УДК 303.732.4

08.00.13 Математические и инструментальные методы экономики (экономические науки)

ХАРАКТЕРИЗАЦИЯ МОДЕЛЕЙ С ДИСКОНТИРОВАНИЕМ

Орлов Александр Иванович
д.э.н., д.т.н., к.ф.-м.н., профессор
РИНЦ SPIN-код: 4342-4994
Московский государственный технический университет им. Н.Э. Баумана, Россия, 105005, Москва, 2-я Бауманская ул., 5, prof-orlov@mail.ru

Среди широко используемых экономико-математических моделей важное место занимают модели динамического программирования, а среди них - модели с дисконтированием. Наиболее известным примером является модель расчета чистой текущей стоимости *NPV* как оценки эффективности инвестиционного проекта. В статье выяснено, какими свойствами выделяются модели с дисконтированием среди всех моделей динамического программирования. В моделях с дисконтированием сравнение планов не меняется при изменении момента начала реализации планов, т.е. имеет место устойчивость результатов сравнения планов. Доказано, что если в модели динамического программирования устойчивы результаты сравнения планов на 1 и 2 шага, то эта модель является моделью с дисконтированием. Эта теорема показывает, что введение дисконтированных функций для оценки эффекта оправдано лишь в стабильных экономических условиях, в которых упорядоченность управленческих решений не меняется год от года. Другими словами, если в начале рассматриваемого периода первое решение лучше второго, то и во все остальные моменты времени, вплоть до конца рассматриваемого периода, первое решение лучше второго. Стабильные экономические условия редко встречаются в современной экономике с ее постоянными изменениями, в том числе вызванными инновациями. Следовательно, принятие решения о выборе (для реализации) инвестиционного проекта из совокупности возможных нельзя основывать исключительно на расчете дисконтированных показателей эффективности проектов, таких, как чистая текущая стоимость и внутренняя норма доходности. Такие показатели могут играть лишь вспомогательную роль. Принимать решение о выбора инвестиционного проекта для реализации необходимо на основе всей совокупности социальных, технологических, экологических, экономических, политических факторов

Ключевые слова: ЭКОНОМИКА, МАТЕМАТИКА, ЭКОНОМИКО-МАТЕМАТИЧЕСКИЕ МОДЕЛИ,

UDC 303.732.4

Mathematical and instrumental methods of Economics

CHARACTERIZATION OF MODELS WITH DISCOUNTING

Orlov Alexander Ivanovich
Dr.Sci.Econ., Dr.Sci.Tech., Cand.Phys-Math.Sci., professor
Bauman Moscow State Technical University, Moscow, Russia

Among the widely used economic-mathematical models, dynamic programming plays an important role, and among them, models with discounting. The most famous example is the model for calculating the net present value (NPV) as an estimate of the efficiency of the investment project. In the article, it is clarified which features are distinguished by models with discounting among all models of dynamic programming. In models with discounting, the comparison of plans does not change when the time of the beginning of the implementation of plans changes, ie. there is a stability of the results of comparing plans. It is proved that if the results of comparing plans for 1 and 2 steps are stable in the dynamic programming model, then this model is a model with discounting. This theorem shows that the introduction of discounted functions for the estimation of the effect is justified only in stable economic conditions in which the orderliness of managerial decisions does not change from year to year. In other words, if at the beginning of the period under consideration the first solution is better than the second, then at all other times, up to the end of the period under consideration, the first solution is better than the second. Stable economic conditions are rarely found in the modern economy with its constant changes, including those caused by innovations. Therefore, the decision to choose (to implement) an investment project from a set of possible ones can not be based solely on the calculation of discounted project performance indicators, such as net present value and internal rate of return. Such indicators can only play a supporting role. Decide on the choice of an investment project for implementation is necessary on the basis of the whole range of social, technological, environmental, economic, political factors

Keywords**:** ECONOMICS, MATHEMATICS, ECONOMIC-MATHEMATICAL MODELS,

ОПТИМИЗАЦИЯ, ДИНАМИЧЕСКОЕ ПРОГРАММИРОВАНИЕ, МОДЕЛИ С ДИСКОНТИРОВАНИЕМ, ХАРАКТЕРИЗАЦИЯ, ТЕОРИЯ ПРИНЯТИЯ РЕШЕНИЙ, ЧИСТАЯ ТЕКУЩАЯ СТОИМОСТЬ, ОЦЕНКА ЭФФЕКТИВНОСТИ ИНВЕСТИЦИОННЫХ ПРОЕКТОВ

OPTIMIZATION, DYNAMIC PROGRAMMING, MODELS WITH DISCOUNTING, CHARACTERIZATION, DECISION-MAKING THEORY, NET PRESENT VALUE, ESTIMATION OF EFFECTIVENESS OF INVESTMENT PROJECTS

DOI: http://dx.doi.org/10.21515/1990-4665-153-022

1. Введение

Среди широко используемых экономико-математических моделей важное место занимают модели динамического программирования, а среди них - модели с дисконтированием. Наиболее известным примером является модель расчета чистой текущей стоимости *NPV* как оценки эффективности инвестиционного проекта.

Выясним, какими свойствами выделяются модели с дисконтированием среди всех моделей динамического программирования [1, 2].

Пусть для простоты изложения время принимает дискретные значения. Тогда, как принято в математической экономике, развитие экономической ситуации описывается некоторой последовательностью $x_1, x_2, ..., x_m$, называемой также планом, где переменные x_j лежат в соответствующем пространстве X, возможно, достаточно сложной природы. Надо отметить также, что положение экономической системы в следующий момент не может быть произвольным, оно связано с положением в предыдущий момент. Проще всего принять, что существует некоторое множество K такое, что $(x_j, x_{j+1}) \in K, \quad j = 1,2,...,m-1$. Результат экономической деятельности за j-й период описывается величиной $f_j(x_j, x_{j+1})$. Зависимость не только от начального и конечного положения, но и от номера периода объясняется тем, что через номер периода осуществляется связь с общей экономической ситуацией. Желая максимизировать суммарные результаты экономической деятельности, приходим к постановке стандартной задаче динамического программирования:

$$F_m(x_1, x_2, ..., x_m) = \sum_{1 \le j \le m-1} f_j(x_j, x_{j+1}) \to \max, \quad (1)$$

$$(x_j, x_{j+1}) \in K, \quad j = 1,2,..., m-1.$$

Таким образом, необходимо выбрать план $(x_1, x_2, ..., x_m)$, удовлетворяющий приведенным ограничениям, на котором достигает максимума функционал F_m . Естественно, предполагается, что множество возможных переходов K таково, что область определения функционала F_m не пуста. При обычных математических предположениях максимум достигается.

Как известно, задача (1) часто возникает во многих прикладных экономических и эконометрических областях, в макроэкономике, в логистике (управлении запасами) (см., например, монографию [3, 4]).

Широко предлагаются, исследуются и применяются модели, приводящие к следующему частному случаю задачи (1):

$$F_m(x_1, x_2, ..., x_m) = \sum_{1 \le j \le m-1} \alpha^{o-1} f(x_j, x_{j+1}) \to \max, \quad (2)$$

$$(x_j, x_{j+1}) \in K, \quad j = 1,2,..., m-1.$$

Это - модели с дисконтированием (как известно, параметр α называется дисконт-факторов). Естественно попытаться выяснить, какими "внутренними" свойствами выделяются задачи типа (2) из всех задач типа (1). В частности, большой популярностью пользуется характеристика инвестиционного проекта *NPV* (*Net Present Value* - чистая текущая стоимость, чистый дисконтированный доход), относящаяся к характеристикам дисконтированного типа и подробно рассматриваемая в работах по оценке эффективности инвестиционных проектов. Однако проведенный в настоящей статье анализ приводит к выводу о научной несостоятельности расчета *NPV* во многих практически важных случаях.

2. Основные результаты

Представляет интерес изучение и сравнение между собой планов возможного экономического поведения на k шагов $X_1 = (x_{11?}x_{21?}..., x_{k1})$ и $X_2 = (x_{12?}x_{22},..., x_{k2})$. (Естественно, предполагаем, что все пары соседних элементов входят в множество K.) Естественно сравнение проводить с помощью описывающих результаты экономической деятельности функций, участвующих в задачах (1) и (2). Именно, будем говорить, что план X_1 лучше плана X_2 при реализации с момента i, если

$$f_i(x_{11}, x_{21}) + f_{i+1}(x_{21}, x_{31}) + ... + f_{i+k-1}(x_{(k-1)1}, x_{k1}) >$$

$$> f_i(x_{12}, x_{22}) + f_{i+1}(x_{22}, x_{32}) + ... + f_{i+k-1}(x_{(k-1)2}, x_{k2}). \quad (3)$$

Будем писать $X_1\ R(i)X_2$, если выполнено неравенство (3), где $R(i)$ - бинарное отношение на множестве планов, задающее упорядочение планов отношением "лучше".

Ясно, что упорядоченность планов на k шагов, определяемая с помощью бинарного отношения $R(i)$, может зависеть от i, т.е. "хорошеть" плана зависит от того, с какого момента i он начинает осуществляться. С точки зрения реальной экономики это вполне понятно. Например, планы действий, вполне рациональные для периода стабильного развития, никуда не годятся в период гиперинфляции. И наоборот, приемлемые в период гиперинфляции операции не принесут эффекта в стабильной обстановке.

Однако, как легко видеть, в моделях с дисконтированием (2) все упорядочения $R(i)$ совпадают, i = 1, 2, ..., m - k. Оказывается - это и есть основной теоретический результат настоящей статьи - верно и обратное: если упорядочения совпадают, то мы имеем дело с задачей (2) - с задачей с дисконтированием, причем достаточно совпадения только при k = 1, 2. Сформулируем более подробно предположения об устойчивости упорядочения планов.

(I). Пусть $(x, y) \in K, \quad (x', y') \in K.$ Верно одно из двух: либо

$$f_i(x, y) > f_i(x', y')$$

для всех $i = 1,2,...,m-1;$ либо

$$f_i(x, y) \le f_i(x', y')$$

для всех $i = 1,2,...,m-1.$

(II). Пусть $(x, y) \in K,\quad (y, z) \in K,\quad (x', y') \in K,\quad (y', z') \in K.$ Верно одно из двух: либо

$$f_i(x, y) + f_{i+1}(y, z) > f_i(x', y') + f_{i+1}(y', z')$$

для всех $i = 1,2,...,m-2;$ либо

$$f_i(x, y) + f_{i+1}(y, z) \le f_i(x', y') + f_{i+1}(y', z')$$

для всех $i = 1,2,...,m-2.$

Как впервые подробно показано в работе [5] (этой статье предшествовали предварительные публикации, указанные в [3]), при некоторых внутриматематических условиях регулярности из условий устойчивости упорядоченности планов (I) и (II) следует существование констант $\alpha > 0$ и $d_j,\ \ j = 2,...,m-1,$ таких, что

$$f_j(x, y) = \alpha^{j-1} f_1(x, y) + d_j, \qquad j = 2,...,m-1. \tag{3}$$

Очевидно, что из (3) следует устойчивость упорядоченности планов на любое число переходов, в то время как в предположениях (I) и (II) шла речь лишь о планах на 1 и 2 перехода.

Поскольку прибавление константы не меняет точки, в которой функция достигает максимума, то последнее соотношение означает, что условия устойчивости упорядоченности планов (I) и (II) характеризуют (другими словами, однозначно выделяют) модели с дисконтированием среди всех моделей динамического программирования.

Математические условия, при которых доказывалась теорема о характеризации моделей с дисконтированием, постепенно ослаблялись на протяжении 1970-х годов (см. об этом в [3]), однако на теоретикоэкономическую сторону дела эти внутриматематические усовершенствования не влияли.

Приведем доказательство теоремы о характеризации моделей с дисконтированием в современной формулировке, обобщающей наши прежние работы.

3. Обозначения

Введем необходимые обозначения.

Множество всех элементов $x \in X$, для которых справедливо утверждение $P(x)$, будем обозначать $\{x : P(x), x \in X\}$.

Пустое множество обозначается $\varnothing$.

Скалярное произведение векторов $x = (x^1, x^2, ..., x^k)$ и $y = (y^1, y^2, ..., y^k)$, принадлежащих евклидову пространству R^k размерности k, обозначается $x \bullet y$ и равно

$$x \bullet y = x^1 y^1 + x^2 y^2 + ... + x^k y^k .$$

Норма $|x|$ вектора x есть $\sqrt{x \bullet x}$.

Для x_n, y_n, x, y из R^k имеем $(x_n, y_n) \to (x, y)$ при $n \to \infty$ тогда и только тогда, когда $|x_n - x| + |y_n - y| \to 0$.

Расстояние $\rho(A, B)$ между множествами $A \subseteq R^k$ и $B \subseteq R^k$ есть

$$\rho(A, B) = \inf\{|x - y|, x \in A, y \in B\}.$$

Градиент $\nabla f(x)$ функции $f(x)$ от $x = (x^1, x^2, ..., x^k) \in R^k$ в точке x_0 есть

$$\nabla f(x_0) = \left(\frac{\partial f(x_0)}{\partial x^1}, \frac{\partial f(x_0)}{\partial x^2}, ..., \frac{\partial f(x_0)}{\partial x^k} \right).$$

В случае $x = ({}^1x, {}^2x, ..., {}^sx)$, ${}^ix \in R^m$, ${}^ix = ({}^ix^1, {}^ix^2, ..., {}^ix^m)$ будем употреблять обозначения

$$\nabla f(x_0) = (\nabla_1 f(x_0), \nabla_2 f(x_0), ..., \nabla_s f(x_0)),$$

$$\nabla_i f(x_0) = \left(\frac{\partial f(x_0)}{\partial^i x^1}, \frac{\partial f(x_0)}{\partial^i x^2}, ..., \frac{\partial f(x_0)}{\partial^i x^m} \right).$$

В частности, для функции $f(x,y),\ x \in R^k,\ y \in R^k$

$$\nabla_1 f(x_0,y_0) = \left(\frac{\partial f(x_0,y_0)}{\partial x^1}, \frac{\partial f(x_0,y_0)}{\partial x^2}, \dots, \frac{\partial f(x_0,y_0)}{\partial x^k} \right),$$

$$\nabla_2 f(x_0,y_0) = \left(\frac{\partial f(x_0,y_0)}{\partial y^1}, \frac{\partial f(x_0,y_0)}{\partial y^2}, \dots, \frac{\partial f(x_0,y_0)}{\partial y^k} \right).$$

Для сложной функции $g(h(z)),\ h(z) \in R^1$,

$$g'(h(z)) = \left.\frac{dg(y)}{dy}\right|_{y=h(z)} \times \frac{dh(z)}{dz}.$$

Внутренностью $\mathrm{Int}(A)$ множества $A \subset R^k$ называется совокупность всех точек $x \in A$ таких, что существует число $\varepsilon = \varepsilon(x) > 0$ такое, что $U_\varepsilon(x) = \{x' : |x - x'| < \varepsilon\} \subset A$. Множества $U_\varepsilon(x)$ при различных $\varepsilon > 0$ называются окрестностями точки $x \in A$.

Функция $f(x),\ x \in A \subseteq R^1$, называется строго возрастающей, если из $x_1 > x_2$ следует $f(x_1) > f(x_2)$.

Замкнутое множество A называется связным, если не существует двух замкнутых непустых множеств A_1 и A_2 таких, что $A_1 \cup A_2 = A$ и $A_1 \cap A_2 = \varnothing$.

4. Предположения регулярности

Предположения (I) и (II) приведены выше в разделе 2 "Основные результаты". Продолжаем нумерацию предположений регулярности.

(III) Множество K лежит в евклидовом пространстве R^{2m} конечной размерности $2m$, замкнуто, ограничено и связно.

(IV) Функции $f_i(x,y)$, $i = 1, 2, \dots, N$, непрерывны на K.

Справедливо следующее утверждение.

Лемма 1. *Множеством значений непрерывной функции f на компактном связном пространстве A со счетной базой является отрезок*

$$\{u : u = f(x), x \in A\} = [c,d]$$

при некоторых $c,\ d \in R^1$.

Доказательство. Непрерывная функция на компактном множестве ограничена и достигает верхней и нижней граней. Пусть

$$c = f(x_1) = \sup\{f(x),\ x \in A\},\ d = f(x_2) = \inf\{f(x),\ x \in A\}.$$

Докажем, что для любого $u \in [c, d]$ найдется точка $x = x(u) \in A$ такая, что $f(x) = u$. Предположим, что это не так для $u_0 \in (c, d)$.

Тогда точки из некоторой окрестности u_0 также не имеют прообразов. Действительно, пусть $u_n - f(x_n) \to u_0$. Пусть x - предельная точка последовательности $\{x_n,\ n = 1, 2, ...\}$, то есть $x_{n(k)} \to x$ при $k \to \infty$. Тогда

$$f(x) = \lim_{k\to\infty} f(x_{n(k)}) = \lim_{n\to\infty} u_n = u_0,$$

вопреки предположению.

Легко видеть, что множества $\{x\colon f(x) < u_0\}$ и $\{x\colon f(x) > u_0\}$ замкнуты, объединение их есть A, а пересечение пусто. Получено противоречие с определением связности. Лемма 1 доказана.

Из предположений (III), (IV) и леммы 1 следует, что при некоторых $a_i, b_i \in R^1,\ i = 1,2,..., N,$

$$\{u : u = f_i(x, y),\ (x, y) \in K\} = [a_i, b_i]. \tag{3}$$

В дальнейшем будем считать, что отрезки $[a_i, b_i]$ определены соотношением (3). Для сокращения записи будем в дальнейшем опускать индекс 1: $[a_1, b_1] = [a, b]$.

(V). Для любых $u \in (a, b),\ i = 2,3,...,$ можно указать точки $(x_0, y_0) = (x_0(u,i), y_0(u,i)) \in Int(K)$ такие, что $f_1(x_0, y_0) = u$, $\nabla f_1(x, y)$ и $\nabla f_i(x, y)$ существуют и непрерывны в некоторой окрестности (x_0, y_0), причем $\nabla f_1(x_0, y_0) \neq 0$, $\nabla f_i(x_0, y_0) \neq 0$.

(VI) Существует $\nabla f_1(x, y)$ для всех $(x, y) \in Int(K)$.

Положим

$A_1 = \{(x, y)\colon f_1(x, y) = a\}$,

$A_2 = \{(x, y)\colon f_1(x, y) = b\}$,

$A_3 = \{(x, y) : \nabla_1 f_1(x, y) = 0\}$,

$A_4 = \{(x, y) : \nabla_2 f_1(x, y) = 0\}$,

$A_5 = K \setminus Int(K) = \partial K$,

$A = A_1 \cup A_2 \cup A_3 \cup A_4 \cup A_5$.

(VII) Для любого $(x, y) \in A$ существует последовательность $(x_n, y_n) \in K \setminus A$ такая, что $(x_n, y_n) \to (x, y)$ при $n \to \infty$.

5. Доказательство основной теоремы

Перейдем к получению основных результатов.

Теорема 1. *Пусть для оптимизационной задачи динамического программирования* (1), $N \geq 3$, *выполнены предположения устойчивости упорядочения планов* (I) *и* (II) *и предположения регулярности* (III), (IV), (V), (VI) и (VII). *Тогда справедливо* (2), *т.е. модель динамического программирования является моделью с дисконтированием.*

Доказательство теоремы разбито на цепь лемм. Каждая следующая лемма может опираться на предыдущие, что иногда не оговаривается специально в условиях лемм.

Лемма 2. *Пусть вектора c_1 и c_2 из R^k таковы, что* $c_1 \neq 0, c_2 \neq 0, c_1 \neq \mu c_2$ *при любом* $\mu > 0$. *Тогда найдутся вектора x_1 и x_2 из R^k, для которых*

$$c_1 \bullet x_1 > c_1 \bullet x_2,\ \ c_2 \bullet x_1 < c_2 \bullet x_2. \tag{4}$$

Доказательство. Есть две возможности:

$$c_1 = \mu c_2,\ \ \mu < 0, \tag{5}$$

$$c_1 \neq \mu c_2\ \forall \mu \in R^1. \tag{6}$$

В случае (5) можно взять любые x_1 и x_2 такие, что

$$c_1 \bullet x_1 \neq c_2 \bullet x_2.$$

В случае (6)

$$A_1 = \{x : c_1 \bullet x = 0\} \neq \{x : c_2 \bullet x = 0\},$$

а потому

$$A_2 = \{c_1 \bullet x > 0,\ c_2 \bullet x < 0\} \neq \varnothing.$$

Возьмем $x_1 \in A_2,\ x_2 \in A_1,\ |x_2| = \varepsilon$. Тогда $c_1 \bullet x_1 > c_1 \bullet x_2 = 0,\ c_2 x_1 < 0$. Выберем $\varepsilon > 0$ настоль малым, чтобы $c_2 \bullet x_2 > c_2 \bullet x_1$. Лемма 2 доказана.

Замечание к лемме 2. Если неравенства (4) верны для x_1 и x_2, то они верны для $x_1' = \mu x_1$ и $x_2' = \mu x_2$ при любом $\mu > 0$.

Лемма 3. *Пусть функции $g_1(x)$ и $g_2(x), x \in R^k$, дифференцируемы в x_0. Для того, чтобы из $g_1(x_1) > g_1(x_2)$ следовало $g_2(x_1) > g_2(x_2)$ в некоторой окрестности x_0, необходимо, чтобы*

$$\nabla g_1(x_0) = \lambda \nabla g_2(x_0) \tag{7}$$

при некотором $\lambda > 0$.

Доказательство. Предположим, что условие (7) не выполнено. Тогда по лемме 2 существуют два вектора Δ_1 и Δ_2 такие, что

$$\nabla g_1(x_0) \bullet \Delta_1 - \nabla g_1(x_0) \bullet \Delta_2 > 0,\ \nabla g_2(x_0) \bullet \Delta_1 - \nabla g_2(x_0) \bullet \Delta_2 < 0. \tag{8}$$

Поскольку производные существуют, то

$$g_i(x_0 + \Delta) - g_i(x_0) = \nabla g_i(x_0) \bullet \Delta + o(|\Delta|\},\ i = 1,2. \tag{9}$$

С помощью замечания к лемме 2 и соотношений (8) и (9) получаем, что при достаточно малом ε

$$g_1(x_0 + \varepsilon\Delta_1) > g_1(x_0 + \varepsilon\Delta_2),\ g_2(x_0 + \varepsilon\Delta_1) < g_2(x_0 + \varepsilon\Delta_2).$$

Получено противоречие с условием, доказывающее лемму 3.

Лемма 4. *Пусть выполнено условие* (I). *Тогда существуют строго возрастающие функции $g_{ik}(u), u \in [a_k, b_k]$, такие, что*

$$f_i(x, y) = g_{ik}(f_k(x, y)),\ i, k = 1,2,...$$

Доказательство. Пусть $f_k(x, y) = f_k(x', y')$. Если $f_i(x, y) \neq f_i(x', y')$, то либо $f_i(x, y) < f_i(x', y')$, либо $f_i(x, y) > f_i(x', y')$. В обоих случаях нарушается предположение (I). Поэтому $f_i(x, y) = f_i(x', y')$.

Пусть $f_k(x, y) = u$. Положим $g_{ik}(u) = f_i(x, y)$. В силу сказанного выше определение функций g_{ik} корректно. Строгое возрастание также следует из предположения (I).

Лемма 5. *Пусть выполнено предположение (V). Тогда функции функций g_{ik} непрерывно дифференцируемы в (a_k, b_k), причем* $g_{ik}^{'}(u) \neq 0$.

Доказательство. Пусть сначала $k = 1$. Обозначим $w_0 = (x_0, y_0)$. Выберем вектор $\Delta \in R^{2m}$ так, чтобы $\nabla f_1(x_0, y_0) \bullet \Delta \neq 0,\ \nabla f_i(w_0) \bullet \Delta \neq 0$. Вектор $w(\varepsilon) = w_0 + \varepsilon\Delta$ при достаточно малом ε, а именно, $|\varepsilon| \leq \varepsilon_0$, принадлежит указанной в предположении (V) окрестности w_0. Рассмотрим $u(\varepsilon) = f_1(w_0 + \varepsilon\Delta),\ g_{i1}(u(\varepsilon)) = f_i(w_0 + \varepsilon\Delta)$. В силу (9) и выбора Δ функция $u(\varepsilon)$ пробегает некоторый отрезок $[u_0 - \delta_1, u_0 + \delta_2]$, проходя через каждую точку ровно один раз, когда ε пробегает отрезок $[-\varepsilon_1, \varepsilon_1],\ \varepsilon_1 \leq \varepsilon_0$.

Рассмотрим $u, u' \in [u_0 - \delta_1, u_0 + \delta_2]$, которым соответствуют $\varepsilon, \varepsilon' \in [-\varepsilon_1, \varepsilon_1]$. Отметим, что в рассматриваемых условиях $u' \to u$ тогда и только тогда, когда $\varepsilon' \to \varepsilon$. По теореме Коши

$$\frac{g_{i1}(u) - g_{i1}(u')}{u - u'} = \frac{f_i(w_0 + \varepsilon\Delta) - f_i(w_0 + \varepsilon'\Delta)}{f_1(w_0 + \varepsilon\Delta) - f_1(w_0 + \varepsilon'\Delta)} = \frac{\nabla f_i\ (w_1) \bullet \Delta}{\nabla f_1\ (w_1) \bullet \Delta},$$

$$w_1 = w_0 + (\theta\varepsilon + (1-\theta)\varepsilon')\Delta,\ 0 < \theta < 1.$$

Поскольку $\nabla f_1(w)$ и $\nabla f_i(w)$ по условию непрерывны, то, переходя к пределу при $u' \to u,\ \varepsilon' \to \varepsilon$, имеем

$$g'_{i1}(u) = \frac{\nabla f_i(w_0 + \varepsilon\Delta) \bullet \Delta}{\nabla f_1(w_0 + \varepsilon\Delta) \bullet \Delta} \tag{10}$$

Поскольку правая часть (10) непрерывна и не обращается в 0 при достаточно малых ε, то лемма 5 для $k = 1$ доказана.

Поскольку

$$g_{i1}(f_1(x, y)) = f_i(x, y) = g_{ik}(f_k(x, y)) = g_{ik}(g_{k1}(f_1(x, y))),$$

то справедливость леммы 5 для произвольного k следует из приведенного выше доказательства для $k = 1$.

В дальнейшем для упрощения записи g_{i1} будем обозначать g_i. Отметим также, что из леммы 5 следует справедливость условия (VI) при замене f_1 на f_i, $i = 2, ..., N$.

Рассмотрим функции

$$H_1(x, y, z) = f_1(x. y)+ f_2(y. z) = f_1(x. y)+ g_2(f_1(y. z)),$$

$$H_2(x, y, z) = f_2(x. y)+ f_3(y. z) = g_2(f_1(x. y))+ g_3(f_1(y. z)).$$

Лемма 6. *Пусть выполнены предположения (II) и (VI). Пусть* $f_1(x, y) \in (a,b)$, $f_1(y,z) \in (a,b)$, $\nabla_1 f_1(x, y) \neq 0$. *Пусть* $\nabla_1 f_1(y,z) \neq 0$ *или* $\nabla_2 f_1(y,z) \neq 0$. *Тогда*

$$g'_2 (f_1(x, y) = g'_3 (f_1(y,z))(g'_2 (f_1(y,z)))^{-1}. \tag{11}$$

Доказательство. Из леммы 5 и предположения (VI) следует, что функции H_1 и H_2 дифференцируемы в рассматриваемой точке. Рассмотрим

$$\nabla H_1(x, y,z) = (\nabla_1 H_1, \nabla_2 H_1, \nabla_3 H_1),\ \nabla H_2(x, y,z) = (\nabla_1 H_2, \nabla_2 H_2, \nabla_3 H_2).$$

Из определения H_1 и H_2 следует, что

$$\nabla_1 H_1 = \nabla_1 f_1(x, y),$$

$$\nabla_2 H_1 = \nabla_2 f_1(x, y) + g'_2 (f_1(y,z))\nabla_1 f_1(y,z),$$

$$\nabla_3 H_1 = g'_2 (f_1(y,z))\nabla_2 f_1(y,z),$$

$$\nabla_1 H_2 = g'_2 (f_1(x, y))\nabla_1 f_1(x, y),$$

$$\nabla_2 H_2 = g'_2 (f_1(x, y))\nabla_2 f_1(x, y) + g'_3 (f_1(y,z))\nabla_1 f_1(y,z),$$

$$\nabla_3 H_2 = g'_3 (f_1(y,z))\nabla_2 f_1(y,z).$$

Поскольку по лемме 5 $g'_2 (f_1(x, y)) \neq 0$ и по условию леммы 6 $\nabla_1 f_1(x, y) \neq 0$, то $\nabla_1 H_1 \neq 0$ и $\nabla_1 H_2 \neq 0$. Из предположения (II) и леммы 3 следует, что $\nabla H_2 = \lambda \nabla H_1$ при некотором $\lambda > 0$. Сравнивая $\nabla_1 H_1$ и $\nabla_1 H_2$, получаем, что

$$\lambda = g'_2 (f_1(x, y)).$$

Кроме того,

$$\nabla_2 H_2 = \lambda \nabla_2 H_1, \tag{12}$$

$$\nabla_3 H_2 = \lambda \nabla_3 H_1 . \qquad (13)$$

Если $\nabla_1 f_1(y,z) \neq 0$, то из (12) следует (11). Если же $\nabla_2 f_1(y,z) \neq 0$, то (11) следует из (13). Лемма 6 доказана.

Лемма 7. *Пусть выполнено предположение* (VII). *Тогда равенство* (11) *выполнено для всех x, y, z таких, что* $(x,y),(y,z) \in Int(K) \setminus (A_1 \cup A_2)$.

Доказательство. В условиях настоящей леммы $u_1 = f_1(x,y) \in (a,b)$, $u_2 = f_1(y,z) \in (a,b)$, поэтому по лемме 5 $g'_2(u_1)$, $g'_3(u_2)$, $g'_2(u_2)$ существуют и отличны от 0, $g'_2(u)$ и $g'_3(u)$ непрерывны в рассматриваемых точках.

По предположению (VII) существует последовательность точек (x_n, y_n), удовлетворяющих условиям леммы 6 и таких что $(x_n, y_n) \to (x,y)$ при $n \to \infty$. Если некоторые из точек (y_n, z) не удовлетворяют условиям леммы 6, то с помощью диагонального процесса Кантора строим последовательность (y'_n, z_n), $|y'_n - y_n| + |z_n - z| \to 0$ при $n \to \infty$, для членов которой выполнены указанные условия. Тогда $(x_n, y'_n) \to (x,y)$, $(y'_n, z_n) \to (y,z)$, для x_n, y'_n, z_n справедливо (11). Из отмеченной выше непрерывности обоих частей (11) следует справедливость (11) для x, y, z. Лемма 7 доказана.

Лемма 8. Для всех (x,y), $(y,z) \in Int(k) \setminus (A_1 \cup A_2)$ справедливо равенство

$$g'_2(f_1(x,y)) = g'_3(f_1(x,y))(g'_2(f_1(y,z)))^{-1} = \alpha = const .$$

Доказательство. По предположению (V) каждому $u \in (a,b)$ можно поставить в соответствие точку ($x(u)$, $y(u)$) из $Int(K) \setminus (A_1 \cup A_2)$ такую, что $f_1(x(u), y(u)) = u$, $\nabla f_1(x(u), y(u)) \neq 0$. В таком случае существуют точки $x_1(u)$ и $x_2(u)$ такие, что

$$u_1 = f_1(x_1(u), y(u)) < f_1(x(u), y(u)) < f_1(x_2(u), y(u)) = u_2$$

(достаточно положить $x_i(u) = x(u) + (-1)^i \varepsilon \Delta$, где положительное ε мало, $\nabla f_1(x(u), y(u)) \bullet \Delta > 0$). В соответствии с (11) $g'_2(u_1) = g'_2(u) = g'_2(u_2)$. Таким образом, каждому $u \in (a,b)$ можно поставить в соответствие интервал ($u_1(u)$,

$u_2(u)$) такой, что $g'_2(u') = g'_2(u)$ при $u_1(u) < u' < u_2(u)$. Эти интервалы образуют открытое покрытие отрезка $[a+\delta, b-\delta]$ при каждом $\delta > 0$. Из открытого покрытия можно выделить конечное подпокрытие (лемма Гейне-Бореля). Однако из

$$(u_1(u), u_2(u)) \cap (u_1(u'), u_2(u')) \neq \varnothing$$

следует, что $g'_2(u) = g'_2(u')$. Значит, $g'_2(u) = \alpha = const$ при $u \in [a+\delta, b-\delta]$. Поскольку $\delta > 0$ произвольно, то справедливо заключение леммы 8.

Лемма 9. *Существуют константы* d_1, d_2 *такие, что при всех* $(x, y) \in K$

$$f_i(x, y) = \alpha^{i-1} f_1(x, y) + d_i,\ i = 2,3. \tag{14}$$

Доказательство. Из леммы 8 следует, что $g_2(u) = \alpha u + d_2$ при некотором d_2 и $u \in (a, b)$, а также, что $g'_3(u) = \alpha^2$ при $u \in (a, b)$ и $g_3(u) = \alpha^2 u + d_2$ при некотором d_2. Из определения g_3 (лемма 3) следует, что (14) верно для всех $(x, y) \in K \setminus (A_1 \cup A_2)$. Из непрерывности f_i (предположение (IV)) и предположения (VII) следует справедливость (14) для всех $(x, y) \in K$.

Лемма 10. *Существуют константы* d_i, i = 2, 3, ..., N, *такие, что соотношение* (2) *верно при всех* i = 2, 3, ..., N *и для всех* $(x, y) \in K$.

Доказательство. Применим метод математической индукции. Соотношение (2) верно при i = 2, 3 (совпадает с (14) в лемме 9). Пусть (2) верно при всех $i \leq k$. Докажем его для $i = k + 1$. Обозначим $p_1(x, y) = f_{k-1}(x, y)$, $p_2(x, y) = f_k(x, y)$, $p_3(x, y) = f_{k+1}(x, y)$. Легко проверить с помощью леммы 5, что к p_j, j = 1, 2, 3, можно применить леммы 6 - 9 (с заменой во всех выкладках f_j на p_j, g_2 на $g_{k,k-1}$, g_3 на $g_{k+1,k-1}$). Следовательно, при некоторых $\beta > 0$, c_2 и c_3 справедливы соотношения

$$p_i(x, y) = \beta^{i-1} p_1(x, y) + c_i,\ i = 2,3. \tag{15}$$

Поскольку $f_{k-1}(x, y) \neq const$ (предположение (V)), то $\beta = \alpha$, и в силу (14) $c_2 = d_k$. Положим $d_{k+1} = c_3$. Соотношения (15) показывают, что (2) выполнено и при $i = k + 1$. Лемма 10 доказана. Доказательство теоремы 1 завершено.

6. Заключительные замечания

Часто используют такие показатели эффективности инвестиционных проектов как чистая текущая стоимость и внутренняя норма доходности [6, 7]. Они используют дисконтированные функции типа (2), как и ряд других показателей эффективности инвестиционных проектов. Подобные функции используются не только для решения задач управления инвестиционными проектами, но и во многих других областях. Они применяются в информационных системах управления предприятиями [8], в том числе нацеленными на решение задач контроллинга [9, 10]. При анализе, оценке и управлении рисками [11] также полезны дисконтированные функции типа (2).

Теорема 1 показывает, что введение дисконтированных функций типа (2) оправдано лишь в стабильных экономических условиях, в которых упорядоченность управленческих решений не меняется год от года. Другими словами, если в начале рассматриваемого периода первое решение лучше второго, то и во все остальные моменты времени, вплоть до конца рассматриваемого периода, первое решение лучше второго. Стабильные экономические условия редко встречаются в современной экономике с ее постоянными изменениями, в том числе вызванными инновациями.

Следовательно, принятие решения о выборе (для реализации) инвестиционного проекта из совокупности возможных нельзя основывать исключительно на расчете дисконтированных показателей эффективности проектов, таких, как чистая текущая стоимость и внутренняя норма доходности. Такие показатели могут играть лишь вспомогательную роль. В случае чистой текущей стоимости есть дополнительная неопределенность, связанная с невозможностью обоснованного задания коэффициента дисконтирования в условиях его изменения с течением времени [12, 13]. Хорошо известно, что принимать решение о выбора инвестиционного проекта для реализации необходимо на основе всей совокупности социальных, технологических, экологических, экономических, политических факторов [1, 4]. Очевидно, необходимо оценивать последствия принятия решений для научно-технического и экономического развития [14].

Литература

1. Орлов А.И. Менеджмент: организационно-экономическое моделирование. — Ростов-на-Дону: Феникс, 2009. — 475 с.
2. Орлов А.И. Организационно-экономическое моделирование: теория принятия решений : учебник. — М. : КноРус, 2011. — 568 с.
3. Орлов А.И. Устойчивость в социально-экономических моделях. - М.: Наука, 1979. - 296 с.
4. Орлов А.И. Теория принятия решений. – М.: Экзамен, 2006. – 576 с.
5. Orlov A. Sur la stabilite' dans les modeles economiques discrets et les modeles de gestion des stocks // Publications Econometriques. 1977. Vol. X. F. 2. Pp.63-81.
6. Орлов А.И., Орлова Л.А. Современные подходы к управлению инновациями и инвестициями // Экономика XXI века. 2002. № 12. С.3 – 26.
7. Виленский П.Л., Лившиц В.Н., Смоляк С.А. Оценка эффективности инвестиционных проектов. Теория и практика. — 2-е изд., перераб и доп. — М.: Дело, 2002 — 888 с.
8. Орлов А.И., Гуськова Е.А. Информационные системы управления предприятием в решении задач контроллинга // Контроллинг. 2003. № 1(5). С.52-59.
9. Орлов А.И., Луценко Е.В., Лойко В.И. Перспективные математические и инструментальные методы контроллинга. Под научной ред. проф. С.Г. Фалько. Монография (научное издание). – Краснодар, КубГАУ. 2015. – 600 с.
10. Орлов А.И., Луценко Е.В., Лойко В.И. Организационно-экономическое, математическое и программное обеспечение контроллинга, инноваций и менеджмента: монография / под общ. ред. С.Г. Фалько. – Краснодар : КубГАУ, 2016. – 600 с.
11. Орлов А. И., Пугач О. В. Подходы к общей теории риска // Управление большими системами. Выпуск 40. М.: ИПУ РАН, 2012. С.49-82.
12. Орлов А.И., Луценко Е.В. Системная нечеткая интервальная математика. Монография (научное издание). – Краснодар, КубГАУ. 2014. – 600 с.
13. Орлов А.И. Оценка погрешностей характеристик финансовых потоков инвестиционных проектов в ракетно-космической промышленности // Политематический сетевой электронный научный журнал Кубанского государственного аграрного университета. 2015. – № 109. С. 238–264.
14. Орлов А.И. Последствия принятия решений для научно-технического и экономического развития // Политематический сетевой электронный научный журнал Кубанского государственного аграрного университета. 2015. № 113. С. 355 – 387.

References

1. Orlov A.I. Menedzhment: organizacionno-jekonomicheskoe modelirovanie. — Rostov-na-Donu: Feniks, 2009. — 475 s.
2. Orlov A.I. Organizacionno-jekonomicheskoe modelirovanie: teorija prinjatija reshenij : uchebnik. — M. : KnoRus, 2011. — 568 s.
3. Orlov A.I. Ustojchivost' v social'no-jekonomicheskih modeljah. - M.: Nauka, 1979. - 296 s.
4. Orlov A.I. Teorija prinjatija reshenij. – M.: Jekzamen, 2006. – 576 s.
5. Orlov A. Sur la stabilite' dans les modeles economiques discrets et les modeles de gestion des stocks // Publications Econometriques. 1977. Vol. X. F. 2. Pp.63-81.
6. Orlov A.I., Orlova L.A. Sovremennye podhody k upravleniju innovacijami i investicijami // Jekonomika XXI veka. 2002. № 12. S.3 – 26.
7. Vilenskij P.L., Livshic V.N., Smoljak S.A. Ocenka jeffektivnosti investicionnyh proektov. Teorija i praktika. — 2-e izd., pererab i dop. — M.: Delo, 2002 — 888 s.
8. Orlov A.I., Gus'kova E.A. Informacionnye sistemy upravlenija predprijatiem v reshenii zadach kontrollinga // Kontrolling. 2003. № 1(5). S.52-59.
9. Orlov A.I., Lucenko E.V., Lojko V.I. Perspektivnye matematicheskie i instrumental'nye metody kontrollinga. Pod nauchnoj red. prof. S.G. Fal'ko. Monografija (nauchnoe izdanie). – Krasnodar, KubGAU. 2015. – 600 s.
10. Orlov A.I., Lucenko E.V., Lojko V.I. Organizacionno-jekonomicheskoe, matematicheskoe i programmnoe obespechenie kontrollinga, innovacij i menedzhmenta: monografija / pod obshh. red. S.G. Fal'ko. – Krasnodar : KubGAU, 2016. – 600 s.
11. Orlov A. I., Pugach O. V. Podhody k obshhej teorii riska // Upravlenie bol'shimi sistemami. Vypusk 40. M.: IPU RAN, 2012. S.49-82.
12. Orlov A.I., Lucenko E.V. Sistemnaja nechetkaja interval'naja matematika. Monografija (nauchnoe izdanie). – Krasnodar, KubGAU. 2014. – 600 s.
13. Orlov A.I. Ocenka pogreshnostej harakteristik finansovyh potokov investicionnyh proektov v raketno-kosmicheskoj promyshlennosti // Politematicheskij setevoj jelektronnyj nauchnyj zhurnal Kubanskogo gosudarstvennogo agrarnogo universiteta. 2015. – № 109. S. 238–264.
14. Orlov A.I. Posledstvija prinjatija reshenij dlja nauchno-tehnicheskogo i jekonomicheskogo razvitija // Politematicheskij setevoj jelektronnyj nauchnyj zhurnal Kubanskogo gosudarstvennogo agrarnogo universiteta. 2015. № 113. S. 355 – 387.