УДК 338.436.33

UDC 338.436.33

05.13.18 - Математическое моделирование, численные методы и комплексы программ (технические науки)

Mathematical modeling, numerical methods and program complexes (technical sciences)

ПОВЫШЕНИЕ НАДЕЖНОСТИ ЭЛЕМЕНТОВ КОНСТРУКЦИЙ СОВЕРШЕНСТВОВАНИЕМ АКУСТИЧЕСКИХ МЕТОДОВ ОПРЕДЕЛЕНИЯ ДЕФЕКТОВ[1]

IMPROVING THE RELIABILITY OF DESIGN ELEMENTS BY IMPROVING ACOUSTIC METHODS FOR DEFECTS DEFINITIONS

Аршинов Георгий Александрович
д. т. н., профессор

Лойко Валерий Иванович
заслуженный деятель науки РФ,
д. т. н., профессор

Лаптев Владимир Николаевич
к. т. н., доцент

Кубанский государственный аграрный университет, Краснодар, Россия

Arshinov Georgiy Aleksandrovich
Dr.Sci.Tech., Professor

Loyko Valery Ivanovich
honored scientist of the Russian Federation,
Dr. Sci.Tech., professor

Laptev Vladimir Nikolaevich
Dr.Sci.Tech., associate professor

Kuban State Agrarian University, Krasnodar, Russia

Строительные, водо-, нефте-, газопроводные объекты должны обладать прочностью, обеспечивающей безаварийную работу в течение всего срока их эксплуатации, что определяет экономическую и эксплуатационную надежность сооружений. Прочность может существенно снижаться, если в материале элементов конструкций будут присутствовать скрытые микродефекты. В области таких нарушений структуры может развиваться аварийное разрушение материала, приводящее к потере несущей способности элементов конструкций, сопровождающееся огромными экономическими потерями, ухудшением экологии и в худшем случае – человеческими жертвами. Поэтому необходимо совершенствовать методы акустики для выявления микродефектов, используя более строгие математические модели нелинейных деформационных волн в элементах стержневых конструкций. При этом нужен учет реальных физико-механических параметров, приводящих к более точным характеристикам деформационных волн, необходимых для акустических методов дефектоскопии материалов

Construction, water, oil, and gas pipeline facilities must have strength that ensures trouble-free operation throughout their entire service life, which determines the economic and operational reliability of structures. Strength can be significantly reduced if hidden microdefects are present in the material of structural elements. In the area of such structural disturbances, an emergency destruction of the material can develop, leading to a loss of the bearing capacity of structural elements, accompanied by huge economic losses, environmental degradation and, in the worst case, human casualties. Therefore, it is necessary to improve acoustic methods for detecting microdefects, using more rigorous mathematical models of nonlinear deformation waves in the elements of rod structures. In this case, it is necessary to take into account the real physical and mechanical parameters, leading to more accurate characteristics of deformation waves, which are necessary for acoustic methods of material flaw detection

Ключевые слова: СТРОИТЕЛЬНЫЕ СООРУЖЕНИЯ, ЭКОНОМИЧЕСКАЯ И ЭКСПЛУАТАЦИОННАЯ НАДЕЖНОСТЬ, СТЕРЖЕНЬ, СКРЫТЫЕ МИКРОДЕФЕКТЫ, ПРОЧНОСТЬ, АКУСТИЧЕСКАЯ ДИАГНОСТИКА, НЕЛИНЕЙНЫЕ ВОЛНЫ, ВЯЗКОУПРУГОСТЬ, УРАВНЕНИЯ ДВИЖЕНИЯ, ЭВОЛЮЦИОННЫЕ УРАВНЕНИЯ

Keywords: CONSTRUCTION STRUCTURES, ECONOMIC AND OPERATIONAL RELIABILITY, ROD, HIDDEN MICRODEFECTS, STRENGTH, ACOUSTIC DIAGNOSTICS, NONLINEAR WAVES, VISCOELASTIC, EQUATIONS OF MOVEMENT, EVOLUTION

[1]Статья выполнена по гранту РФФИ 19-010-00385 А «Повышение экономической и эксплуатационной надежности строительных и водо-, нефте-, газопроводных сооружений путем совершенствования неразрушающих акустических методов диагностики»

DOI: http://dx.doi.org/10.21515/1990-4665-161-003

Рост экономики России определяется не только созданием новых, но и стабильной, безаварийной работой уже эксплуатируемых строительных сооружений. Их экономическая и эксплуатационная надежность в значительной степени зависит от прочности вязкоупругих тонкостенных элементов конструкций – стержней, опор, балок, широко применяемых при строительстве.

Прочность элементов конструкций существенно снижается за счет присутствия в материале скрытых микродефектов, наличие которых может приводить к потере несущей способности, вызывать разрушение сооружений, сопровождающееся экономическим ущербом, нарушением экологии.

Необходимо совершенствование методов акустики для выявления микродефектов применением более уточненных математических моделей деформационных нелинейных волн в стержнях с учетом их реальных вязкоупругих свойств для нахождения точных волновых характеристик, существенно используемых в неразрушающей акустической дефектоскопии.

Экспериментальные замеры скорости волны деформации в стержнях методами нелинейной акустически и сравнение полученных результатов с теоретически определенными величинами скоростей позволяют точнее прогнозировать наличие микродефектов материала, в области которых может развиваться прогрессирующее аварийное разрушение элементов конструкций под действием нагрузки.

Теоретическое обоснование вычисления уточненных величин скорости деформационных волн в стержнях с учетом их наследственно-реологических свойств.

Математическое моделирование выполняется с применением строгих методов механики деформируемого твердого тела для задания полей перемещения точек среды, тензора конечных деформаций Грина, вариационного принципа, моделей теории ползучести материалов, методов возмущений с асимптотическими подходами нелинейной динамики.

Многие среды проявляют свойство линейной упругости объемного деформирования, а вязкоупругая наследственность свойственна деформациям сдвига. В целях исследования деформационных волн в тонкостенных конструкциях, изготовленных из материалов, имеющих такие свойства, выберем бесконечный стержень, с равными поперечными сечениями, на который не действуют внешние силы.

Направим ось x по линии центров тяжести сечений стержня, а оси y и z выберем в поперечном сечении и опишем перемещения его точек соотношениями

$$u_1 = u(x,t)\,;\; u_2 = -\nu y u_x\,;\; u_3 = -\nu z u_x\,, \tag{1}$$

Опираясь на тензор Грина, вычислим деформации точек поперечного сечения стержня:

$$\varepsilon_{ij} = \frac{1}{2}(u_{i,j} + u_{j,i} + u_{k,i}u_{k,j})\,. \tag{2}$$

С учетом линейной упругости объемных деформаций наследственные вязкоупругие свойства материала стержня опишем с помощью соотношений линейной теории вязкоупругости вида:

$$s_{ij}(t) = 2\mu[e_{ij}(t) - \alpha\int_{-\infty}^{t} e^{-\beta(t-\tau)} e_{ij}(\tau)]d\tau\,.$$
$$\sigma(t) = K\theta(t) \tag{3}$$

Разлагаем по степеням $(t-\tau)$ функцию $f(\tau) = e_{ij}(\tau)$, для этого воспользуемся рядом Тейлора, перейдем от интегрального оператора в (3) к дифференциальному

$$\sigma_{ij} = \tilde{\lambda}\theta\delta_{ij} + 2\tilde{\mu}\varepsilon_{ij},$$

(4)

где введены обозначения $\tilde{\lambda} = \lambda - \dfrac{2\mu}{3}$, $2\tilde{\mu} = 2\mu(1+p)$.

Применяя оператор $p = \dfrac{\alpha}{\beta^2}\dfrac{\partial}{\partial t} - \dfrac{\alpha}{\beta}$ к функции f(t), получаем $pf = \dfrac{\alpha}{\beta^2} f_t - \dfrac{\alpha}{\beta} f$.

Компоненты девиатора деформаций задаются уравнениями

$$e_{11} = \frac{2(1+\nu)}{3} u_x + \frac{1}{3}(1-\nu^2)u_x^2 + \frac{\nu^2 r^2}{3} u_{xx}^2;$$

$$e_{22} = -\frac{1}{3}(1+\nu)u_x - \frac{1}{6}(1-\nu^2)u_x^2 - \frac{\nu^2 r^2}{6} u_{xx}^2;$$

(5)

$$e_{12} = -\frac{\nu y}{2} u_{xx} + \frac{\nu^2 y}{2} u_x u_{xx}, \quad e_{13} = -\frac{\nu z}{2} u_{xx} + \frac{\nu^2 z}{2} u_x u_{xx}.$$

где $r^2 = z^2 + y^2$.

Запишем выражения для вариаций деформаций

$$\delta\varepsilon_{11} = \delta u_x + u_x \delta u_x + \nu^2 r^2 u_{xx} \delta u_{xx}; \qquad \delta\varepsilon_{22} = \delta\varepsilon_{33} = (-\nu + \nu^2 u_x)\delta u_x;$$

$$\delta\varepsilon_{12} = -\frac{\nu y}{2}\delta u_{xx} + \frac{\nu^2 y}{2}(u_{xx}\delta u_x + u_x \delta u_{xx});$$

$$\delta\varepsilon_{13} = -\frac{\nu z}{2}\delta u_{xx} + \frac{\nu^2 z}{2}(u_{xx}\delta u_x + u_x \delta u_{xx}) \quad (6)$$

и перейдем к операторной форме:

$$\delta\varepsilon_{11} = [-\frac{\partial}{\partial x} - u_x \frac{\partial}{\partial x} + \nu^2 r^2 u_{xx}\frac{\partial^2}{\partial x^2}]\delta u;$$

$$\delta\varepsilon_{22} = \delta\varepsilon_{33} = [\nu\frac{\partial}{\partial x} - \nu^2 u_x \frac{\partial}{\partial x}]\delta u;$$

$$\delta\varepsilon_{12} = [-\frac{\nu y}{2}\frac{\partial^2}{\partial x^2} - \frac{\nu^2 y}{2} u_{xx}\frac{\partial}{\partial x} + \frac{\nu^2 y}{2} u_x \frac{\partial^2}{\partial x^2}]\delta u;$$

(7)

$$\delta\varepsilon_{13} = [-\frac{\nu z}{2}\frac{\partial^2}{\partial x^2} - \frac{\nu^2 z}{2}u_{xx}\frac{\partial}{\partial x} + \frac{\nu^2 z}{2}u_x\frac{\partial^2}{\partial x^2}]\delta u\,.$$

Вариацию внутренней энергии найдем из формулы

$$\delta W = \sigma_{11}\delta\varepsilon_{11} + 2\sigma_{22}\delta\varepsilon_{22} + 2\sigma_{12}\delta\varepsilon_{12} + 2\sigma_{13}\delta\varepsilon_{13}\,,$$

В итоге придем к равенству

$$\delta W = \{-[\tilde{\lambda}(1-2\nu) + 2\tilde{\mu} - 2\nu(1-2\nu)\tilde{\lambda} - 2\tilde{\mu}\nu)]u_{xx} + \tilde{\mu}\nu^2 r^2 u_{xxxx} -$$
$$-(B_1 + 2A_1 - 2\nu B_2 + 4\nu^2 A_2)u_x u_{xx} - [\tilde{\lambda} + 2\tilde{\mu} - 2\nu\tilde{\lambda} - 2\tilde{\mu}\nu]\nu^2 r^2 u_{xx}u_{xxxx} +$$
$$+\nu^2 r^2 (A_1 - 2\tilde{\mu}\nu)(u_x u_{xx})_{xx} - (\frac{3B_1}{2} + 3\nu^2 B_2)u_x^2 u_{xx} - \frac{1}{2}\nu^2 r^2[(\tilde{\lambda} + 2\tilde{\mu}) +$$
$$+2\nu^2\tilde{\lambda} + 2\tilde{\mu}\nu^2](u_x u_{xx}^2)_x + \frac{\nu^2 r^2}{2}(B_1 + 2\tilde{\mu}\nu^2)(u_x^2 u_{xx})_{xx} +$$
$$+\frac{\nu^4 r^4}{2}(\tilde{\lambda} + 2\tilde{\mu})(u_{xx}^3)_{xx}\}\delta u\,,$$

где $A_1 = a(2\nu^3 - \nu + 1)$; $B_1 = a\nu(2\nu - 2\nu^2 + 1)$; $A_2 = a\nu^2(1-\nu)$;

$B_2 = a\nu^3$; $a = \dfrac{1}{2(1+\nu)(1-2\nu)}$; $r^2 = z^2 + y^2$.

На основе вариационного принципа

$$\delta J = \int_{t_1}^{t_2} dt \iiint_V \{\rho\dot{u}_i\delta\dot{u}_i - \sigma_{ij}\delta\varepsilon_{ij}\}dV = 0 \qquad (8)$$

установим уравнение движения стержня

$$\rho(-u_{tt} + \nu^2 r^2 u_{ttxx}) + N_1 u_{xx} - \tilde{\mu}\nu^2 r^2 u_{xxxx} + N_2 u_x u_{xx} +$$
$$+\nu^2 r^2 N_3 u_{xx}u_{xxx} - \nu^2 r^2 N_4 (u_x u_{xx})_{xx} + N_5 u_x^2 u_{xx} +$$

(9)

$$+\frac{1}{2}\nu^2 r^2 N_6 (u_x u_{xx}^2)_x - \frac{1}{2}\nu^2 r^2 N_7 (u_x^2 u_{xx})_{xx} -$$
$$-\frac{1}{2}\nu^4 r^4 N_8 ((u_{xx})^3)_{xx} = 0\,,$$

где

$$N_1=\tilde{\lambda}(1-2\nu)^2+2\tilde{\mu}(1+2\nu^2)\,;\;\; N_2=3(1-2\nu)(1+2\nu^2)\tilde{\lambda}+6\tilde{\mu}(1-2\nu^3);$$

$$N_3=(1-2\nu)\tilde{\lambda}+2\tilde{\mu}(1-\nu)\,;\;\; N_4=\tilde{\lambda}(1-2\nu)+2\tilde{\mu}(1-2\nu);$$

$$N_5=\frac{3}{2}\tilde{\lambda}(1+2\nu^2)^2+3\tilde{\mu}(1-2\nu^4);\;\; N_6=(1+2\nu^2)\tilde{\lambda}+2\tilde{\mu}(1+\nu^2);$$

$$N_7=(1+2\nu^2)\tilde{\lambda}+2\tilde{\mu}(1+\nu^2)\,;\;\; N_8=\tilde{\lambda}+2\tilde{\mu}\,.$$

Методами возмущения упростим (9). Сначала преобразуем выражение к безразмерным переменным

$$\xi=\frac{x}{L}-\frac{c}{L}t;\quad \tau=\varepsilon\frac{c}{L}t\,;\quad u^*=\frac{u}{A}\,.$$

(10)

Допустим, что характерная длина волны L существенно больше, чем амплитуда A деформационной волны. Полагаем, что значение ε мало, а реологические константы α,β и характерный диаметр стержня такие, что определяют отношения порядков

$$\frac{\alpha c}{\beta^2 L}=O(\varepsilon)\,;\qquad \frac{d}{L}=O(\sqrt{\varepsilon})\,.$$

(11)

Применим асимптотическое разложение

$$u=u_0+\varepsilon u_1+\ldots \qquad .$$

(12)

Придем к уравнению движения стержня

$$\frac{\rho c^2}{E}[-\frac{A}{e^2}(u_{\xi\xi}-2\varepsilon u_{\xi\tau}+\varepsilon^2 u_{\tau\tau})+\nu^2\varepsilon I\frac{A}{e^2}(u_{\xi\xi\xi\xi}-2\varepsilon u_{\xi\xi\xi\tau}+\varepsilon^2 u_{\xi\xi\tau\tau})]+$$

$$+(1-\frac{\alpha a_0}{\beta})\frac{A}{e^2}u_{\xi\xi}-b(1-\frac{\alpha}{\beta})\frac{A}{e^4}u_{\xi\xi\xi\xi}+(3-\frac{\alpha a_3}{\beta})\frac{A^2}{e^3}u_{\xi}u_{\xi\xi}+$$

$$+\frac{\alpha c}{\beta^2 e}(\varepsilon\frac{\partial}{\partial\tau}-\frac{\partial}{\partial\xi})[a_0\frac{A}{e^2}u_{\xi\xi}-\frac{bA}{e^4}u_{\xi\xi\xi\xi}+\frac{a_3A^2}{e^3}u_{\xi}u_{\xi\xi}]=0\,,$$

Выполнив преобразования, приходим к уравнению

$$\frac{\rho c^2}{E}[-u_{\xi\xi}+2\varepsilon u_{\xi\tau}-\varepsilon^2 u_{\tau\tau}+\varepsilon\nu^2 I(u_{\xi\xi\xi\xi}-2\varepsilon u_{\xi\xi\xi\tau}+\varepsilon^2 u_{\xi\xi\tau\tau})]+$$

$$+(1-\frac{\alpha a_0}{\beta})u_{\xi\xi}-\frac{\varepsilon\nu^2 I}{2(1+\nu)}(1-\frac{\alpha}{\beta})u_{\xi\xi\xi\xi}+\varepsilon(3-\frac{\alpha a_3}{\beta})u_{\xi}u_{\xi\xi}+$$

$$+\frac{\alpha c}{\beta^2 l}(\varepsilon\frac{\partial}{\partial\tau}-\frac{\partial}{\partial\xi})\cdot[a_0 u_{\xi\xi}-\frac{\varepsilon\nu^2 I}{2(1+\nu)}u_{\xi\xi\xi\xi}+\varepsilon a_3 u_{\xi}u_{\xi\xi}]=0\,.$$

С учетом (11) и (12) в нулевом приближении получим

$$\left[-\frac{\rho c^2}{E}+\left(1-\frac{\alpha a_1}{\beta}\right)\right]u_{0\xi\xi}=0\,.$$

(13)

В (13) $a_1=\frac{2}{3}(1+\nu)$. Имеем $u_{0\xi\xi}\neq 0$, поэтому из (13) получаем выражение скорости деформационной волны в стержне

$$c=\sqrt{\frac{E}{\rho}[1-\frac{2\alpha(1+\nu)}{3\beta}]}\,.$$

(14)

Из первого приближения для вычисления u_1 в (12) выводим уравнение Кортевега де Вриза – Бюргерса:

$$\psi_{\tau}+b_1\psi\psi_{\xi}+b_2\psi_{\xi\xi}+b_3\psi_{\xi\xi\xi}=0\,,$$

(15)

где

$$\psi=u_{0\xi};\qquad b_1=\frac{E(3\beta-\alpha a_2)}{2\rho c^2\beta};\quad b_2=-\frac{E\alpha a_1}{2\rho c\beta^2 l\varepsilon};$$

$$a_2=2(1-\nu^2);\qquad b_3=\nu^2 I[\frac{1}{2}-\frac{E(\beta-\alpha)}{4\rho c^2\beta(1+\nu)}].$$

Перейдем к рассмотрению физически и геометрически нелинейного стержня, как и в линейном случае используя кинематические соотношения (1) для определения конечных деформаций стержня по формулам (2).

Учитывая, что объемные деформации линейно-упругие, применим уравнения состояния нелинейной наследственности в виде

$$\sigma_{ij}(t) = \lambda\theta\delta_{ij} + 2\mu\varepsilon_{ij} - 2\mu\alpha\int_{-\infty}^{t} e^{-\beta(t-\tau)}[1+\gamma\varepsilon_u^2(\tau)]e_{ij}(\tau)d\tau,$$

(16)

Для упрощения исследования применим разложение по степеням $(t-\tau)$ $f(\tau)=[1+\gamma\varepsilon_u^2(\tau)]e_{ij}(\tau)$ в ряд Тейлора.

Оставим в ряде два слагаемых разложения, что соответствует большим значениям произведения $\beta \cdot t$, получим выражения

$$\sigma_{ij} = \tilde{\lambda}\theta\delta_{ij} + 2\tilde{\mu}\varepsilon_{ij} + 2\gamma\mu p(\varepsilon_u^2 e_{ij}),$$

(17)

где $\tilde{\lambda} = \lambda - \frac{2\mu}{3}p$; $\tilde{\mu} = \mu(1+p)$; $p = \frac{\alpha}{\beta^2}\frac{\partial}{\partial t} - \frac{\alpha}{\beta}$.

Вычислим компоненты девиатора деформаций и их вариации соответственно по формулам (5), (6) и запишем вариацию внутренней энергии $\delta W = \sigma_{11}\delta\varepsilon_{11} + 2\sigma_{22}\delta\varepsilon_{22} + 2\sigma_{12}\delta\varepsilon_{12} + 2\sigma_{13}\delta\varepsilon_{13}$.

Линейная часть вариации δW определяется формулой

$$\delta W_л = \{-[\tilde{\lambda}(1-2\nu) + 2\tilde{\mu} - 2\nu((1-2\nu)\tilde{\lambda} - 2\mu\nu)]u_{xx} + 2\tilde{\mu}\frac{\nu^2 r^2}{2}u_{xxxx}]\delta u .$$

а нелинейная –

$$\delta W_н = \{-B_1 u_x u_{xx} - \nu^2 r^2(\tilde{\lambda} + 2\tilde{\mu})u_{xx}u_{xxx} - 2\mu\gamma p(\varepsilon_u^2 e_{11})_x - 2A_1 u_x u_{xx} -$$

$$-\frac{3}{2}B_1 u_x^2 u_{xx} - \frac{\nu^2 r^2}{2}(\tilde{\lambda} + 2\tilde{\mu})(u_x u_{xx}^2)_x - 2\mu\gamma p(\varepsilon_u^2 e_{11}u_x)_x +$$

$$+\nu^2 r^2 A_1(u_x u_{xx})_{xx} + \nu^2 r^2\frac{B_1}{2}(u_x^2 u_{xx})_{xx} + \frac{\nu^4 r^4}{2}(\tilde{\lambda} + 2\tilde{\mu})(u_{xx}^3)_{xx} +$$

$$+\nu^2 r^2 2\mu\gamma p(\varepsilon_u^2 e_{11}u_{xx})_{xx} + 2[\nu B_2 u_x u_{xx} + \nu^3 r^2\tilde{\lambda}u_{xx}u_{xxx} + 2\mu\nu\gamma p(\varepsilon_u^2 e_{22})_x -$$

$$-2\nu^2 A_2 u_x u_{xx} - \frac{3\nu^2}{2}B_2 u_x^2 u_{xx} - \frac{\nu^4 r^2}{2}\tilde{\lambda}(u_x u_{xx}^2)_x - 2\nu^2\mu\gamma p(\varepsilon_u^2 e_{22}u_x)_x] -$$

$$-2\tilde{\mu}\frac{\nu^3 r^2}{2}(u_x u_{xx})_{xx} - 2\mu\gamma p\nu y(\varepsilon_u^2 e_{12})_{xx} + \tilde{\mu}\nu^3 r^2 2u_{xx}u_{xxx} -$$

$$-2\tilde{\mu}\frac{\nu^4 r^2}{2}(u_x u_{xx}^2)_x - 2\mu\gamma p\nu^2 y(\varepsilon_u^2 e_{12}u_{xx})_x - \mu\nu^3 r^2(u_x u_{xx})_{xx} +$$

$$+2\tilde{\mu}\frac{\nu^4 r^2}{2}(u_x^2 u_{xx})_{xx} + 2\mu\gamma p\nu^2 y(\varepsilon_u^2 e_{12}u_x)_{xx} - 2\mu\gamma p\nu z(\varepsilon_u^2 e_{13})_{xx} -$$

$$-2\mu\gamma p\nu^2 z(\varepsilon_u^2 e_{13}u_{xx})_x + 2\mu\gamma p\nu^2 z(\varepsilon_u^2 e_{13}u_x)_{xx}\}\delta u,$$

где обозначено

$$A_1 = \tilde{\lambda}(1-2\nu) + 2\tilde{\mu}; \qquad B_1 = (1+2\nu)\tilde{\lambda} + 2\tilde{\mu};$$

$$A_2 = (1-2\nu)\tilde{\lambda} + 2\tilde{\mu}\nu; \qquad B_2 = (1+2\nu^2)\tilde{\lambda} + 2\tilde{\mu}\nu^2.$$

Полная вариация внутренней энергии

$$\delta W = \{-N_1 u_{xx} + \tilde{\mu}\nu^2 r^2 u_{xxxx} - N_2 u_x u_{xx} - \nu^2 r^2 N_3 u_{xx} u_{xxx} +$$

$$+\nu^2 r^2 N_4 (u_x u_{xx})_{xx} - N_5 u_x^2 u_{xx} - \frac{\nu^2 r^2}{2} N_6 (u_x u_{xx}^2)_x + \frac{\nu^2 r^2}{2} N_7 (u_x^2 u_{xx})_{xx} +$$

$$+\frac{\nu^4 r^4}{2} N_8 (u_{xx}^3)_{xx} - 2\mu\gamma p[(\varepsilon_u^2)_x (e_{11} - 4\nu e_{22} + e_{11}u_x + 2\nu^2 e_{22}u_x +$$

$$+\nu^2 y e_{12}u_{xx} + \nu^2 z e_{13}u_{xx}) + \varepsilon_u^2 (e_{11} - 4\nu e_{22} + e_{11}u_x + 2\nu^2 e_{22}u_x +$$

$$+\nu^2 y e_{12}u_{xx} + \nu^2 z e_{13}u_{xx})_x + \frac{\partial}{\partial x}((\varepsilon_u^2)_x (\nu y e_{12} + \nu z e_{13} - \nu^2 r^2 e_{11}u_{xx} -$$

$$-\nu^2 y e_{12}u_x - \nu^2 z e_{13}u_x) + \varepsilon_u^2 (\nu y e_{12x} + \nu z e_{13x} - \nu^2 r^2 (e_{11}u_{xx})_x -$$

$$-\nu^2 y (e_{12}u_x)_x - \nu^2 z (e_{13}u_x)_x))]\}\delta u,$$

где

$$N_1 = \tilde{\lambda}(1-2\nu)^2 + 2\tilde{\mu}(1+2\nu^2); \; N_2 = 3(1-2\nu)(1+2\nu^2)\tilde{\lambda} + 6\tilde{\mu}(1-2\nu^3);$$

$$N_3 = (1-2\nu)\tilde{\lambda} + 2\tilde{\mu}(1-\nu); \quad N_4 = \tilde{\lambda}(1-2\nu) + 2\tilde{\mu}(1-2\nu);$$

$$N_5 = \frac{3}{2}\tilde{\lambda}(1+2\nu^2)^2 + 3\tilde{\mu}(1-2\nu^4); \; N_6 = (1+2\nu^2)\tilde{\lambda} + 2\tilde{\mu}(1+\nu^2);$$

$$N_7 = (1+2\nu^2)\tilde{\lambda} + 2\tilde{\mu}(1+\nu^2); \; N_8 = \tilde{\lambda} + 2\tilde{\mu}.$$

Подставим δW в формулу (8) и проинтегрируем по области поперечного сечения. Учитывая, что вариации δu – произвольны, получим уравнение движения стержня:

$$\rho(-u_{tt} + \nu^2 r^2 u_{ttxx}) + N_1 u_{xx} - \tilde{\mu}\nu^2 I u_{xxxx} + N_2 u_x u_{xx} + \nu^2 r^2 N_3 u_{xx} u_{xxx} -$$

$$-\nu^2 r^2 N_4 (u_x u_{xx})_{xx} + N_5 u_x^2 u_{xx} +$$

$$\frac{1}{2}\nu^2 r^2 N_6 (u_x u_{xx}^2)_x - \frac{1}{2}\nu^2 r^2 N_7 (u_x^2 u_{xx})_{xx} -$$

$$-\frac{1}{2}\nu^4 r^4 N_8 (u_{xx}^3)_{xx} + 2\mu\gamma\rho\{\frac{\partial}{\partial x}[\frac{1}{3}(1+u_x)(2(1+\nu)u_x + (1-\nu^2)u_x^2 -$$

$$+\frac{1}{2}(1-\nu^2)u_x^2)(2\nu^2 u_x - 4\nu))Q + ((\frac{1}{3}\nu^2 u_{xx}^2 (1+u_x) - \frac{1}{6}\nu^2 u_{xx}^2 (2\nu^2 u_x -$$

$$-4\nu) + \frac{1}{2}\nu^2 (\nu^2 u_x u_{xx}^2 - \nu u_{xx}^2)) \cdot Q] +$$

$$[(-\frac{1}{3}\nu^2 u_{xx} (2(1+\nu)u_x + (1-\nu^2)u_x^2) +$$

$$+\frac{1}{2}(\nu - \nu^2 u_x) \cdot (\nu^2 u_x u_{xx} - \nu u_{xx})) \cdot Q -$$

$$\frac{1}{2}\nu^4 r^4 N_8 (u_{xx}^3)_{xx} + 2\mu\gamma\rho\{\frac{\partial}{\partial x}[(\frac{1}{3}(1+u_x) +$$

$$+\frac{1}{3}\nu^4 u_{xx}^3 Q]_{xx}\} = 0,$$

(18)

где

$$Q = R_1 + R_2 + R_3; \quad R_1 = \frac{1}{3}[2(1+\nu)u_x + (1-\nu^2)u_x^2]^2; \quad R_3 = \frac{1}{3}\nu^4 u_{xx}^4;$$

$$R_2 = \frac{2}{3}\nu^2 u_{xx}^2 [2(1+\nu)u_x + (1-\nu^2)u_x^2]^2 + (\nu^2 u_x u_{xx} - \nu u_{xx})^2.$$

Заменим функцию u, используя асимптотическое разложение (12), в результате получим уравнение движения физически и геометрически нелинейного стержня:

$$\frac{\rho c^2}{E}[-\frac{A}{e^2}(u_{\xi\xi} - 2\varepsilon u_{\xi\tau} + \varepsilon^2 u_{\tau\tau}) + \nu^2 \varepsilon I \frac{A}{e^2}(u_{\xi\xi\xi\xi} - 2\varepsilon u_{\xi\xi\xi\tau} + \varepsilon^2 u_{\xi\xi\tau\tau})] +$$

$$+(1 - \frac{\alpha a_0}{\beta})\frac{A}{e^2}u_{\xi\xi} - b(1 - \frac{\alpha}{\beta})\frac{A}{e^4}u_{\xi\xi\xi\xi} + (3 - \frac{\alpha a_3}{\beta})\frac{A^2}{e^3}u_\xi u_{\xi\xi} -$$

$$-\frac{\alpha}{\beta}\gamma a_1 \frac{A^3}{e^4}u_\xi^2 u_{\xi\xi} + \frac{\alpha c}{\beta^2 e}(\varepsilon\frac{\partial}{\partial\tau} - \frac{\partial}{\partial\xi})[a_0 \frac{A}{e^2}u_{\xi\xi} - \frac{bA}{e^4}u_{\xi\xi\xi\xi} +$$

$$+\frac{a_3A^2}{e^3}u_\xi u_{\xi\xi}+\frac{\gamma a_1A^3}{e^4}u_\xi^2u_{\xi\xi}]=0$$

или

$$\frac{\rho c^2}{E}[-u_{\xi\xi}+2\varepsilon u_{\xi\tau}-\varepsilon^2u_{\tau\tau}+\varepsilon\nu^2I(u_{\xi\xi\xi\xi}-2\varepsilon u_{\xi\xi\xi\tau}+\varepsilon^2u_{\xi\xi\tau\tau})]+$$

$$+(1-\frac{\alpha a_0}{\beta})u_{\xi\xi}-\frac{\varepsilon\nu^2I}{2(1+\nu)}(1-\frac{\alpha}{\beta})u_{\xi\xi\xi\xi}+\varepsilon(3-\frac{\alpha a_3}{\beta})u_\xi u_{\xi\xi}+$$

$$+\frac{\alpha c}{\beta^2 l}(\varepsilon\frac{\partial}{\partial\tau}-\frac{\partial}{\partial\xi})\cdot[a_0u_{\xi\xi}-\frac{\varepsilon\nu^2I}{2(1+\nu)}u_{\xi\xi\xi\xi}+\varepsilon a_3u_\xi u_{\xi\xi}]+$$

$$+\varepsilon^2\gamma a_1u_\xi^2u_{\xi\xi}]=0,$$

где

$$a_0=\frac{2(1+\nu)}{3};\; a_3=\frac{-4\nu^3-2\nu^2+2\nu+8}{3(1+\nu)};\quad b=\frac{\nu^2I}{2(1+\nu)}.$$

После преобразований в нулевом приближении придем к формуле

$$[-\frac{\rho c^2}{E}+(1-\frac{\alpha a_1}{\beta})]u_{0\xi\xi}=0, \tag{19}$$

где E – модуль упругости материала стержня; $a_1=\frac{2}{3}(1+\nu)$.

Из (19) следует, что

$$c=\sqrt{\frac{E}{\rho}[1-\frac{2\alpha}{3\beta}(1+\nu)]}.$$

По первому приближению получаем модифицированное уравнение Кортевега де Вриза – Бюргерса:

$$\psi_\tau+b_1\psi\psi_\xi-b_2\psi^2\psi_\xi+b_3\psi_{\xi\xi}+b_4\psi_{\xi\xi\xi}=0, \tag{20}$$

где

$$\psi=u_{0\xi};\qquad b_1=m(3-\frac{\alpha a_2}{\beta});\quad m=\frac{E}{2\rho c^2};$$

$$b_2 = \frac{m\alpha\gamma\varepsilon a_3}{\beta}; \qquad b_3 = -\frac{m\alpha c a_1}{\beta^2 L\varepsilon}; \qquad b_4 = m\nu^2 I[\frac{1}{2m} - \frac{\beta-\alpha}{2\beta(1+\nu)}];$$

$$a_2 = 2(1-\nu^2); \qquad a_3 = \frac{8}{3}(1+\nu^2)(1+2\nu).$$

Таким образом, для повышения экономической и эксплуатационной надежности проектируемых строительных сооружений совершенствованием акустической диагностики невидимых микродефектов материалов тонкостенных элементов конструкций разработаны новые математические модели для описания деформационных волн в стержнях, материал которых обладает свойствами нелинейной ползучести.

Установлены уточненные зависимости между геометрическими, физическими и волновыми характеристиками процесса деформирования. Они позволяют вычислить более точные значения скорости волны деформации в стержне и существенно повысить точность регистрации скрытых микродефектов материала. В результате исключается использование в строительстве ненадежных элементов конструкций, тем самым повышается экономическая и эксплуатационная надежность проектируемых строительных сооружений.

Выявлено, что нелинейность, дисперсия и диссипация при их компенсации способствуют возникновению в стержнях продольных уединенных деформационных волн, причем наблюдается рост их скорости с увеличением амплитуды волны.

Список литературы

1. Нигул, У. К. Нелинейная акустодинамика / У. К. Нигул. – Л.: Судостроение, 1981. – 321 с.
2. Москвитин, В. В. Сопротивление вязкоупругих материалов / В. В. Москвитин. – М.: Наука, 1972. – 327 с.
3. Илюшин, А. А. Основы математической теории термовязкоупругости / А. А. Илюшин, Б. Е. Победря. – М.: Наука, 1970. – 312 с.
4. Лойко В. И. Математическое моделирование взаимовыгодных отношений производителей сырья и его переработчиков на основе нелинейной функции спроса / В.

И. Лойко, Г. А. Аршинов, В. Г. Аршинов // Политематический сетевой электронный научный журнал Кубанского государственного аграрного университета. – 2015. – № 110. – С. 1691–1706.

5. Аршинов Г.А. Математическое моделирование совместимости экономических интересов перерабатывающих предприятий и производителей сырья / Г.А. Аршинов, В.Г. Аршинов // Политематический сетевой электронный научный журнал Кубанского государственного аграрного университета (Научный журнал КубГАУ) [Электронный ресурс]. – Краснодар: КубГАУ, 2008. – №02(036). С. 212 – 218. – Шифр Информрегистра: 0420800012\0020, IDA [article ID]: 0360802013. – Режим доступа: http://ej.kubagro.ru/2008/02/pdf/13.pdf, 0,438 у.п.л.

6. Аршинов Г.А. Управление отношениями между предприятиями переработки сырья и его производителями / Г.А. Аршинов, В.Г. Аршинов // Политематический сетевой электронный научный журнал Кубанского государственного аграрного университета (Научный журнал КубГАУ) [Электронный ресурс]. – Краснодар: КубГАУ, 2012. – №05(079). С. 391 – 402. – IDA [article ID]: 0791205027. – Режим доступа: http://ej.kubagro.ru/2012/05/pdf/27.pdf, 0,75 у.п.л.

7. Аршинов Г.А. Нелинейная математическая модель управления процессом ценообразования продукции предприятия / Г.А. Аршинов, И.А. Мануйлов // Политематический сетевой электронный научный журнал Кубанского государственного аграрного университета (Научный журнал КубГАУ) [Электронный ресурс]. – Краснодар: КубГАУ, 2012. – №05(079). С. 369 – 378. – IDA [article ID]: 0791205025. – Режим доступа: http://ej.kubagro.ru/2012/05/pdf/25.pdf, 0,625 у.п.л.

8. Лойко В.И. Математическое моделирование взаимовыгодных отношений производителей сырья и его переработчиков на основе нелинейной функции спроса / В.И. Лойко, Г.А. Аршинов, В.Г. Аршинов // Политематический сетевой электронный научный журнал Кубанского государственного аграрного университета (Научный журнал КубГАУ) [Электронный ресурс]. – Краснодар: КубГАУ, 2015. – №06(110). С. 1691 – 1706. – IDA [article ID]: 1101506110. – Режим доступа: http://ej.kubagro.ru/2015/06/pdf/110.pdf, 1 у.п.л.

9. Причины, препятствующие созданию эффективных объединений предприятий молочного подкомплекса АПК / Г.А. Аршинов, В.И. Лойко, В.Г. Аршинов и др. // Политематический сетевой электронный научный журнал Кубанского государственного аграрного университета (Научный журнал КубГАУ) [Электронный ресурс]. – Краснодар: КубГАУ, 2016. – №09(123). С. 1422 – 1443. – IDA [article ID]: 1231609097. – Режим доступа: http://ej.kubagro.ru/2016/09/pdf/97.pdf, 1,375 у.п.л.

10. Анализ современных форм интеграции сельскохозяйственных товаропроизводителей и перерабатывающих предприятий АПК / Г.А. Аршинов, В.И. Лойко, В.Г. Аршинов и др. // Политематический сетевой электронный научный журнал Кубанского государственного аграрного университета (Научный журнал КубГАУ) [Электронный ресурс]. – Краснодар: КубГАУ, 2016. – №09(123). С. 1392 – 1421. – IDA [article ID]: 1231609096. – Режим доступа: http://ej.kubagro.ru/2016/09/pdf/96.pdf, 1,875 у.п.л.

11. Математическое моделирование отношений партнеров в современных формах интеграции сельскохозяйственных товаропроизводителей и перерабатывающих предприятий / Г.А. Аршинов, В.И. Лойко, В.Г. Аршинов и др. // Политематический сетевой электронный научный журнал Кубанского государственного аграрного университета (Научный журнал КубГАУ) [Электронный ресурс]. – Краснодар: КубГАУ, 2017. – №06(130). С. 1137 – 1159. – IDA [article ID]: 1301706083. – Режим доступа: http://ej.kubagro.ru/2017/06/pdf/83.pdf, 1,438 у.п.л.

12. Анализ условий образования эффективных объединений предприятий молочного подкомплекса АПК / Г.А. Аршинов, В.Г. Аршинов, В.Н. Лаптев, С.В. Лаптев // Политематический сетевой электронный научный журнал Кубанского государственного аграрного университета (Научный журнал КубГАУ) [Электронный ресурс]. – Краснодар: КубГАУ, 2017. – №08(132). С. 128 – 155. – IDA [article ID]: 1321708012. – Режим доступа: http://ej.kubagro.ru/2017/08/pdf/12.pdf, 1,75 у.п.л.

References

1. Nigul, U. K. Nelinejnaja akustodinamika / U. K. Nigul. – L.: Sudostroenie, 1981. – 321 s.

2. Moskvitin, V. V. Soprotivlenie vjazkouprugih materialov / V. V. Moskvitin. – M.: Nauka, 1972. – 327 s.

3. Iljushin, A. A. Osnovy matematicheskoj teorii termovjazkouprugosti / A. A. Iljushin, B. E. Pobedrja. – M.: Nauka, 1970. – 312 s.

4. Lojko V. I. Matematicheskoe modelirovanie vzaimovygodnyh otnoshenij proizvoditelej syr'ja i ego pererabotchikov na osnove nelinejnoj funkcii sprosa / V. I. Lojko, G. A. Arshinov, V. G. Arshinov // Politematicheskij setevoj jelektronnyj nauchnyj zhurnal Kubanskogo gosudarstvennogo agrarnogo universiteta. – 2015. – № 110. – S. 1691–1706.

5. Arshinov G.A. Matematicheskoe modelirovanie sovmestimosti jekonomicheskih interesov pererabatyvajushhih predprijatij i proizvoditelej syr'ja / G.A. Arshinov, V.G. Arshinov // Politematicheskij setevoj jelektronnyj nauchnyj zhurnal Kubanskogo gosudarstvennogo agrarnogo universiteta (Nauchnyj zhurnal KubGAU) [Jelektronnyj resurs]. – Krasnodar: KubGAU, 2008. – №02(036). S. 212 – 218. – Shifr Informregistra: 0420800012\0020, IDA [article ID]: 0360802013. – Rezhim dostupa: http://ej.kubagro.ru/2008/02/pdf/13.pdf, 0,438 u.p.l.

6. Arshinov G.A. Upravlenie otnoshenijami mezhdu predprijatijami pererabotki syr'ja i ego proizvoditeljami / G.A. Arshinov, V.G. Arshinov // Politematicheskij setevoj jelektronnyj nauchnyj zhurnal Kubanskogo gosudarstvennogo agrarnogo universiteta (Nauchnyj zhurnal KubGAU) [Jelektronnyj resurs]. – Krasnodar: KubGAU, 2012. – №05(079). S. 391 – 402. – IDA [article ID]: 0791205027. – Rezhim dostupa: http://ej.kubagro.ru/2012/05/pdf/27.pdf, 0,75 u.p.l.

7. Arshinov G.A. Nelinejnaja matematicheskaja model' upravlenija processom cenoobrazovanija produkcii predprijatija / G.A. Arshinov, I.A. Manujlov // Politematicheskij setevoj jelektronnyj nauchnyj zhurnal Kubanskogo gosudarstvennogo agrarnogo universiteta (Nauchnyj zhurnal KubGAU) [Jelektronnyj resurs]. – Krasnodar: KubGAU, 2012. –

№05(079). S. 369 – 378. – IDA [article ID]: 0791205025. – Rezhim dostupa: http://ej.kubagro.ru/2012/05/pdf/25.pdf, 0,625 u.p.l.

8. Lojko V.I. Matematicheskoe modelirovanie vzaimovygodnyh otnoshenij proizvoditelej syr'ja i ego pererabotchikov na osnove nelinejnoj funkcii sprosa / V.I. Lojko, G.A. Arshinov, V.G. Arshinov // Politematicheskij setevoj jelektronnyj nauchnyj zhurnal Kubanskogo gosudarstvennogo agrarnogo universiteta (Nauchnyj zhurnal KubGAU) [Jelektronnyj resurs]. – Krasnodar: KubGAU, 2015. – №06(110). S. 1691 – 1706. – IDA [article ID]: 1101506110. – Rezhim dostupa: http://ej.kubagro.ru/2015/06/pdf/110.pdf, 1 u.p.l.

9. Prichiny, prepjatstvujushhie sozdaniju jeffektivnyh ob#edinenij predprijatij molochnogo podkompleksa APK / G.A. Arshinov, V.I. Lojko, V.G. Arshinov i dr. // Politematicheskij setevoj jelektronnyj nauchnyj zhurnal Kubanskogo gosudarstvennogo agrarnogo universiteta (Nauchnyj zhurnal KubGAU) [Jelektronnyj resurs]. – Krasnodar: KubGAU, 2016. – №09(123). S. 1422 – 1443. – IDA [article ID]: 1231609097. – Rezhim dostupa: http://ej.kubagro.ru/2016/09/pdf/97.pdf, 1,375 u.p.l.

10. Analiz sovremennyh form integracii sel'skohozjajstvennyh tovaroproizvoditelej i pererabatyvajushhih predprijatij APK / G.A. Arshinov, V.I. Lojko, V.G. Arshinov i dr. // Politematicheskij setevoj jelektronnyj nauchnyj zhurnal Kubanskogo gosudarstvennogo agrarnogo universiteta (Nauchnyj zhurnal KubGAU) [Jelektronnyj resurs]. – Krasnodar: KubGAU, 2016. – №09(123). S. 1392 – 1421. – IDA [article ID]: 1231609096. – Rezhim dostupa: http://ej.kubagro.ru/2016/09/pdf/96.pdf, 1,875 u.p.l.

11. Matematicheskoe modelirovanie otnoshenij partnerov v sovremennyh formah integracii sel'skohozjajstvennyh tovaroproizvoditelej i pererabatyvajushhih predprijatij / G.A. Arshinov, V.I. Lojko, V.G. Arshinov i dr. // Politematicheskij setevoj jelektronnyj nauchnyj zhurnal Kubanskogo gosudarstvennogo agrarnogo universiteta (Nauchnyj zhurnal KubGAU) [Jelektronnyj resurs]. – Krasnodar: KubGAU, 2017. – №06(130). S. 1137 – 1159. – IDA [article ID]: 1301706083. – Rezhim dostupa: http://ej.kubagro.ru/2017/06/pdf/83.pdf, 1,438 u.p.l.

12. Analiz uslovij obrazovanija jeffektivnyh ob#edinenij predprijatij molochnogo podkompleksa APK / G.A. Arshinov, V.G. Arshinov, V.N. Laptev, S.V. Laptev // Politematicheskij setevoj jelektronnyj nauchnyj zhurnal Kubanskogo gosudarstvennogo agrarnogo universiteta (Nauchnyj zhurnal KubGAU) [Jelektronnyj resurs]. – Krasnodar: KubGAU, 2017. – №08(132). S. 128 – 155. – IDA [article ID]: 1321708012. – Rezhim dostupa: http://ej.kubagro.ru/2017/08/pdf/12.pdf, 1,75 u.p.l.