i; -1; $-i$ при повороте угла φ на π/2, π, 3π/4, 2π. Таким образом, если описание объекта имеет некоторые особенности, например, $0 \pm i$, то для уточнения такой особенности следует увеличить размерность наблюдаемого пространства. Часто особенность типа $\pm i$ называют мнимой единицей, а выражение $a \pm i\,b$ – сопряженным комплексным числом.

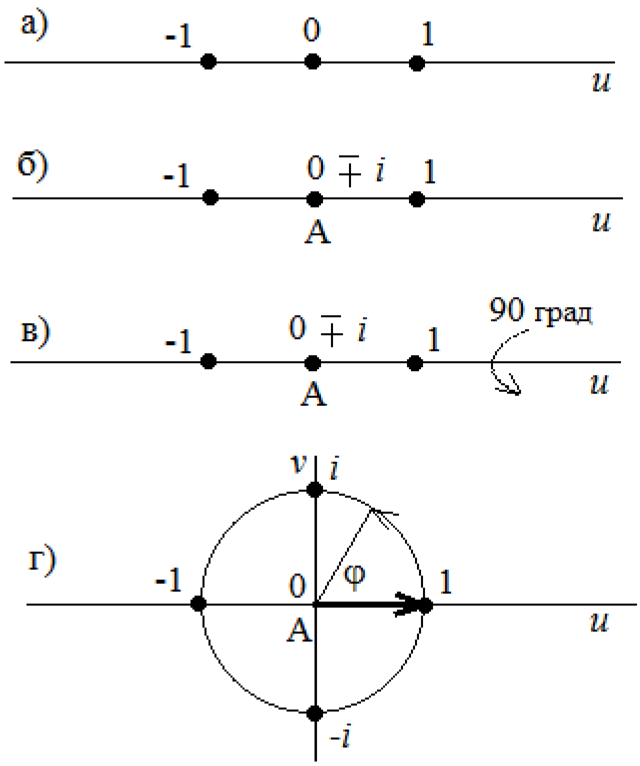

Рисунок 4 – Числовая ось и плоскость

Аналогичная ассоциация может возникнуть у тех, кто занимался фотографией с проявителем – картина на фотобумаге возникает в процессе проявления (сначала не видно, потом становится видно).

Итак (см. рисунок 3), корни уравнения $x_{1,2} = R \pm i \cdot I$ обнаружились в плоскости X, а именно, число R на оси x, добавки $\pm i \cdot I$ на оси z, проходящей через точку R. Числа x_1 и x_2 являются корнями уравнения $x^2 + bx + a = 0$ при $b = -3$; $a = 4$. График функции y(x) построен в вертикальной плоскости Y.

В вертикальной плоскости Z, перпендикулярной к плоскостям X и Y (рисунок 5), построим график функции

$$y(\xi) = -\xi^2 - b\xi + a; \quad a = y(x)|_{min} = AR = 1{,}75; \; b = 0.$$

Здесь функция y(ξ) является параболой, направленной вниз (знак минус), и вершиной соприкасается с точкой А, поэтому a = 1,75. Коэффициент b характеризует сдвиг параболы в направлении оси ξ. Начало отсчета оси ξ принято в точке R, поэтому $b = 0$ (см. рисунок 5). Таким образом, уравнение $y(\xi) = -\xi^2 + 1{,}75 = 0$ имеет корни $\xi_{1,2} = \pm I = \pm 1{,}323$.

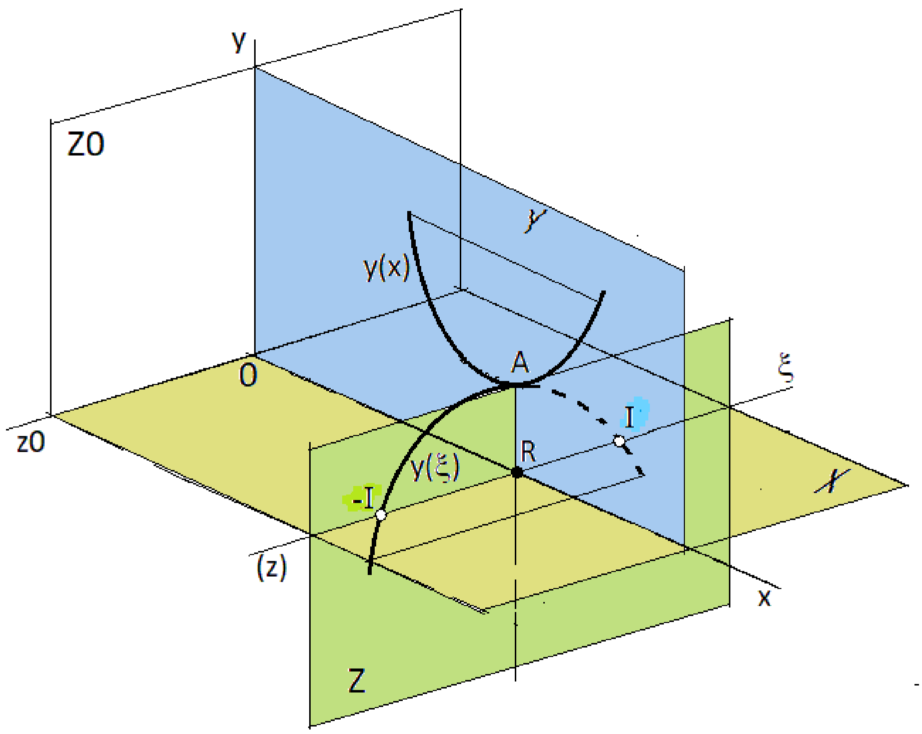

Рисунок 5 – Корни квадратного уравнения

Видно, что точки $\pm I$ расположены на оси ξ и график функции y(ξ) пронизывает горизонтальную плоскость X. Функции y(x) и y(ξ) соприкасаются в точке А и расположены во взаимно перпендикулярных плоскостях. Эти функции принадлежат одной и той же седловидной поверхности (гиперболическому параболоиду) и представляют собой след (срез) поверхности на указанных взаимно перпендикулярных плоскостях Y и Z. Функция данной седловидной поверхности следующая:

$$y(x,\xi) = x^2 + b \cdot x + a - \xi^2,$$

где b = -3; a = 4; $x \in [0{,}3; 2{,}7]$; $\xi \in [-2; 2]$.

Принадлежность квадратичных функций седловидной поверхности можно записать соотношением:

$$y(x,\xi) = \tilde{y}(x) + \tilde{y}(\xi) = (x^2 + b_x x + a_x) + (-\xi^2 + b_\xi \xi + a_\xi),$$

где $b_x = -3$; $b_\xi = 0$; $b_x + b_\xi = b$; $a_x = 2{,}25$; $a_\xi = 1{,}75$; $a_x + a_\xi = a$.

График такой седловидной поверхности можно построить в MatLab или в MS Excel (рисунок 6). Пересечение седловидной поверхности с вертикальными плоскостями Y и Z представляет собой параболы – квадратичные функции y(x) и y(ξ) (рисунок 7).

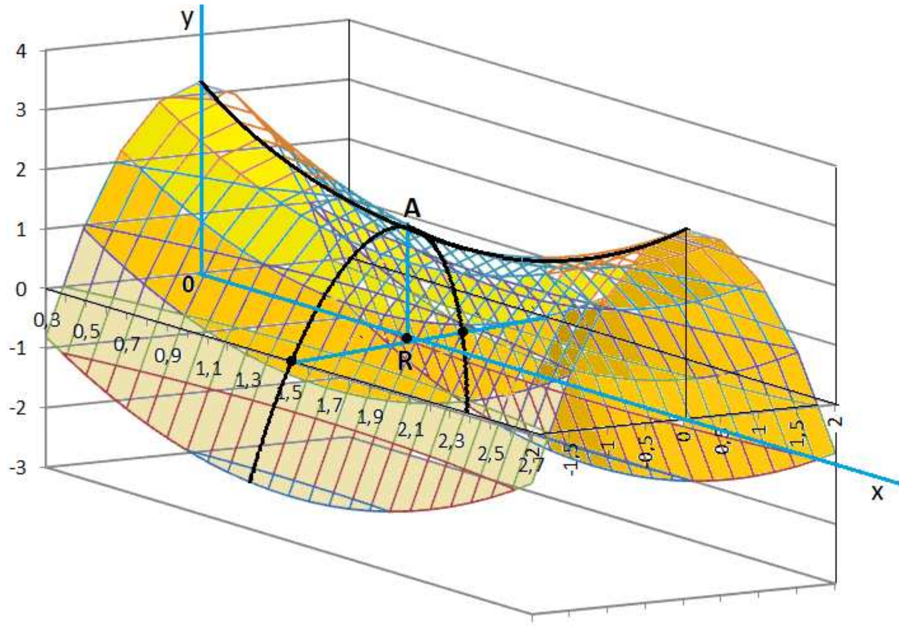

Рисунок 6 – Седловидная поверхность в Excel
(поворот оси x = 60 град, оси y = 10 град, перспектива = 0 град)

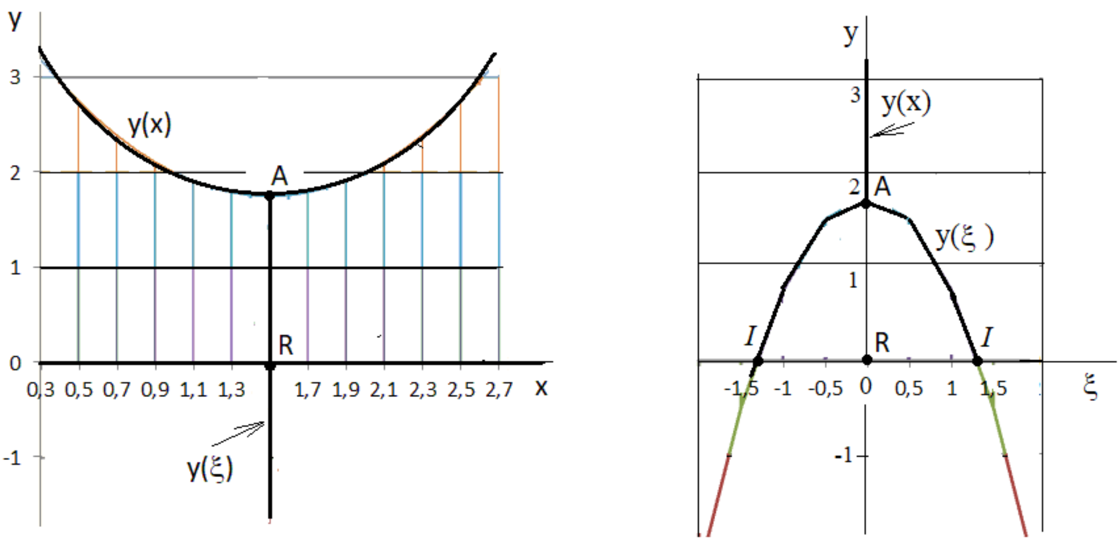

Рисунок 7 – След поверхности $y(x,\xi)$ в плоскостях Y (y0x) и Z (yRξ)

Аналогично, для другой квадратичной функции $\bar{y}(x)$ (см. рисунок 1), можно построить седловидную поверхность

$$\bar{y}(x,\xi) = x^2 - 3x + 1{,}5 - \xi^2,$$

которая в пересечениях с вертикальными плоскостями Y и Z образует параболы – квадратичные функции $\bar{y}(x) = x^2 - 3x + 1{,}5$ и $\bar{y}(\xi) = -\xi^2 - 0{,}75$, где $\bar{y}(x)|_{min} = -0{,}75$ (рисунок 8). При этом функция $\bar{y}(x)$ будет пересекать горизонтальную плоскость X в точках x1 = 0,634; x2 = 2,366 или $x_{1,2} = 1{,}5 \pm 0{,}866$. Функция $\bar{y}(\xi)$ будет полностью находиться ниже плоскости X.

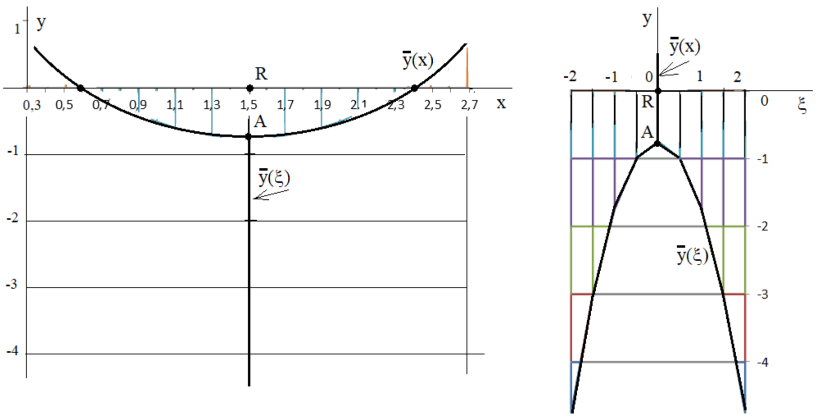

Рисунок 8 – След поверхности $\bar{y}(x,\xi)$ в плоскостях Y (y0x) и Z (yRξ)

Таким образом, в седловидной поверхности никаких мнимых (комплексных) чисел нет. Мнимые (комплексные) числа появляются только там, где невидимые характеристики объекта показываются наличием добавочных составляющих (см. рисунок 2). Эти добавки называют мнимыми числами, потому что в иллюстрации они невидны.

Комплексные числа являются математическим понятием, их нет на вещественной (числовой) оси. Вводится математическое понятие – мнимая единица, равная $i = \sqrt{-1}$, и тогда корни некоторых квадратных уравнений выражаются с использованием мнимой единицы. Аналогично вводится понятие комплексной плоскости с мнимой (?) осью и в такой плоскости выполняются различные математические операции с мнимыми числами (арифметические, преобразования и т.п.).

Об особенностях мнимых чисел известно высказывание великих математиков [5]: Эйлер – «… обыкновенно *мнимыми* числами называются, потому что их в уме только представить можно» (курсив Эйлера); Гаусс – «… называть положительные величины прямыми, отрицательные – обратными, а мнимые – к ним перпендикулярными величинами, то мы имели бы простоту вместо путаницы, ясность вместо туманности» (Теория биквадратичных вычетов, 1831 г.).

Литература

1. Арнольд В.И. Геометрия комплексных чисел, кватернионов и спинов. М.: Издательство Московского центра непрерывного математического образования. 2002 - 40 с. Режим доступа - http://www.vixri.ru/d2/Arnold V.I. Geometrija kompleksnyx chisel, kvaternionov i spinov.pdf.

2. Понарин Я. П. Алгебра комплексных чисел в геометрических задачах: Книга для учащихся математических классов школ, учителей и студентов педагогических вузов.— М.: МЦНМО, 2004.— 160 с. Режим доступа - https://www.mathedu.ru/text/ponarin_algebra_kompleksnyh_chisel_v_geom_zadachah_2004/p0/.

3. Золотых Н.Ю. Комплексные числа: Учеб. пособие. 3-е издание. — Нижний Новгород: Издательство Нижегородского государственного университета, 2007 — 56 с. Режим доступа - https://vmk.ucoz.net/Files/mathematics/GA/1-semester/53-zolotykh-2007-kompleksnye_chisla.pdf

4. Родина Т.В. Комплексные числа: учеб. метод. пособие. – СПб: СПбГУ ИТМО, 2009. – 30с. Режим доступа - https://books.ifmo.ru/file/pdf/599.pdf

5. Синкевич Г.И. История геометрических представлений комплексных чисел // История науки и техники, 2017 г. № 4. С. 15-30. Режим доступа - https://www.spbgasu.ru/upload-files/vuz_v_licah/publish/sinkevich_gi/Sinkevich_mathematics_history_88.pdf

6. Галиев К.С. Визуализация комплексных чисел // Инновации. Наука. Образование, 2021 г. № 44. С. 962-970. Режим доступа - https://drive.google.com/file/d/17lSiSzT5kM9MuG_OXTYeb9zpgEOwIZeV/view.

7. Галиев К.С. Основы алгоритмизации и программирования: учеб.-метод. пособие / К. С. Галиев, Е .К. Печурина. – Краснодар: КубГАУ, 2013. – 94 с.

8. Галиев К.С. Двоичная система и представление информации в компьютере : учеб.-метод. пособие / К.С. Галиев, Е.К. Печурина; под ред. д-ра техн. наук, проф. В.И. Лойко. – Краснодар: КубГАУ, 2014. – 107 с.

9. Галиев К.С. Базы данных и СУБД: для студентов бакалавров младших курсов, изучающих дисциплину «Информатика» / К.С. Галиев, Е.К. Печурина. – Краснодар: Кубанский государственный аграрный университет имени И.Т. Трубилина, 2015. – 77 с.

10. Галиев К.С. Работа в MS Access 2010 : для студентов бакалавров, изучающих дисциплину «Базы данных» / К.С. Галиев, Е.К. Печурина. – Краснодар: Кубанский государственный аграрный университет имени И.Т. Трубилина, 2017. – 50 с.

11. Галиев К.С. Информатика: основные определения, двоичная система, представление информации: учеб. пособие/К.С. Галиев, Е.К. Печурина. – Краснодар : КубГАУ, 2018. – 135 с.

12. Галиев К.С. Информатика: логические основы, компоненты компьютера, машинные носители информации: учеб. пособие/ К.С. Галиев, Е.К. Печурина. – Краснодар : КубГАУ, 2019. – 88 с.

References

1. Arnol'd V.I. Geometrija kompleksnyh chisel, kvaternionov i spinov. M.: Izdatel'stvo Moskovskogo centra nepreryvnogo matematicheskogo obrazovanija. 2002 - 40 s. Rezhim dostupa - http://www.vixri.ru/d2/Arnold V.I. Geometrija kompleksnyx chisel, kvaternionov i spinov.pdf.

2. Ponarin Ja. P. Algebra kompleksnyh chisel v geometricheskih zadachah: Kniga dlja uchashhihsja matematicheskih klassov shkol, uchitelej i studentov pedagogicheskih vuzov.— M.: MCNMO, 2004.— 160 s. Rezhim dostupa - https://www.mathedu.ru/text/ponarin_algebra_kompleksnyh_chisel_v_geom_zadachah_2004/p0/.

3. Zolotyh N.Ju. Kompleksnye chisla: Ucheb. posobie. 3-e izdanie. — Nizhnij Novgorod: Izdatel'stvo Nizhegorodskogo gosudarstvennogo universiteta, 2007 — 56 s. Rezhim dostupa - https://vmk.ucoz.net/Files/mathematics/GA/1-semester/53-zolotykh-2007-kompleksnye_chisla.pdf

4. Rodina T.V. Kompleksnye chisla: ucheb. metod. posobie. – SPb: SPbGU ITMO, 2009. – 30s. Rezhim dostupa - https://books.ifmo.ru/file/pdf/599.pdf

5. Sinkevich G.I. Istorija geometricheskih predstavlenij kompleksnyh chisel // Istorija nauki i tehniki, 2017 g. № 4. S. 15-30. Rezhim dostupa - https://www.spbgasu.ru/upload-files/vuz_v_licah/publish/sinkevich_gi/Sinkevich_mathematics_history_88.pdf

6. Galiev K.S. Vizualizacija kompleksnyh chisel // Innovacii. Nauka. Obrazovanie, 2021 g. № 44. S. 962-970. Rezhim dostupa - https://drive.google.com/file/d/17lSiSzT5kM9MuG_OXTYeb9zpgEOwIZeV/view.

7. Galiev K.S. Osnovy algoritmizacii i programmirovanija: ucheb.-metod. posobie / K. S. Galiev, E .K. Pechurina. – Krasnodar: KubGAU, 2013. – 94 s.

8. Galiev K.S. Dvoichnaja sistema i predstavlenie informacii v komp'jutere : ucheb.-metod. posobie / K.S. Galiev, E.K. Pechurina; pod red. d-ra tehn. nauk, prof. V.I. Lojko. – Krasnodar: KubGAU, 2014. – 107 s.

9. Galiev K.S. Bazy dannyh i SUBD: dlja studentov bakalavrov mladshih kursov, izuchajushhih disciplinu «Informatika» / K.S. Galiev, E.K. Pechurina. – Krasnodar: Kubanskij gosudarstvennyj agrarnyj universitet imeni I.T. Trubilina, 2015. – 77 s.

10. Galiev K.S. Rabota v MS Access 2010 : dlja studentov bakalavrov, izuchajushhih disciplinu «Bazy dannyh» / K.S. Galiev, E.K. Pechurina. – Krasnodar: Kubanskij gosudarstvennyj agrarnyj universitet imeni I.T. Trubilina, 2017. – 50 s.

11. Galiev K.S. Informatika: osnovnye opredelenija, dvoichnaja sistema, predstavlenie informacii: ucheb. posobie/K.S. Galiev, E.K. Pechurina. – Krasnodar : KubGAU, 2018. – 135 s.

12. Galiev K.S. Informatika: logicheskie osnovy, komponenty komp'jutera, mashinnye nositeli informacii: ucheb. posobie/ K.S. Galiev, E.K. Pechurina. – Krasnodar : KubGAU, 2019. – 88 s.