

УДК 629.366

05.20.01- Технологии и средства механизации сельского хозяйства (технические специальности)

МАТЕМАТИЧЕСКАЯ МОДЕЛЬ ИЕРАРХИЧЕСКОГО УПРАВЛЕНИЯ КОЛЕБАНИЯМИ ХОДОВОЙ СИСТЕМЫ НА ПРИМЕРЕ МНОГООСНОЙ МАШИНЫ

Дмитриев Павел Евгеньевич
кандидат технических наук, доцент
РИНЦ SPIN-код: 6125-6257
E-mail: pavel-9524755555@yandex.ru

Манянин Сергей Евгеньевич
д.т.н.
Scopus Author ID: 57211567021
РИНЦ SPIN-код: 3186-9362
E-mail: ttsnn@yandex.ru

Макаров Владимир Сергеевич
д.т.н., доцент
Web of Science ResearcherID: B-2739-2014
Scopus Author ID: 57188763047
РИНЦ SPIN-код: 9834-6239
E-mail: makvl2010@gmail.com

Вахидов Умар Шахидович
д.т.н., профессор
Scopus Author ID: 55794612500
РИНЦ SPIN-код: 6999-3294
E-mail: umar-vahidov@mail.ru

Беляков Владимир Викторович
д.т.н., профессор
Web of Science ResearcherID: E-1681-2014
Scopus Author ID: 7103252617
РИНЦ SPIN-код: 3944-4416
E-mail: belyakov@nntu.ru
Нижегородский государственный технический университет им. Р.Е. Алексеева, 603950, г. Нижний Новгород, ул. Минина, д.24

В статье рассматривается актуальность применения многоосных колесных машин на шинах сверхнизкого давления для проведения технологических операций в сельском хозяйстве. Одним из способов снижения давления на грунт является применение облегченных конструкций шасси с применением аддитивных технологий и новых легких материалов. Для этого на стадии проектирования необходимо проводить моделирование с применением более подробных математических моделей. Поэтому в статье приводится динамическая модель поддресоривания многоосной колесной машины в стандартной форме Коши; указываются методы дальнейшего упрощения (на основе декомпозиции и агрегатирования) уравнений движения, а также

UDC 629.366

05.20.01 - Technologies and means of agricultural mechanization (technical specialties)

MATHEMATICAL MODEL OF HIERARCHICAL CONTROL OF VIBRATIONS OF THE PROCESSING SYSTEM ON THE EXAMPLE OF A MULTI-AXLE MACHINE

Dmitriev Pavel Evgenievich
Candidate of technical sciences, associate professor
RSCI SPIN-code: 6125-6257
E-mail: pavel-9524755555@yandex.ru

Manyanin Sergey Evgenievich
Doctor of Technical Sciences
Scopus Author ID: 57211567021
RSCI SPIN-code: 3186-9362
E-mail: ttsnn@yandex.ru

Makarov Vladimir Sergeevich
Doctor of Technical Sciences, Associate Professor
Web of Science ResearcherID: B-2739-2014
Scopus Author ID: 57188763047
RSCI SPIN code: 9834-6239
E-mail: makvl2010@gmail.com

Vakhidov Umar Shahidovich
Doctor of Technical Sciences, Professor
Scopus Author ID: 55794612500
RSCI SPIN-code: 6999-3294
E-mail: umar-vahidov@mail.ru

Belyakov Vladimir Viktorovich
Doctor of Technical Sciences, Professor
Web of Science ResearcherID: E-1681-2014
Scopus Author ID: 7103252617
RSCI SPIN-code: 3944-4416
E-mail: belyakov@nntu.ru
Nizhny Novgorod State Technical University named after R.E. Alekseev, 603950, Nizhny Novgorod, Minina, 24

The article discusses the relevance of the use of multi-axle wheeled vehicles on ultra-low pressure tires for technological operations in agriculture. One way to reduce ground pressure is to use lightweight chassis structures using additive technologies and new lightweight materials. At the design stage, it is necessary to carry out modeling using more detailed mathematical models. Therefore, the article presents a dynamic model of suspension of a multi-axle wheeled vehicle in the standard Cauchy form; methods of further simplification (on the basis of decomposition and aggregation) of the equations of motion are indicated, as well as the allocation of invariant hierarchical levels of control based on the aggregation of control and phase variables. The aim of the work is to improve the methodology for controlling the

выделения инвариантных иерархических уровней управления на основе агрегатирования управляющих и фазовых переменных. Целью работы является совершенствование методики управления ходовой системой многоосных колесных машин и развитие формальных методов повышения тяговой динамики, управляемости, устойчивости, плавности хода и прогнозирования нагрузочных режимов на элементы конструкции шасси в комплексе. Предложенный подход имеет как методологическое значение, так и намечает направления дальнейших исследований по повышению устойчивости, управляемости, тяговой динамики, плавности хода и подвижности машины в целом. В дальнейшем предлагаемый математический аппарат будет использован для оценки нагрузочных режимов и прогнозирования надежности колесных шасси

Ключевые слова: ПЛАВНОСТЬ ХОДА; УПРАВЛЕНИЕ КОЛЕБАНИЯМИ; СИСТЕМА ПОДРЕССОРИВАНИЯ; ИЕРАРХИЧЕСКОЕ УПРАВЛЕНИЕ; ДЕКОМПОЗИЦИЯ УРАВНЕНИЙ ДВИЖЕНИЯ; МНОГООСНАЯ КОЛЕСНАЯ МАШИНА, НОВЫЕ МАТЕРИАЛЫ

running system of multi-axle wheeled vehicles and to develop formal methods for increasing traction dynamics, controllability, stability, smoothness, and predicting load conditions on the chassis structure elements in the complex. The proposed approach has both methodological significance and outlines the directions for further research to improve stability, controllability, traction dynamics, smoothness and mobility of the machine as a whole. In the future, the proposed mathematical apparatus will be used to assess load modes and predict the reliability of wheeled chassis

Keywords: SMOOTH RUNNING; VIBRATION CONTROL; SUSPENSION SYSTEM; HIERARCHICAL MANAGEMENT; DECOMPOSITION OF EQUATIONS OF MOTION; MULTI-AXLE WHEELED VEHICLE, NEW MATERIALS

<http://dx.doi.org/10.21515/1990-4665-164-023>

Полноприводные многоосные колесные машины (далее МКМ) способны выполнять транспортную работу с высокой эффективностью в широком диапазоне дорожно-климатических условий, при движении по опорным основаниям с различными физико-механическими свойствами от снега до асфальта [1]. Поэтому МКМ прочно занимают свою нишу, находят применение в сельском хозяйстве. Одними из таких МКМ являются специальные шасси, выполненные на базе вездеходов на шинах сверхнизкого и необходимые для выполнения технологических операций. Преимуществом таких машин является то, что они не травмируют ранние посевы и им не требуется технологическая колея занимающая до 5% полезных площадей. Также применение таким систем позволяет переходить к точному земледелию за счет дифференциации при проведении агротехнических операций, в том числе при внесении удобрений. Примеры существующих МКМ на шинах сверхнизкого давления приведены на рис. 1.

<http://ej.kubagro.ru/2020/10/pdf/23.pdf>



Рис. 1 Примеры существующих МКМ на шинах сверхнизкого давления для проведения агротехнических операций. а) МКМ-1901, б) Сельхозмашина «Туман-2» в) ТТС 30073 «Кержак», г) Трекол-Агро

Одним из основных факторов, определяющих эффективность работы таких систем, является давление на грунт порядка 2-7 кПа. Достижение низких давлений на грунт может быть обеспечено снижением массы машины на стадии проектирования, которая может быть получена за счет применения более подробных математических моделей, а также применения аддитивных технологий и новых легких материалов. В любом случае в силу особенностей шасси МКМ, а именно, конструктивной сложности системы поддрессоривания, значительных величин неподдрессоренных масс, большого количества избыточных связей, высокой податливости несущей системы (рамы), широкого спектра воздействий со стороны неровного профиля опорного основания, существует актуальная проблема совершенствования системы поддрессоривания с целью повышения устойчивости, управляемости, тяговой динамики и плавности хода в комплексе. Которая, в свою очередь,

лимитирует более глобальные эксплуатационные показатели МКМ, например, подвижность.

Проблема комплексного повышения указанных эксплуатационных свойств МКМ сохраняет свою актуальность уже продолжительное время, что объясняется большим числом фазовых переменных и управляющих воздействий математической модели, сложностью выработки адекватных алгоритмов функционирования и критериев оптимальности, наличием неопределенности внешних возмущений со стороны опорного профиля. В данной статье разрабатывается методика построения иерархического управления системой подрессоривания МКМ, при этом математическая модель приобретает обзримую структуру и не теряет объяснительной функции.

Рассмотрим простейшую пространственную колебательную модель системы подрессоривания МКМ в которой подрессоренная масса представляется как абсолютно твердое тело, опирающееся на упруго - демпфирующие опоры, связанные с неподдресоренными массами рис. 2.

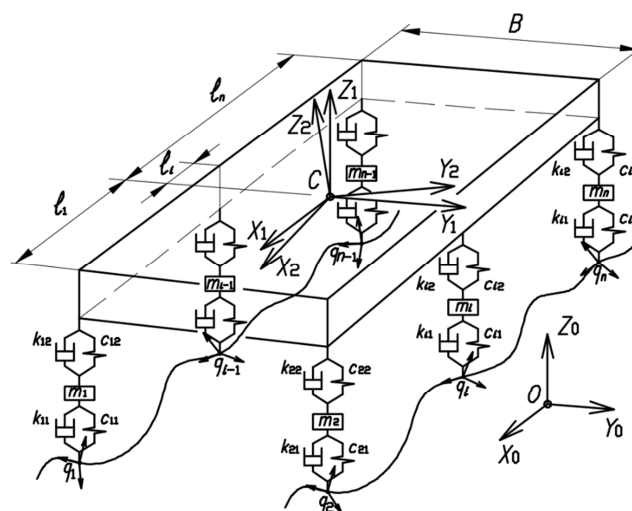


Рис.2 Расчетная схема системы подрессоривания МКМ без учета крутильной податливости несущей системы

Пространственное положение подрессоренной массы МКМ определяется в трех системах координат: неподвижной системе координат O, X_0, Y_0, Z_0 ; полусвязной системе координат C, X_1, Y_1, Z_1 , начало которой

(точка C) совпадает с центром масс, а оси совпадают с осями неподвижной системы координат; подвижной системе координат C, X_2, Y_2, Z_2 , начало которой (точка C) совпадает с центром масс, а оси направлены по главным осям инерции подрессоренной массы МКМ. Кроме того, для определения возмущений, действующих со стороны опорного профиля дороги, введены натуральные микроподвижные системы координат q_1, q_2, \dots, q_n (n - число колес), центры которых совпадают с геометрическими центрами пятен контакта соответствующих колес, а оси направлены по касательной, нормали и бинормали в соответствующей точке профиля дороги.

Пространственное положение подрессоренной массы задается в любой момент времени взаимным положением полусвязной C, X_1, Y_1, Z_1 и подвижной C, X_2, Y_2, Z_2 систем координат, которое описывается тремя углами Эйлера-Крылова: φ – угол «деферента»; ψ – угол «крена»; Θ – угол «рысканья».

Связь указанных углов Эйлера-Крылова с другими кинематическими параметрами пространственного вращения определяется формулами [2,3]:

- проекции вектора мгновенной угловой скорости ω , записанные в подвижной системе отсчета X_2, Y_2, Z_2 :

$$\begin{cases} \omega_x = \dot{\psi} \sin \Theta \sin \varphi + \dot{\Theta} \cos \varphi; \\ \omega_y = \dot{\psi} \sin \Theta \cos \varphi - \dot{\Theta} \sin \varphi; \\ \omega_z = \dot{\psi} \cos \Theta + \dot{\varphi}, \end{cases} \quad (1)$$

- скорости изменения величин углов Эйлера-Крылова:

$$\begin{cases} \dot{\psi} = \omega_x \cos \varphi + \omega_z \sin \varphi; \\ \dot{\Theta} = \frac{\omega_z \cos \varphi - \omega_x \sin \varphi}{\cos \psi}; \\ \dot{\varphi} = \omega_y - \operatorname{tg} \psi (\omega_z \cos \varphi - \omega_x \sin \varphi), \end{cases} \quad (2)$$

- матрица перехода от подвижной системы координат C, X_2, Y_2, Z_2 к неподвижной O, X_0, Y_0, Z_0 :

$$P = \begin{vmatrix} \cos\Theta\cos\varphi - \sin\psi\sin\varphi\sin\Theta & -\cos\psi\sin\Theta & \sin\varphi\cos\Theta + \cos\varphi\sin\psi\sin\Theta \\ \sin\Theta\cos\varphi + \cos\Theta\sin\varphi\sin\psi & \cos\psi\cos\Theta & \sin\varphi\sin\Theta - \sin\psi\cos\Theta\sin\varphi \\ -\cos\psi\sin\varphi & \sin\psi & \cos\varphi\cos\psi \end{vmatrix}. \quad (3)$$

Подрессоренная масса имеет шесть степеней свободы: три координаты центра масс ($T.O_1$) и три угла Эйлера, определяющие ориентацию тела в пространстве. Как следует из расчетной схемы, подрессоренная масса совершает неограниченные перемещения вдоль оси X_0 и стесненные (колебательные) перемещения по остальным координатам.

Уравнения движения подрессоренной массы, как твердого тела, совершающего свободное перемещение в пространстве задаются уравнениями Эйлера:

- первые три уравнения записываются на основании теоремы о движении центра масс

$$M \frac{dV_c}{dt} = F_\Sigma; \quad (4)$$

- последние три уравнения записываются на основании теоремы об изменении момента количества движения

$$\frac{dK_c}{dt} = M_c. \quad (5)$$

Не вдаваясь в подробности вывода указанных уравнений [2, 3], приведем их в конечном виде:

$$\left\{ \begin{array}{l} M \frac{d(V_c)_x}{dt} = (F_\Sigma)_x; \\ M \frac{d(V_c)_y}{dt} = (F_\Sigma)_y; \\ M \frac{d(V_c)_z}{dt} = (F_\Sigma)_z; \\ I_x \frac{d\omega_x}{dt} + (I_z - I_y)\omega_y\omega_z = (M_c)_x; \\ I_y \frac{d\omega_y}{dt} + (I_x - I_z)\omega_x\omega_z = (M_c)_y; \\ I_z \frac{d\omega_z}{dt} + (I_y - I_x)\omega_x\omega_y = (M_c)_z, \end{array} \right. \quad (6)$$

где компоненты тензора инерции (I_x, I_y, I_z) , а также компоненты вектора мгновенной угловой скорости ω записаны в подвижной системе отсчета X_2, Y_2, Z_2 , оси которой направлены вдоль главных осей инерции подрессоренной массы.

Управление системой поддресоривания МКМ осуществляется через управление силами, действующими в подвесках, которые принимаются пропорциональными фазовым переменным. В простейшем случае, все управляющие силы зависят от фазовых переменных только той подвески, которой они управляют (замкнутое управление); в более общем случае, управляющие силы одной подвески должны учитывать изменение фазовых переменных других подвесок (например, при продольной и поперечной стабилизации машины). В первом случае, рассмотрим более детально процесс управления одной, произвольно выделенной, подвеской рис. 3.

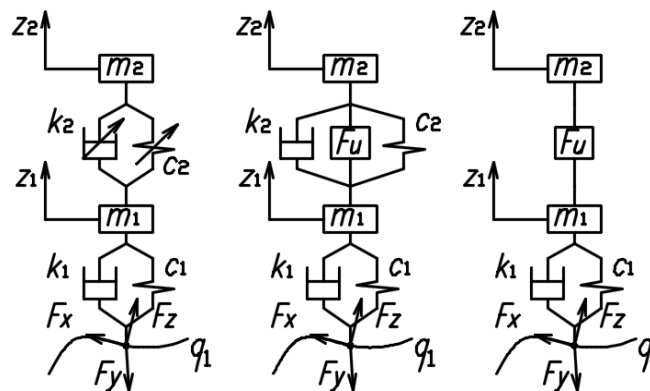


Рис. 3 Элементарная модель управления двухмассовой подвеской: m_1, m_2 – неподресоренная и поддресоренная массы соответственно; k_1, k_2 – коэффициент демпфирования шин и подвески соответственно; c_1, c_2 – жесткости шин и подвески соответственно; z_1, z_2 – вертикальные перемещения неподресоренной и поддресоренной масс соответственно; F_u – управляющая сила (исполнительный механизм); F_x, F_y, F_z – результирующие продольная; боковая и вертикальные силы, действующие в центре колеса.

Уравнения движения приведенных двухмассовых моделей подвесок описываются системой уравнений [10, 16]:

$$\begin{cases} m_2 \ddot{z}_2 + k_2(\dot{z}_2 - \dot{z}_1) + c_2(z_2 - z_1) = G; \\ m_1 \ddot{z}_1 + k_1(\dot{z}_1 - \dot{q}_1) + c_1(z_1 - q_1) - k_2(\dot{z}_2 - \dot{z}_1) - c_2(z_2 - z_1) = 0. \end{cases} \quad (7)$$

или,

$$\begin{cases} m_2 \ddot{z}_2 + k_2(\dot{z}_2 - \dot{z}_1) + c_2(z_2 - z_1) = G; \\ m_1 \ddot{z}_1 + k_1 \dot{z}_1 + c_1 z_1 - k_2(\dot{z}_2 - \dot{z}_1) - c_2(z_2 - z_1) = k_1 \dot{q}_1 + c_1 q_1 = F_z. \end{cases} \quad (8)$$

Рассмотрим управление по отклонению [17, 18]:

$$F_u = \Delta c_2(z_2 - z_1), \quad (9)$$

где F_u – управляющее силовое воздействие, пропорциональное разности координат (отклонению) подрессоренной и неподрессоренной масс; Δc_2 – коэффициент пропорциональности.

Тогда система уравнений примет вид:

$$\begin{cases} m_2\ddot{z}_2 + k_2(\dot{z}_2 - \dot{z}_1) + (c_2 + \Delta c_2)(z_2 - z_1) = G; \\ m_1\ddot{z}_1 + k_1\dot{z}_1 + c_1z_1 - k_2(\dot{z}_2 - \dot{z}_1) - c_2(z_2 - z_1) = F_z. \end{cases} \quad (10)$$

Таким образом, при управлении по отклонению осуществляется частотная коррекция.

При управлении по скорости изменения отклонения [17, 18]:

$$F_u = \Delta k_2(\dot{z}_2 - \dot{z}_1), \quad (11)$$

F_u – управляющее силовое воздействие, пропорциональное скорости изменения разности координат подрессоренной и неподрессоренной масс; Δk_2 – коэффициент пропорциональности.

Тогда система уравнений примет вид:

$$\begin{cases} m_2\ddot{z}_2 + (k_2 + \Delta k_2)(\dot{z}_2 - \dot{z}_1) + c_2(z_2 - z_1) = G; \\ m_1\ddot{z}_1 + k_1\dot{z}_1 + c_1z_1 - k_2(\dot{z}_2 - \dot{z}_1) - c_2(z_2 - z_1) = k_1\dot{q}_1 + c_1q_1 = F_z. \end{cases} \quad (12)$$

Таким образом, управление по скорости отклонения ($\dot{z}_2 - \dot{z}_1$) связано с изменением демпфирования.

При управлении по ускорению [17, 18]:

$$F_u = \Delta m_2\ddot{z}_2, \quad (13)$$

где \ddot{z}_2 – ускорение подрессоренной массы в точке действия упруго-демпфирующей силы рассматриваемой подвески; Δm_2 – коэффициент пропорциональности управляющего воздействия.

$$\begin{cases} (m_2 + \Delta m_2)\ddot{z}_2 + k_2(\dot{z}_2 - \dot{z}_1) + c_2(z_2 - z_1) = G; \\ m_1\ddot{z}_1 + k_1\dot{z}_1 + c_1z_1 - k_2(\dot{z}_2 - \dot{z}_1) - c_2(z_2 - z_1) = k_1\dot{q}_1 + c_1q_1 = F_z. \end{cases} \quad (14)$$

Как видно из последней системы уравнений, управление по ускорению связано с изменением (коррекцией) собственной частоты колебаний.

В общем случае, рассмотрим суммарное управление [17, 18]:

$$F_u = \Delta m_2\ddot{z}_2 + \Delta k_2(\dot{z}_2 - \dot{z}_1) + \Delta c_2(z_2 - z_1). \quad (15)$$

Тогда система уравнений примет вид:

$$\begin{cases} (m_2 + \Delta m_2)\ddot{z}_2 + (k_2 + \Delta k_2)(\dot{z}_2 - \dot{z}_1) + (c_2 + \Delta c_2)(z_2 - z_1) = G; \\ m_1\ddot{z}_1 + k_1\dot{z}_1 + c_1z_1 - k_2(\dot{z}_2 - \dot{z}_1) - c_2(z_2 - z_1) = k_1\dot{q}_1 + c_1q_1 = F_z. \end{cases} \quad (16)$$

Выберем величины коэффициентов пропорциональности $(\Delta m_2, \Delta k_2, \Delta c_2)$ в управляющем воздействии F_u , удовлетворяющими соотношению

$$\frac{\Delta c_2}{c_2} = \frac{\Delta k_2}{k_2} = \frac{\Delta m_2}{m_2} = A, \quad (17)$$

тогда управляющее воздействие примет вид

$$F_u = Am_2\ddot{z}_2 + Ak_2(\dot{z}_2 - \dot{z}_1) + Ac_2(z_2 - z_1), \quad (18)$$

а общая система уравнений

$$\begin{cases} m_2\ddot{z}_2 + k_2(\dot{z}_2 - \dot{z}_1) + c_2(z_2 - z_1) = \frac{G}{(1+A)}; \\ m_1\ddot{z}_1 + k_1\dot{z}_1 + c_1z_1 - k_2(\dot{z}_2 - \dot{z}_1) - c_2(z_2 - z_1) = k_1\dot{q}_1 + c_1q_1 = F_z. \end{cases} \quad (19)$$

т.е. такое управление (с конкретными значениями коэффициентов пропорциональности) приводит к уменьшению амплитуды внешнего воздействия в $(1 + A)$ раз.

Из последнего уравнения следует, что в области частот, близких к резонансной, наиболее эффективным является управление по $(\dot{z}_2 - \dot{z}_1)$; в дорезонансной зоне наиболее предпочтительно управление по z , а в зарезонансной зоне – по \ddot{z}_2 .

В реальной МКМ всегда имеют место инерционность звеньев, трение, наличие зазоров, гистерезис и запаздывание в управлении. Для компенсации указанных эффектов вводят управление по интегралу и высшим производным в общем виде [17, 18]:

$$F_u = \int_{t-\Delta t}^{t+\Delta t} z dt + s_0(z_2 - z_1) + s_1(\dot{z}_2 - \dot{z}_1) + s_2\ddot{z}_2 + \dots \quad (20)$$

В случае управления углами крена, рыскания и дифферента следует вводить управление по большему числу фазовых переменных рис. 4.

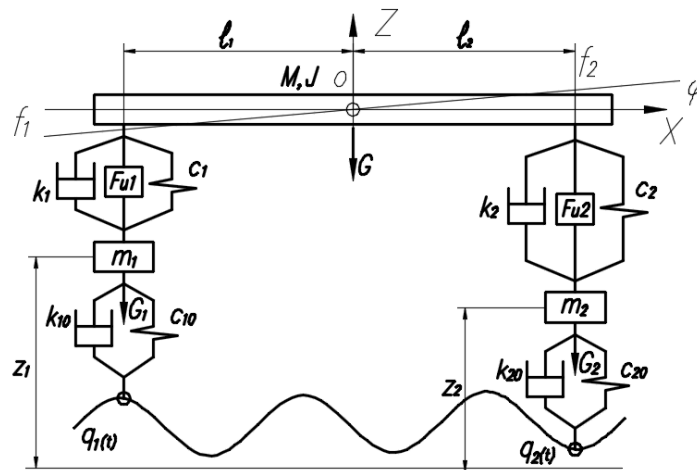


Рис. 4 Элементарная модель управления угловым положением поддресоренной массы: m – поддресоренная масса; J – момент инерции поддресоренной массы; m_1, m_2 – неподдресоренные массы двух осей; k_1, k_2 – коэффициенты демпфирования подвесок осей; c_1, c_2 – коэффициенты жесткости подвесок осей; k_{10}, k_{20} – коэффициенты демпфирования в шинах; c_{10}, c_{20} – коэффициенты жесткости шин; F_{u1}, F_{u2} – управляющие силовые воздействия в подвесках осей; G_1, G_2 – силы веса неподдресоренных масс осей; G – сила веса поддресоренной массы; $q_1(t), q_2(t)$ – ординаты профиля дороги под соответствующими осями; φ – угловое перемещение поддресоренной массы; z_1, z_2 – вертикальные перемещения неподдресоренных масс осей; f_1, f_2 – вертикальные перемещения поддресоренной массы в местах установки подвесок осей; l_1, l_2 – продольные координаты подвесок осей относительно центра масс.

Уравнения движения приведенной (рис. 4) плоской колебательной системы двух подвесок описываются системой уравнений [7, 8, 10]:

$$\begin{cases} M\ddot{z}_0 + F_1 + F_2 = G; \\ J\ddot{\varphi} + F_1 l_1 - F_2 l_2 = 0; \\ m_1 \ddot{z}_1 + k_{10}(\dot{z}_1 - \dot{q}_1) + c_{10}(z_1 - q_1) = F_1 + G_1; \\ m_2 \ddot{z}_2 + k_{20}(\dot{z}_2 - \dot{q}_2) + c_{20}(z_2 - q_2) = F_2 + G_2, \end{cases} \quad (21)$$

где $F_1 = F_{u1} + k_1(\dot{z}_1 - \dot{z}_0 - \dot{\varphi}l_1) + c_1(z_1 - z_0 - \varphi l_1)$, $F_2 = F_{u2} + k_2(\dot{z}_2 - \dot{z}_0 + \dot{\varphi}l_2) - c_2(z_2 - z_0 + \varphi l_2)$, $F_{u1,2}$ – управляющие силовые воздействия.

В общем виде, стабилизирующий (управляемый) момент углового смещения поддресоренной массы определяется по формуле

$$M_u = F_{u1} l_1 - F_{u2} l_2, \quad (22)$$

или в развернутом виде с учетом управлений по старшим производным

$$M_u = \left(\int_{t-\Delta t}^{t+\Delta t} (z_1 - z_0 - \varphi l_1) dt + s_{10}(z_1 - z_0 - \varphi l_1) + s_{11}(\dot{z}_1 - \dot{z}_0 - \dot{\varphi} l_1) + \dots \right) l_1 -$$

$$-\left(\int_{t-\Delta t}^{t+\Delta t} (z_2 - z_0 + \phi l_2) dt + s_{20}(z_2 - z_0 + \phi l_2) + s_{22}(\dot{z}_2 - \dot{z}_0 + \dot{\phi} l_2) + \dots\right) l_2. \quad (23)$$

Как следует, из уравнения (23), в случае двух осей, управляющее воздействие должно учитывать состояние обеих подвесок, а в общем случае МКМ – состояния всех подвесок.

Рассмотрим также управление распределением крутящих моментов (тяговых сил) по каждому отдельному движителю в виде [8, 9]

$$F_{Ti} = r_0 \varphi_k + r_1 \dot{\varphi}_k + r_2 \ddot{\varphi}_k + \dots \quad (24)$$

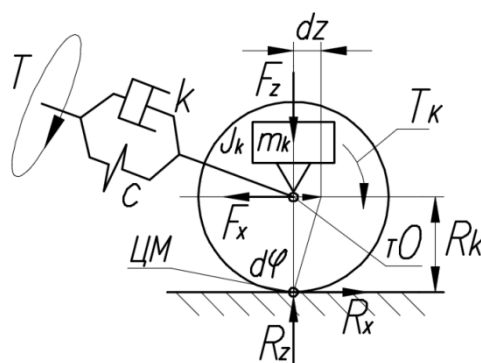


Рис. 5 Расчетная схема преобразования крутящего момента, подводимого к колесному движителю, в тяговую силу: T_k – крутящий момент, подводимый от трансмиссии; k – коэффициент демпфирования в приводе; c – коэффициент угловой жесткости привода; dx – элементарный путь, проходимый колесным движителем при элементарном повороте $d\varphi$; J_k – момент инерции колесного движителя; m_k – неподрессоренная масса, связанная с колесным движителем; F_x – продольная тяговая сила, реализуемая колесным движителем; F_z – нормальная сила, приходящаяся на колесный движитель; R_x – продольная реакция, действующая со стороны опорного основания на движитель; R_z – нормальная реакция, действующая со стороны опорного основания на движитель; r_k – радиус колесного движителя.

Проекции внешних сил, действующих на МКМ и вычисленных в неподвижной системе координат O, X_0, Y_0, Z_0 , на подвижную систему координат O, X_2, Y_2, Z_2 определяются по формулам

$$[F_x^{0_2} \quad F_y^{0_2} \quad F_z^{0_2}]^T = \|P\| [F_x^0 \quad F_y^0 \quad F_z^0]. \quad (25)$$

Уравнения моментов в подвижной системе координат определяются по формулам

$$\begin{cases} T_x^{02} = F_z^{02}y - F_y^{02}z; \\ T_y^{02} = F_x^{02}z - F_z^{02}x; \\ T_z^{02} = F_y^{02}x - F_x^{02}y. \end{cases} \quad (26)$$

МКМ представляется как механическая система в виде сосредоточенных масс соединенных между собой упруго - демпфирующими связями. Исходные уравнения движения базируются на фундаментальном принципе наименьшего действия, согласно которому каждая механическая система характеризуется лагранжианом $L(q, \dot{q}, t)$. Причем, если вектор обобщенных координат q_1 соответствует состоянию системы в момент времени $t = t_1$, а вектор q_2 состоянию в момент времени $t = t_2$, то между этими двумя состояниями система движется так, что интеграл

$$S = \int_{t_1}^{t_2} L(q, \dot{q}, t) dt, \quad (27)$$

называемый действием механической системы, достигает минимума. Имеется ряд эквивалентных формулировок данного принципа, в частности, уравнения Лагранжа

$$\frac{d}{dt} \frac{\partial L}{\partial \dot{q}_k} - \frac{\partial L}{\partial q_k} = 0, \quad k = \overline{1, n}, \quad (28)$$

которые представляют собой дифференциальные уравнения второго порядка. В силу структуры кинетической энергии, входящей в лагранжиан $L(q, \dot{q}, t) = T - \Pi$, указанные уравнения являются линейными и, следовательно, разрешимыми относительно вторых (старших) производных от обобщенных координат. Кроме того, основные теоремы механики, например, те, которые были использованы при выводе уравнений пространственного движения твердого тела также приводят к уравнениям, разрешимым относительно старших производных. Данное обстоятельство позволяет представить общую систему уравнений движения МКМ, которая учитывает тяговую динамику, управляемость и плавность хода в нормальной форме Коши.

$$\frac{dx_0^i}{dt} = X_0^i(t, x_0^1, \dots, x_0^{n_0}, u_0^1, \dots, u_0^{m_0}, v_0^1, \dots, v_0^{p_0}), i = \overline{1, n_0} \quad (29)$$

или, в векторной форме:

$$\frac{d\vec{x}_0}{dt} = \vec{X}_0^i(t, \vec{x}_0, \vec{u}_0, \vec{v}_0), \quad (30)$$

где $\vec{x}_0 = \{x_0^1, \dots, x_0^{n_0}\}$ – вектор фазовых переменных модели; $\vec{u}_0 = \{u_0^1, \dots, u_0^{m_0}\}$ – вектор управлений; $\vec{v}_0 = \{v_0^1, \dots, v_0^{p_0}\}$ – вектор внешних возмущений; $\vec{X}_0^i(t, \vec{x}_0, \vec{u}_0, \vec{v}_0)$ – вектор-функция, в общем случае не линейная.

Введем различие в переменных, входящих в уравнения (29), (30) [13, 14, 15]:

- будем называть «внешними» такие величины, которые в рамках данной модели считаются известными, это \vec{u}_0 и \vec{v}_0 ;

- будем называть «внутренними» такие величины, которые определяются в результате решения модели, если известно начальное состояние системы и все внешние величины;

- «внешние» величины, фигурирующие в моделях, в свою очередь, целесообразно разделить на три вида: величины, которые являются характеристиками данного процесса; величины, которые описывают влияние на изучаемый процесс некоторых внешних по отношению к нему процессов \vec{v}_0 ; управления \vec{u}_0 , т.е. величины, которые находятся в распоряжении управляющих органов, с помощью которых можно оказывать влияние на процесс.

- управления, делятся на два вида: «программные» управления, которые задаются как функции времени $\vec{u}_0(t)$ и «синтезирующие» управления, которые задаются как функции времени и фазовых переменных $\vec{u}_0(t, \vec{x}_0)$, такие управления называют иначе «обратными связями».

Теорема о существовании и единственности решения дифференциальных уравнений накладывает следующие требования на функции и переменные, входящие в систему (29), (30):

- непрерывность функций $\overrightarrow{X}_0^i(t, \overrightarrow{x}_0, \overrightarrow{u}_0, \overrightarrow{v}_0)$ по совокупности переменных $t, \overrightarrow{x}_0, \overrightarrow{u}_0, \overrightarrow{v}_0$;
- непрерывная дифференцируемость функций $\overrightarrow{X}_0^i(t, \overrightarrow{x}_0, \overrightarrow{u}_0, \overrightarrow{v}_0)$ по фазовым переменным \overrightarrow{x}_0 ;
- кусочная непрерывность функций $\overrightarrow{u}_0, \overrightarrow{v}_0$ от своих аргументов.

Поставим далее, две задачи: о декомпозиции по фазовым переменным и агрегатировании по управляющим переменным общей системы уравнений (29), (30).

Понятие «декомпозиция» [13] характеризует разложение (разделение) исходного математического объекта в прикладном исследовании на более простые объекты, как правило, той же природы, что и исходный объект, причем совокупность этих более простых объектов эквивалентна исходному. В зависимости от критерия эквивалентности, рассматривают точную и приближенную декомпозиции. В прикладных исследованиях методы декомпозиции имеют особое значение при рассмотрении сложных управляемых процессов, что в полной мере соответствует приведенной выше задаче управления ходовой системой МКМ.

Одна из наиболее четких формулировок термина «агрегатирование» дается следующими соображениями [15]. Пусть дана сложная система уравнений движения (типичным примером, которой является система (30)) характеризуемая большим числом фазовых переменных, управлений и возмущений; замкнутая в том смысле, что задание конкретных управлений на некотором временном отрезке и указание состояния системы (в начале этого отрезка) однозначным образом определяет все развитие процесса на этом отрезке времени. Требуется построить эквивалентную замкнутую модель, которая связывает не исходные управляющие воздействия, а

некоторые их агрегаты (функции), причем их количество должно быть меньшим исходного числа переменных.

Постановки задач декомпозиции и агрегатирования являются в некоторой степени родственными [11, 12, 14], так как решаются на единой методологической основе. С указанными задачами тесно связана более общая задача о построении иерархических структур для управления сложными системами. Особую ценность задачи декомпозиции и агрегатирования приобретают, когда управляемый процесс настолько сложный, что трудно выработать (сформулировать) целевую функцию. В терминах естественных физических переменных, с которыми имеет дело исследователь при построении математической модели (30), далеко не ясно, каким образом ввести иерархию управления процессом. То есть, на какие более элементарные подобъекты разбить исходную систему, сколько иметь уровней иерархии, с какими терминами (динамическими переменными) должен иметь дело тот или иной орган управления, какие именно управления «отдать» в распоряжение того или иного органа и т.п. Применяя вольность речи, можно сказать, что в свойствах системы допускать декомпозицию и (или) агрегатирование сосредоточена информация о том, «что в системе и от чего зависит и чем и на что именно можно влиять».

Понятие эквивалентности математической модели (29) и (30) базируется на преобразованиях переменных:

$$x_1^i = F_x^i(t, \vec{x}_0), i = \overline{1, n_0}; \quad (31)$$

$$u_1^j = F_u^j(t, \vec{u}_0), j = \overline{1, m_0}; \quad (32)$$

$$v_1^k = F_v^k(t, \vec{v}_0), k = \overline{1, p_0}. \quad (33)$$

Преобразования переменных (31), (32), (33) должны удовлетворять требованиям взаимной однозначности и гладкости. В силу этих требований, обратные функции

$$x_0^i = F_x^i(t, \overrightarrow{x_1}), i = \overline{1, n_0}; \quad (34)$$

$$u_0^j = F_u^j(t, \overrightarrow{u_1}), j = \overline{1, m_0}; \quad (35)$$

$$v_0^k = F_v^k(t, \overrightarrow{v_1}), k = \overline{1, p_0} \quad (36)$$

также должны быть гладкими функциями.

В результате преобразования переменных в системе (30) по формулам (34), (35), (36), получим:

$$\frac{dx_1^i}{dt} = X_0^i(t, x_1^1, \dots, x_1^{n_0}, u_1^1, \dots, u_1^{m_0}, v_1^1, \dots, v_1^{p_0}), i = \overline{1, n_0}. \quad (37)$$

Обратно, если в системе (37) выполнить преобразования (31), (32), (33), то перейдет в исходную систему (30).

Примем далее две системы вида (30), (37) эквивалентными (это определение не исключает других понятий «эквивалентности»), если одна система переходит в другую (и обратно) с помощью некоторой обратимой гладкой замены переменных. Приведенное понятие эквивалентности, с необходимостью накладывает связи на решения эквивалентных систем [6].

Из приведенного класса преобразований переменных (31), (32), (33) представляет интерес его сужение, включающее только такие замены переменных, которые позволяют получить из исходной системы (30) эквивалентную систему, структура которой имеет в каком-то смысле более удобный для дальнейшего анализа вид. Можно указать следующие упрощения структуры исходной системы уравнений (30):

1. Полное разделение исходной системы уравнений на несколько независимых друг от друга подсистем («горизонтальная декомпозиция»):

$$\left\{ \begin{array}{l} \frac{dx_1^i}{dt} = X_1^i(t, x_1^1, \dots, x_1^{n_1}, u_1^1, \dots, u_1^{m_1}, v_1^1, \dots, v_1^{p_1}), i = \overline{1, n_1}; \\ \vdots \\ \frac{dx_r^j}{dt} = X_r^j(t, x_r^{n_{r-1}+1}, \dots, x_r^{n_{r-1}+n_r}, u_r^{m_{r-1}+1}, \dots, u_r^{m_{r-1}+m_r}, v_r^{p_{r-1}+1}, \dots, v_r^{p_{r-1}+p_r}), j = \overline{1, n_r}; \\ \vdots \\ \frac{dx_s^k}{dt} = X_s^k(t, x_s^{n_{s-1}+1}, \dots, x_s^{n_{s-1}+n_s}, u_s^{m_{s-1}+1}, \dots, u_s^{m_{s-1}+m_s}, v_s^{p_{s-1}+1}, \dots, v_s^{p_{s-1}+p_s}), k = \overline{1, n_s}, \end{array} \right. \quad (38)$$

где n_1 – число уравнений первой независимой подсистемы; n_r – число уравнений r -ой независимой подсистемы; n_s – число уравнений s -ой независимой подсистемы; $n_0 = n_1 + \dots + n_r + \dots + n_s$ – число независимых переменных исходной системы.

В преобразованной системе (38) содержится s независимых подсистем, которые не имеют общих независимых переменных, поэтому решения каждой подсистемы являются независимыми друг от друга и систему (38), более правильно записать в виде

$$\begin{aligned} \left\{ \frac{dx_1^i}{dt} = X_1^i(t, x_1^1, \dots, x_1^{n_1}, u_1^1, \dots, u_1^{m_1}, v_1^1, \dots, v_1^{p_1}), i = \overline{1, n_1}; \right. \\ \vdots \\ \left. \frac{dx_r^j}{dt} = X_r^j(t, x_r^{n_{r-1}+1}, \dots, x_r^{n_{r-1}+n_r}, u_r^{m_{r-1}+1}, \dots, u_r^{m_{r-1}+m_r}, v_r^{p_{r-1}+1}, \dots, v_r^{p_{r-1}+p_r}), j = \overline{1, n_r}; \right. \\ \vdots \\ \left. \frac{dx_s^k}{dt} = X_s^k(t, x_s^{n_{s-1}+1}, \dots, x_s^{n_{s-1}+n_s}, u_s^{m_{s-1}+1}, \dots, u_s^{m_{s-1}+m_s}, v_s^{p_{s-1}+1}, \dots, v_s^{p_{s-1}+p_s}), k = \overline{1, n_s}, \right. \end{aligned}$$

Приведенные системы допускают решение параллельно, поэтому данный тип декомпозиции называется горизонтальным.

В частном случае, когда исходная система (30) «расщепляется» на две независимые подсистемы, уравнения будут иметь вид:

$$\begin{aligned} \left\{ \frac{dx_1^i}{dt} = X_1^i(t, x_1^1, \dots, x_1^{n_1}, u_1^1, \dots, u_1^{m_1}, v_1^1, \dots, v_1^{p_1}), i = \overline{1, n_1}; \right. \\ \left. \frac{dx_2^j}{dt} = X_2^j(t, x_2^{n_1+1}, \dots, x_2^{n_1+n_2}, u_2^{m_1+1}, \dots, u_2^{m_1+m_2}, v_2^{p_1+1}, \dots, v_2^{p_1+p_2}), j = \overline{1, n_2}, \right. \end{aligned}$$

2. Одна или несколько систем независимы друг по отношению к другу, другие подсистемы становятся замкнутыми, если в них подставить решения независимых подсистем («вертикальная декомпозиция»):

$$\left\{ \begin{array}{l} \frac{dx_1^i}{dt} = X_1^i(t, x_1^1, \dots, x_1^{n_1}, u_1^1, \dots, u_1^{m_1}, v_1^1, \dots, v_1^{p_1}), i = \overline{1, n_1}; \\ \vdots \\ \frac{dx_r^j}{dt} = X_r^j \left(\begin{array}{l} t, x_1^1, \dots, x_1^{n_1}, x_r^{n_1+1}, \dots, x_r^{n_1+n_r}, \\ u_1^1, \dots, u_1^{m_1}, u_r^{m_1+1}, \dots, u_r^{m_1+m_r}, \\ v_1^1, \dots, v_1^{p_1}, v_r^{p_1+1}, \dots, v_r^{p_1+p_r} \end{array} \right), j = \overline{1, n_r}; \\ \vdots \\ \frac{dx_s^k}{dt} = X_s^k \left(\begin{array}{l} t, x_1^1, \dots, x_1^{n_1}, x_s^{n_1+1}, \dots, x_s^{n_1+n_s}, \\ u_1^1, \dots, u_1^{m_1}, u_s^{m_1+1}, \dots, u_s^{m_1+m_s}, \\ v_1^1, \dots, v_1^{p_1}, v_s^{p_1+1}, \dots, v_s^{p_1+p_s} \end{array} \right), k = \overline{1, n_s}, \end{array} \right. \quad (39)$$

В системе уравнений (39) независимой является только первая подсистема, другие подсистемы становятся независимыми, если в них подставить решение $x_1^i = x_1^i(t), i = \overline{1, n_1}$ первой системы, поэтому систему (39) более правильно записать в виде:

$$\left\{ \begin{array}{l} \frac{dx_1^i}{dt} = X_1^i(t, x_1^1, \dots, x_1^{n_1}, u_1^1, \dots, u_1^{m_1}, v_1^1, \dots, v_1^{p_1}), i = \overline{1, n_1}; \\ \vdots \\ \frac{dx_r^j}{dt} = X_r^j \left(\begin{array}{l} t, x_1^1, \dots, x_1^{n_1}, x_r^{n_1+1}, \dots, x_r^{n_1+n_r}, \\ u_1^1, \dots, u_1^{m_1}, u_r^{m_1+1}, \dots, u_r^{m_1+m_r}, \\ v_1^1, \dots, v_1^{p_1}, v_r^{p_1+1}, \dots, v_r^{p_1+p_r} \end{array} \right), j = \overline{1, n_r}; \\ \vdots \\ \frac{dx_s^k}{dt} = X_s^k \left(\begin{array}{l} t, x_1^1, \dots, x_1^{n_1}, x_s^{n_1+1}, \dots, x_s^{n_1+n_s}, \\ u_1^1, \dots, u_1^{m_1}, u_s^{m_1+1}, \dots, u_s^{m_1+m_s}, \\ v_1^1, \dots, v_1^{p_1}, v_s^{p_1+1}, \dots, v_s^{p_1+p_s} \end{array} \right), k = \overline{1, n_s}. \end{array} \right. \quad (40)$$

Приведенные системы уравнений не допускают параллельного решения, т.к. сначала должна быть решена независимая система, а уже потом, все другие, поэтому данный тип декомпозиции называется вертикальной.

В частном случае, когда от исходной системы (30) «отщепляется» одна независимая подсистема и остается одна зависимая, уравнения будут иметь вид:

$$\left\{ \begin{array}{l} \frac{dx_1^i}{dt} = X_1^i(t, x_1^1, \dots, x_1^{n_1}, u_1^1, \dots, u_1^{m_1}, v_1^1, \dots, v_1^{p_1}), i = \overline{1, n_1}; \\ \left(\frac{dx_2^j}{dt} = X_2^j \left(\begin{array}{l} t, x_1^1, \dots, x_1^{n_1}, x_2^{n_1+1}, \dots, x_2^{n_1+n_2}, \\ u_1^1, \dots, u_1^{m_1}, u_2^{m_1+1}, \dots, u_2^{m_1+m_2}, \\ v_1^1, \dots, v_1^{p_1}, v_2^{p_1+1}, \dots, v_2^{p_1+p_2} \end{array} \right), j = \overline{1, n_2}, \right. \end{array} \right.$$

Как видно из системы (40), «горизонтальная» декомпозиция является частным случаем «вертикальной», когда, правые части всех подсистем, не имеют общих независимых переменных.

Для формальной постановки задачи об агрегатировании, вернемся к исходной системе уравнений (29), описывающей движение ходовой системы МКМ:

$$\frac{dx_0^i}{dt} = X_0^i(t, x_0^1, \dots, x_0^{n_0}, u_0^1, \dots, u_0^{m_0}, v_0^1, \dots, v_0^{p_0}), i = \overline{1, n_0}.$$

Будем говорить, что исходная система допускает агрегатирование по фазовым и управляющим переменным порядка $n_0 - n_1$, если существуют такие функции

$$\begin{aligned} F_x^j(t, x_0^1, \dots, x_0^{n_0}), j = \overline{1, n_1}, \quad n_1 < n_0; \\ F_u^k(t, u_0^1, \dots, u_0^{m_0}), k = \overline{1, m_1}, \quad m_1 < m_0 \end{aligned}$$

и такие функции $X_1^j(t, F_x^1, \dots, F_x^{n_1}, F_u^1, \dots, F_u^{m_1}, v_0^1, \dots, v_0^{p_0}), j = \overline{1, n_1}$, что из (29) следует справедливость уравнения

$$\frac{dF_x^j}{dt} = X_1^j(t, F_x^1, \dots, F_x^{n_1}, F_u^1, \dots, F_u^{m_1}, v_0^1, \dots, v_0^{p_0}), j = \overline{1, n_1}, \quad (41)$$

где $F_u^1, \dots, F_u^{m_1}$ – агрегаты управлений.

Свойство системы допускать декомпозицию, агрегатирование или, в общем случае, иерархичность по управляющим и фазовым переменным тесно связана с групповыми свойствами исходной математической модели. Прикладная теория анализа структур дифференциальных уравнения (являющихся уравнениями движения тех или иных объектов исследования) базируется на методах группового анализа дифференциальных уравнений и теории групп Ли [5, 11, 12, 14]. Не вдаваясь в подробности указанного математического аппарата [5, 11, 12, 14], приведем одну из центральных теорем:

Для того чтобы система (29) допускала агрегатирование порядка r , необходимо и достаточно, чтобы система (29) при любых допустимых управляющих переменных $u_0^1, \dots, u_0^{m_0}$ (из допустимой области U) допускала

непрерывную группу порядка $p \geq r$ преобразований, содержащую в точности r линейно независимых операторов вида [13]

$$\tilde{X}_\gamma = \sum_{i=1}^{n_0} \Theta_{i,\gamma}(t, x_0^1, \dots, x_0^{n_0}) \frac{\partial}{\partial x_0^i}, \gamma = \overline{1, q}$$

инварианты которой F_x^j не зависят от того, какие конкретные управляющие переменные $u_0^1, \dots, u_0^{m_0}$ из допустимой области U фигурируют в системе (29).

Организовать управление ходовой системой МКМ, которая описывается системой уравнений (29) теперь можно следующим образом [13]. В первую очередь выбираются агрегаты управления $F_u^1, \dots, F_u^{m_1}$ из решения некоторой оптимизационной задачи для системы (41) меньшей размерности, чем исходная система. Функционал Φ_1 , подлежащий оптимизации, при этом формулируется в терминах лишь агрегативных переменных:

$$\Phi_1 = (t, F_x^1, \dots, F_x^{n_1}, F_u^1, \dots, F_u^{m_1}, v_0^1, \dots, v_0^{p_0}). \quad (42)$$

Пусть $\tilde{F}_x^1, \dots, \tilde{F}_x^{n_1}, \tilde{F}_u^1, \dots, \tilde{F}_u^{m_1}$ являются решениями данной задачи. Вернемся к решению исходной задачи (29), связанную с минимизацией функционала

$$\Phi_0 = (t, x_0^1, \dots, x_0^{n_0}, u_0^1, \dots, u_0^{m_0}, v_0^1, \dots, v_0^{p_0}), \quad (43)$$

но считая при этом, что должны быть наложены ограничения вида

$$\begin{aligned} \tilde{F}_x^j(t, x_0^1, \dots, x_0^{n_0}), j = \overline{1, n_1}; \\ \tilde{F}_u^k(t, u_0^1, \dots, u_0^{m_0}), k = \overline{1, m_1}, \end{aligned}$$

вытекающие из решения оптимизационной задачи (41), (42).

Приведенные ограничения упрощают задачу, т.к. функционал (43) после применения указанных ограничений превращается в функционал Φ_0 меньшей размерности.

Выводы

1. Приведенная в статье система уравнений (29), с физической точки зрения означает, что при управлении динамическими процессами имеются «высшие» цели, которые формулируются в терминах агрегатов $F_x^1, \dots, F_x^{n_1}, F_u^1, \dots, F_u^{m_1}$ и подлежат достижению в первую очередь. Для

достижения этих высших целей формируется «высший» орган управления, целью которого является отыскание решения уравнения (41), оптимизирующего функционал (42). Этот орган (физически это может быть и водитель) может функционировать имея не всю информацию о процессе: ему достаточно знать лишь интегральные инварианты $F_x^1, \dots, F_x^{n_1}, F_u^1, \dots, F_u^{m_1}$.

2. Как следует из приведенных идей агрегатирования, для достижения высших (глобальных) целей управления достаточно использовать не весь ресурс управления, содержащийся в исходной системе (29), а лишь его часть. Поэтому на низших ступенях иерархии по управлению ходовой системой МКМ, то есть в терминах исходных переменных $x_0^1, \dots, x_0^{n_0}, u_0^1, \dots, u_0^{m_0}$, можно также поставить цель и добиться ее выполнения путем использования оставшегося ресурса управления.

3. Как правило, на низшем уровне достигаются цели по «быстрым» переменным с использованием синтезирующих управлений, то есть замкнутых с помощью обратных связей. На низшем уровне иерархии управления ходовой системой МКМ целесообразно реализовывать оптимизационную задачу перераспределения потока мощности по отдельным колесным движителям; на среднем уровне иерархии – решать задачу управления колебаниями поддрессоренной части, а на высшем уровне – задачу управляемости.

4. Приведенные методы можно использовать с целью повышения устойчивости, управляемости, тяговой динамики, плавности хода и подвижности машины в целом [19, 20]. В дальнейшем предлагаемый математический аппарат будет использован для оценки и прогнозирования нагрузочных режимов, а также долговечности системы поддрессорования и трансмиссии выполненных с применением аддитивных технологий и новых легких материалов.

Работа выполнена при финансовой поддержке Минобрнауки России в рамках проекта «Создание высокотехнологичного производства материалов, изделий и оборудования с использованием аддитивных технологий и технологий газостатирования» на базе ПАО «РУСПОЛИМЕТ» по соглашению № 075-11-2019-084 от 18.12.2019 (постановление Правительства Российской Федерации от 09 апреля 2010 года № 218).

Библиографический список

1. Аксенов П.В. Многоосные автомобили. – 2-е изд., перераб. и доп. – М.: Машиностроение, 1989. – 280 с.
2. Ганиев Р.Ф., Кононенко В.О. Колебания твердых тел. – М.: Наука, 1976. – 431 с.
3. Голдстейн Г. Классическая механика. – М.: Наука, 1975. – 415 с.
4. Елкин В.И. Редукция нелинейных управляемых систем: дифференциально – геометрический подход. – М.: Наука, 1997. – 317 с.
5. Журавлев В.Ф., Климов Д.М. Прикладные методы в теории колебаний. – М.: Наука, 1988. – 328 с.
6. Ибрагимов Н.Х. Алфавит группового анализа. – М.: Знание, 1989. – 48 с.
7. Смирнов, Г.А. Теория движения колёсных машин: учеб. для студентов машиностроительных специальностей вузов / Г.А. Смирнов. – 2-е изд., доп. и перераб. – М.: Машиностроение, 1990. – 352 с.
8. Тарасик, В.П. Теория движения автомобиля: учеб. для вузов / В.П. Тарасик. – СПб.: БХВ-Петербург, 2006. – 476 с.
9. Ларин В.В. Теория движения полноприводных колесных машин: учеб./ В.В. Ларин. – М.: Изд-во МГТУ им. Н.Э. Баумана, 2010. – 392.
10. Кравец В.Н. Теория движения автомобиля: учеб./ В.Н. Кравец; НГТУ им. Р.Е. Алексеева. – Н.Новгород, 2014. – 697с.
11. Овсянников Л.В. Групповой анализ дифференциальных уравнений. – М.: Наука, 1978. – 400с.
12. Олвер П. Приложения групп Ли к дифференциальным уравнениям. – М.: Мир, 1989. – 639 с.
13. Павловский Ю.Н. Декомпозиция моделей управляемых систем. – М.: Знание, 1985. – 32 с.
14. Павловский Ю.Н. Групповые свойства управляемых динамических систем и фазовые организационные структуры. – Ж. вычислительной математики и математической физики, 1974, 14, №4. – 862 – 872 с.
15. Павловский Ю.Н. К вопросу об агрегатировании и построении иерархических управляющих структур для одного класса сложных систем. - Ж. вычислительной математики и математической физики, 1971, 11, №6. – 1510-1520 с.
16. Динамика системы «дорога – шина – автомобиль – водитель» /А.А. Хачатуров, В.Л. Афанасьев, В.С. Васильев [и др.]; под ред. А.А. Хачатурова. – М.: Машиностроение, 1976. – 535с.
17. Фурунжиев Р.И. Автоматизированное проектирование колебательных систем. – Мн.: Высшая школа, 1977. – 452 с.
18. Фурунжиев Р.И., Останин А.Н. Управление колебаниями многоопорных машин. – М.: Машиностроение, 1984. – 208 с.
19. Беляков, В.В. Концепция подвижности наземных транспортно-технологических машин / В.В. Беляков и др. // Труды НГТУ им. Р.Е. Алексеева – Н.Новгород, 2013. №3(100) С. 145-175

20. Беляков, В.В. Подвижность наземных транспортно-технологических машин / В.В. Беляков и др. // Труды НГТУ им. Р.Е. Алексеева – Н. Новгород, 2013. №4(101) С. 72-77

References

1. Aksenov P.V. *Mnogoosnye avtomobili.* – 2-e izd., pererab. i dop. – M.: Mashinostroenie, 1989. – 280 s.
2. Ganiev R.F., Kononenko V.O. *Kolebanija tverdyh tel.* – M.: Nauka, 1976. – 431 s.
3. Goldstejn G. *Klassicheskaja mehanika.* – M.: Nauka, 1975. – 415 s.
4. Elkin V.I. *Redukcija nelinejnyh upravljaemyh sistem: differencial'no – geometricheskij podhod.* – M.: Nauka, 1997. – 317 s.
5. Zhuravlev V.F., Klimov D.M. *Prikladnye metody v teorii kolebanij.* – M.: Nauka, 1988. – 328 s.
6. Ibragimov N.H. *Azbuka gruppovogo analiza.* – M.: Znanie, 1989. – 48 s.
7. Smirnov, G.A. *Teorija dvizhenija koljosnyh mashin: ucheb. dlja studentov mashinostroitel'nyh special'nostej vyzov / G.A. Smirnov.* – 2-e izd., dop. i pererab. – M.: Mashinostroenie, 1990. – 352 s.
8. Tarasik, V.P. *Teorija dvizhenija avtomobilja: ucheb. dlja vuzov / V.P. Tarasik.* – SPb.: BHV-Peterburg, 2006. – 476 s.
9. Larin V.V. *Teorija dvizhenija polnoprivodnyh kolesnyh mashin: ucheb./ V.V. Larin.* – M.: Izd-vo MGTU im. N.Je. Baumana, 2010. – 392.
10. Kravec V.N. *Teorija dvizhenija avtomobilja: ucheb./ V.N. Kravec; NGTU im. R.E. Alekseeva.* – N.Novgorod, 2014. – 697s.
11. Ovsjannikov L.V. *Grupповый анализ differencial'nyh uravnenij.* – M.: Nauka, 1978. – 400s.
12. Olver P. *Prilozhenija grupp Li k differencial'nym uravnenijam.* – M.: Mir, 1989. – 639 s.
13. Pavlovskij Ju.N. *Dekompozicija modelej upravljaemyh sistem.* – M.: Znanie, 1985. – 32 s.
14. Pavlovskij Ju.N. *Grupповые свойства upravljaemyh dinamicheskikh sistem i fazovye organizacionnye struktury.* – Zh. vychislitel'noj matematiki i matematicheskoy fiziki, 1974, 14, №4. – 862 – 872 s.
15. Pavlovskij Ju.N. *K voprosu ob agregatirovanii i postroenii ierarhicheskikh upravljajushih struktur dlja odnogo klassa slozhnyh sistem.* - Zh. vychislitel'noj matematiki i matematicheskoy fiziki, 1971, 11, №6. – 1510-1520 s.
16. *Dinamika sistemy «doroga – shina – avtomobil' – voditel'» /A.A. Hachaturov, V.L. Afanas'ev, V.S. Vasil'ev [i dr.]; pod red. A.A. Hachaturova.* – M.: Mashinostroenie, 1976. – 535s.
17. Furunzhiev R.I. *Avtomatizirovanoe proektirovanie kolebatel'nyh sistem.* – Mn.: Vyshejschaja shkola, 1977. – 452 s.
18. Furunzhiev R.I., Ostanin A.N. *Upravlenie kolebanijami mnogoopornyh mashin.* – M.: Mashinostroenie, 1984. – 208 s.
19. Beljakov, V.V. *Koncepcija podvizhnosti nazemnyh transportno-tehnologicheskikh mashin / V.V. Beljakov i dr. // Trudy NGTU im. R.E. Alekseeva – N.Novgorod, 2013. №3(100) S. 145-175*
20. Beljakov, V.V. *Podvizhnost' nazemnyh transportno-tehnologicheskikh mashin / V.V. Beljakov i dr. // Trudy NGTU im. R.E. Alekseeva – N. Novgorod, 2013. №4(101) S. 72-77*