УДК 004.43:004.942;534.11

UDC 004.43:004.942;534.11

05.00.00 Технические науки

Technical sciences

К ВОПРОСУ МОДЕЛИРОВАНИЯ КОЛЕБАТЕЛЬНОГО ПРОЦЕССА СРЕДСТВАМИ ОБЪЕКТНО-ОРИЕНТИРОВАННОГО ПРОГРАММИРОВАНИЯ

TO THE QUESTION OF MODELING OF OSCILLATORY PROCESS BY MEANS OF OBJECT-ORIENTED PROGRAMMING

Крамаренко Татьяна Анатольевна
к.пед.н.
РИНЦ SPIN код= 1808-1141
e-mail: t_kramarenko@mail.ru
Кубанский государственный аграрный университет имени И.Т. Трубилина, Краснодар, Россия

Лукьяненко Татьяна Викторовна
к.т.н., доцент
РИНЦ SPIN код= 2814-3051
e-mail: tanyaluk0103@gmail.com
Кубанский государственный аграрный университет имени И.Т. Трубилина, Краснодар, Россия

Донской Игорь Сергеевич
студент факультета прикладной информатики
e-mail: zazaaqaq@inbox.ru
Кубанский государственный аграрный университет имени И.Т. Трубилина, Краснодар, Россия

Kramarenko Tatyana Aanatolievna
Cand. Ped.Sci.
RSCI SPIN-code=1808-1141
e-mail: t_kramarenko@mail.ru
Kuban State Agrarian University named after I. T. Trubilin, Krasnodar, Russia

Lukyanenko Tatyana Victorovna
Cand.Tech.Sci., Associate Professor
RSCI SPIN-code=2814-3051
e-mail: tanyaluk0103@gmail.com
Kuban State Agrarian University named after I. T. Trubilin, Krasnodar, Russia

Donskoy Igor Sergeevich
Student of applied informatics faculty
e-mail: zazaaqaq@inbox.ru
Kuban State Agrarian University named after I. T. Trubilin, Krasnodar, Russia

В статье представлены исследование и реализация физической модели движения двух связанных маятников с использованием численных методов. При построении модели применялся метод Эйлера решения дифференциальных уравнений, который с высокой достоверностью отображает визуальное движение маятников, а также построение графиков функций скорости, угла и ускорения в зависимости от времени. Составлено уравнение движения для обобщенных координат для первого и второго математического маятника. Созданное приложение реализует физическую модель двойного математического маятника, совершающего незатухающие колебания с возможность изменять основные параметры: угол отклонения, скорость, массу и длину стержня на языке C++ средствами среды программирования «Embarcadero RAD Studio». Приложение можно использовать как модель двойного математического маятника при исследовании колебаний, а также как методическое пособие и виртуальную лабораторию на занятиях по физике, на занятиях по информатике и программированию – для демонстрации, изучения и создания приложений на объектно-

In this article, we have presented the study and implementation of the physical model of motion of two coupled pendulums with use of numerical methods. When building the model we were using the method of Euler solutions of differential equations, which displays pendulums visual motion, as well as building graphics of functions of speed, angle and acceleration depending on time with high reliability. We have generated equation of motion for generalized coordinates for the first and second mathematical pendulum. The generated application implements a physical model of a double mathematical pendulum, commit sustained oscillations with the ability to change the basic parameters: deflection angle, speed, mass and length of the rod in C++ language by programming environment “Embarcadero RAD Studio”. This application can be used as a model of a double mathematical pendulum in the study of oscillations, as a methodical manual and a virtual laboratory in physics, informatics and programming classes – for demonstration, study and create applications in the object-oriented C++ programming language

ориентированном языке программирования С++

Ключевые слова: МОДЕЛЬ, КОЛЕБАНИЯ, ДВОЙНОЙ МАТЕМАТИЧЕСКИЙ МАЯТНИК, ДИФФЕРЕНЦИАЛЬНЫЕ УРАВНЕНИЯ, ПРИЛОЖЕНИЕ, ОБЪЕКТНО-ОРИЕНТИРОВАННОЕ ПРОГРАММИРОВАНИЕ, ЯЗЫК С++

Keywords: MODEL, OSCILLATION, DOUBLE MATHEMATICAL PENDULUM, DIFFERENTIAL EQUATIONS, APPLICATION OF OBJECT-ORIENTED PROGRAMMING, C++PROGRAMMING LANGUAGE

Doi: 10.21515/1990-4665-132-069

Постановка проблемы. Известно, что не все физические процессы можно наблюдать, изучать и исследовать в реальных масштабах, условиях и т.д. В практике часто используется моделирование процессов и явлений, в том числе, моделирование колебательных процессов различной природы (механические, электромагнитные). Так, например, математический маятник служит простейшей моделью физического тела, совершающего колебания при движении по одной траектории между двумя предельными положениями. Такая модель не учитывает распределение массы. Примером колебательных движений механической системы с двумя степенями свободы может служить двойной маятник – маятник с другим маятником, прикреплённым к его концу. Двойной математический маятник является простой физической системой, которая проявляет разнообразное динамическое поведение со значительной зависимостью от начальных условий.

Необходимо разработать приложение, моделирующее движение двойного математического маятника, при условии наличия соединения маятников невесомыми стержнями. В ходе разработки предполагается создать физическую модель двойного математического маятника с возможностью изменять основные параметры: угол отклонения, скорость, массу и длину стержня для каждого маятника на языке С++ средствами объектно-ориентированной среды программирования «Embarcadero RAD Studio». Маятники должны совершать незатухающие колебания, так как в модели не учитывается сила трения. Интерфейс приложения должен быть создан таким образом, чтобы программу можно было использовать на интерактивном оборудовании. Приложение должно запускаться на любых ПК, не имеющих «Embarcadero RAD Studio».

Анализ последних исследований и публикаций. Значительный вклад в изучение двойных маятников внесли такие отечественные и зарубежные ученые как: С.П. Безгласный [2], П.О. Буланчук [4, 5], А.В. Иванов [7], Б.М. Кумицкий [11], А.П. Маркеев и многие другие авторы.

Существует также ряд разработок, посвященных компьютерному моделированию механических колебаний средствами MathLab, Microsoft Excel, Macromedia Flash, в том числе, с использованием объектно-ориентированных языков программирования Delphi, Microsoft Visual Basic и др. [1, 6]. Однако, они моделируют работу математического маятника с одной степенью свободы.

Моделирование двойного маятника относится к сложно-формализуемым задачам, которые не решаются на должном уровне. Необходимо определить уравнение Лагранжа для расчета координат маятников и решать его с помощью метода Эйлера, чтобы моделирование движения было максимально достоверным.

Целью исследования является исследование процесса гармонических колебаний и реализация физической модели колебательного движения двух связанных маятников на языке программирования C++.

В рамках данной цели были поставлены и решены следующие задачи:

1. Рассмотреть основные понятия и характеристики колебательного движения.

2. Провести исследование численного метода Эйлера для решения систем дифференциальных уравнений.

3. Определить уравнения движения для обобщенных координат для первого и второго математического маятника.

4. Разработать программу в интегрированной среде программирования «Embarcadero RAD Studio – C++ Builder», реализующую 3D-модель движения двойного маятника с возможностью ввода исходных данных и выводом графиков для отображения основных параметров маятников, графиков фазовых скоростей.

1. Период и частота

Под механическим колебательным движением понимают движение, при котором состояния движущегося тела с течением времени повторяются, причем тело проходит через положение своего устойчивого равновесия поочерёдно в противоположных направлениях.

Полным колебанием тела называют каждый законченный цикл колебательного движения, после которого оно вновь повторяется в том же порядке.

Колебательное движение, при котором состояния колеблющегося тела повторяются через определённые промежутки времени – периодическое колебательное движение.

Периодом *T* колебательного движения называют время совершения одного полного колебания – наименьший промежуток времени, в течение которого какой-либо из параметров данного движения, начав изменяться с амплитудного значения, вновь принимает своё первоначальное положение.

Величину ν, обратную периоду и равную числу колебаний за 1 с., называют частотой колебаний, т.е. $\nu = 1/T$. За единицу частоты, называемую герцем, принята частота такого колебательного движения, при котором за каждую секунду совершается одно полное колебание: 1 Гц = 1/с = $с^{-1}$.

Величина $\omega = 2\pi\nu = 2\pi/T$ – циклическая (круговая) частота колебаний.

Следует заметить, что колебательный процесс может происходить в системе под действием и внешних и внутренних сил.

Так, колебания, возникающие в системе под действием внутренних сил после того, как она была выведена из положения устойчивого равновесия, и происходящие за счет расходования сообщенной системе энергии (в дальнейшем не пополняющейся), называют свободными.

Частота, с которой совершаются свободные колебания, зависит от свойств колебательной системы – собственная частота свободных колебаний.

Гармонические колебания – это колебания, при которых изменение физической величины с течением времени, происходит по синусоидальному или косинусоидальному закону.

Кинематическое уравнение гармонических колебаний имеет вид:

$$x(t) = A\sin(\omega t + \varphi) \text{ или } x(t) = A\cos(\omega t + \varphi), \qquad (1)$$

где x – смещение (отклонение) колеблющейся точки от положения равновесия в момент времени t;

A – амплитуда колебаний – величина, определяющая максимальное отклонение колеблющейся точки от положения равновесия;

ω – циклическая частота – величина, показывающая число полных колебаний, происходящих в течение 2π секунд;

$(\omega t + \varphi)$ – полная фаза колебаний, φ – начальная фаза колебаний.

Именно обыкновенными дифференциальными уравнениями (ДУ) первого и второго порядка описываются большинство физических процессов, причем в общем случае эти уравнения не имеют аналитического решения, выражающегося через элементарные функции (например, движение тела под действием переменной силы). Подобные уравнения решают численным методом, являющимся приближенным, что, однако, при определенных условиях дает хорошее совпадение с точным решением.

ДУ, описывающее гармонические колебания, имеет вид $\frac{d^2x}{dt^2} + \omega^2 x = 0.$ Любое нестандартное решение этого дифференциального уравнения – это гармоническое колебание с циклической частотой ω.

Материальная точка совершает гармонические колебания, в случае, если они происходят в результате воздействия на точку силы, которая пропорциональна смещению колеблющейся точки и направленна противоположно этому смещению.

2. Метод Эйлера

Известно, что уравнение $y` = f(x,y)$, задает в некоторой области поле направлений. В результате решение этого уравнения с некоторыми начальными условиями получим кривую, которая касается поля направлений в любой точке.

Если взять последовательность точек $x_0, x_1, x_2,$ …. и заменить на получившихся отрезках интегральную кривую на отрезки касательных к ней, то получим ломаную линию, представленную на рисунке 1.

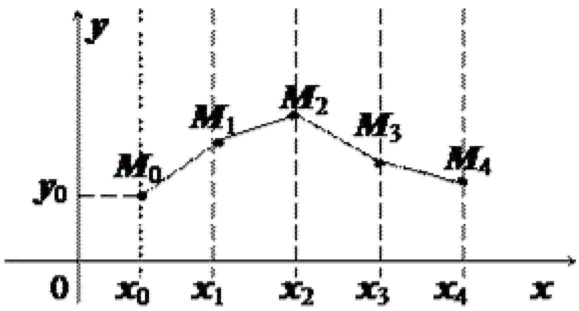

Рисунок 1 – Ломаная Эйлера

Подставляя заданные начальные условия в дифференциальное уравнение $y` = f(x,y)$, получаем угловой коэффициент касательной к интегральной кривой в начальной точке:

$$tg\,\alpha_0 = y` = f(x_0, y_0) \qquad (2)$$

Заменив на отрезке $[x_0, x_1]$ интегральную кривую на касательную к ней, получаем значение:

$$y_1 = y_0 + f(x_0, y_0)(x_1 - x_0) \qquad (3)$$

Для отрезка $[x_1, x_2]$ производим аналогичную операцию и получаем:

$$y_2 = y_1 + f(x_1, y_1)(x_2 - x_1) \qquad (4)$$

Продолжая аналогичные действия далее, получаем итоговую ломаную кривую – ломаную Эйлера.

Сформулируем общую формулу вычислений:

$$y_n = y_{n-1} + f(x_{n-1}, y_{n-1})(x_n - x_{n-1}) \qquad (5)$$

Если последовательность точек x_i выбрать так, чтобы они отстояли друг от друга на одинаковое расстояние h, называемое шагом вычисления, то получаем формулу:

$$y_n = y_{n-1} + f(x_{n-1}, y_{n-1})h \qquad (6)$$

Следует отметить, что точность метода Эйлера достаточно невысока. Повысить точность можно, например, уменьшив шаг вычислений, однако, это повлечет усложнение расчетов. Таким образом, на практике применяется, так называемый, уточненный метод Эйлера, или формула пересчета.

Суть метода: в формуле $y_1 = y_0 + f(x_0, y_0)h$ вместо значения $y_0' = f(x_0, y_0)$ используется среднее арифметическое значений $f(x_0, y_0)$ и $f(x_1, y_1)$. Тогда уточненное значение:

$$y_1^{(1)} = y_0 + \frac{f(x_0, y_0) + f(x_1, y_1)}{2}h \qquad (7)$$

Далее находится значение производной в точке .
Заменяя $f(x_0, y_0)$ средним арифметическим значений $f(x_0, y_0)$ и

, находят второе уточненное значение y_1:

$$y_1{}^{(2)} = y_0 + \frac{f(x_0, y_0) + f(x_1, y_1{}^{(1)})}{2} h \qquad (8)$$

Затем третье:

$$y_1{}^{(3)} = y_0 + \frac{f(x_0, y_0) + f(x_1, y_1{}^{(2)})}{2} h \qquad (9)$$

И т.д., пока не совпадут два последовательных уточненных значения в пределах заданной степени точности. Тогда это значение принимается за ординату точки M_1 ломаной Эйлера.

Подобная операция производится и для остальных значений y. Данное уточнение позволяет весомо повысить точность результата.

3. Двойной маятник

Колебания простого маятника имеют регулярный характер. При малых отклонениях от равновесия такие колебания являются гармоническими и описываются функцией синус или косинус. В случае нелинейных колебаний период зависит от амплитуды, но регулярность движения сохраняется. Другими словами, в случае простого маятника приближение малых колебаний вполне отражает существенные свойства системы [10].

В режиме малых колебаний у двойного маятника возникает такое новое явление как эффект биений. А при увеличении энергии характер колебаний маятников меняется принципиально − колебания становятся хаотическими. Несмотря на то, что двойной маятник можно описать системой нескольких обыкновенных дифференциальных уравнений, то есть вполне детерминированной моделью, появление хаоса выглядит очень необычно. Данная ситуация напоминает систему Лоренца, где детерминированная модель из трех уравнений также демонстрирует хаотическое поведение [16].

На рисунке 2 двойной маятник представлен следующим образом: в точке m_1 имеется еще одно шарнирное соединение, к которому подвешивается второй математический маятник (m_2 ,l_2), вынужденный качаться в той же плоскости. Колебания такой системы носят хаотический характер.

Составление дифференциального уравнения движения двойного маятника в декартовых координатах крайне затруднительно из-за наличия реакций, возникающих в шарнирных соединениях. Подобные задачи решаются составлением уравнений движения для обобщенных координат (уравнения Лагранжа). Дело в том, что задание положения системы точек, скрепленных связями, в декартовых координатах не всегда удобно. Выбор параметров, необходимых для описания положения всех точек механической системы (т.е. обобщенных координат), должен определяться, прежде всего, целесообразностью. Так, например, если силы зависят только от расстояния между частицами, то разумно ввести эти расстояния в уравнения динамики в явном виде, а не через посредство декартовых координат. В нашем случае в качестве обобщенных координат удобно принять углы отклонения каждого из маятников от вертикали (θ_1 и θ_2) [5].

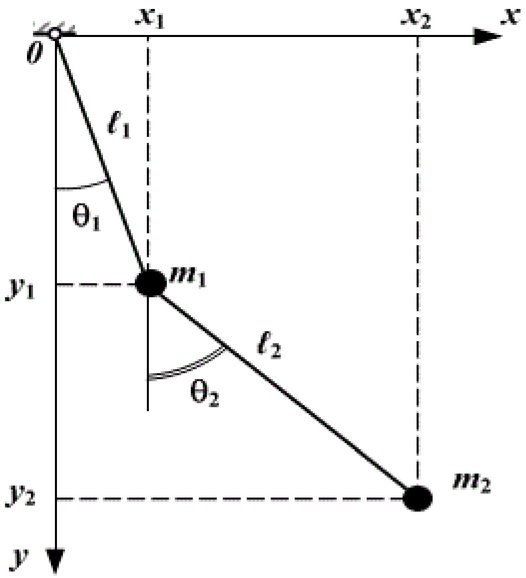

Рисунок 2 – Двойной маятник

Рассмотрим последовательность составления уравнений Лагранжа на примере задачи колебаний двойного маятника (без трения):

1) ввести систему отсчета согласно рисунка 2 и выразить декартовы координаты через обобщенные:

$$\begin{cases} x_1 = l_1 sin\theta_1 \\ y_1 = -l_1 cos\theta_1 \end{cases} \text{и} \begin{cases} x_2 = l_1 sin\theta_1 + l_2 sin\theta_2 \\ y_2 = -(l_1 cos\theta_1 + l_2 cos\theta_2) \end{cases}.$$

2) путем дифференцирования этих равенств получить декартовы составляющие скоростей, выраженные через обобщенные координаты (θ_1 и θ_2) и обобщенные скорости (θ'_1 и θ'_2):

$$\begin{cases} \dot{x}_1 = v_{x_1} = l_1 \dot{\theta}_1 cos\theta_1 \\ \dot{y}_1 = v_{y_1} = l_1 \dot{\theta}_1 sin\theta_1 \end{cases} \text{и} \begin{cases} \dot{x}_2 = v_{x_2} = l_1 \dot{\theta}_1 cos\theta_1 + l_2 \dot{\theta}_2 cos\theta_2 \\ \dot{y}_2 = v_{y_2} = l_1 \dot{\theta}_1 sin\theta_1 + = l_2 \dot{\theta}_2 sin\theta_2 \end{cases}.$$

Тогда квадраты скоростей каждого маятника:

$$v_1^2 = v_{x_1}^2 + v_{y_1}^2 = l_1^2 \dot{\theta}_1^2 cos^2\theta_1 + l_1^2 \dot{\theta}_1^2 sin^2\theta_1 = l_1^2 \dot{\theta}_1^2$$

$$v_2^2 = v_{x_2}^2 + v_{y_2}^2 = l_1^2 \dot{\theta}_1^2 cos^2\theta_1 + l_2^2 \dot{\theta}_2^2 cos^2\theta_2 + 2 l_1 l_2 cos\theta_1 cos\theta_2 +$$

$$l_1^2 \dot{\theta}_1^2 sin^2\theta_1 + l_2^2 \dot{\theta}_2^2 sin^2\theta_2 + 2 l_1 l_2 \dot{\theta}_1^2 \dot{\theta}_2^2 sin\theta_1 sin\theta_2 = l_1^2 \dot{\theta}_1^2 + l_2^2 \dot{\theta}_2^2 + 2 l_1 l_2 \dot{\theta}_1 \dot{\theta}_2 cos(\theta_1 - \theta_2)$$

3) декартовы координаты, входящие в формулу потенциальной энергии, заменить на обобщенные:

$$E_p = m_1 g y_1 + m_1 g y_2 = -(m_1 g l_1 cos\theta_1 + m_2 g l_1 cos\theta_1 + m_2 g l_2 cos\theta_2) = -(m_1 + m_2) g l_1 c$$

4) скорости, входящие в формулу кинетической энергии, заменить на обобщенные скорости так, что кинетическая энергия в общем случае начинает зависеть не только от обобщенных скоростей, но и от обобщенных координат:

$$E_k = \frac{m_1 v_1^2}{2} + \frac{m_2 v_2^2}{2} = \frac{m_1 l_1^2}{2}\dot{\theta}_1^2 + \frac{m_2 l_1^2}{2}\dot{\theta}_1^2 + \frac{m_2 l_2^2}{2}\dot{\theta}_2^2 + m_2 l_1 l_2 \dot{\theta}_1 \dot{\theta}_2 cos(\theta_1 - \theta_2) = \frac{(m_1 + m_2) l_1^2}{2}\dot{\theta}_1^2 +$$

5) оставить выражение для функции Лагранжа:

$$L = E_k - E_p = \frac{(m_1 + m_2) l_1^2}{2}\dot{\theta}_1^2 + \frac{m^2 l_2^2}{2}\dot{\theta}_2^2 + m_2 l_1 l_2 \dot{\theta}_1 \dot{\theta}_2 cos(\theta_1 - \theta_2) + (m_1 + m_2) g l_1 cos\theta_1 + m$$

.

6) составить уравнения Лагранжа:

$$\begin{cases} \frac{d}{dt}\frac{dL}{d\dot{\theta}_1} - \frac{dL}{d\theta_1} = 0 \\ \frac{d}{dt}\frac{dL}{d\dot{\theta}_2} - \frac{dL}{d\theta_2} = 0 \end{cases} \qquad (10)$$

Первый маятник:

$$\frac{dL}{d\dot{\theta}_1} = (m_1 + m_2) l_1^2 \dot{\theta}_1 + m_2 l_1 l_2 \dot{\theta}_2 \cos(\theta_1 - \theta_2)$$

$$\frac{d}{dt}\frac{dL}{d\dot{\theta}_1} = (m_1 + m_2) l_1^2 \ddot{\theta}_1 + m_2 l_1 l_2 \ddot{\theta}_1 cos(\theta_1 - \theta_2) - m_2 l_1 l_2 \dot{\theta}_1 \dot{\theta}_2 sin(\theta_1 - \theta_2) + m_2 l_1 l_2 \dot{\theta}_2^2 sin($$

$$\frac{dL}{d\theta_1} = -m_2 l_1 l_2 \dot{\theta}_1 \dot{\theta}_1 sin(\theta_1 - \theta_2) - (m_1 + m_2) g l_1 sin\theta_1$$

Подставляя полученные выражения в систему уравнений (10), получим уравнение Лагранжа для первого маятника:

$$(m_1 + m_2) l_1 \ddot{\theta}_1 + m_2 l_2 \ddot{\theta}_2 \cos(\theta_1 - \theta_2) + m_2 l_2 \dot{\theta}_2^2 sin(\theta_1 - \theta_2) + (m_1 + m_2) g sin\theta_1 = 0$$

.

Второй маятник (уравнение Лагранжа):

$$l_2 \ddot{\theta}_2 + l_1 \ddot{\theta}_1 cos(\theta_1 - \theta_2) - l_1 \dot{\theta}_1^2 sin(\theta_1 - \theta_2) + g sin\theta_2 = 0 .$$

Выразим вторые производные углов первого и второго маятников и решим их уточненным методом Эйлера**.**

3. Интерфейс программы

Для создания клиентского приложения [9] была выбрана среда для быстрой разработки интерфейсов приложений C++ Builder из пакета Embarcadero RAD Studio XE, которая содержит достаточно компонентов для реализации интерфейса разрабатываемого приложения, в том числе, вывода графиков, траектории движения маятников и т.д. [8].

После запуска приложения «Двойной маятник» открывается загрузочная форма, на которой отображается меню. При щелчке на кнопку «О создателе» появляются краткие данные о разработчике программы. При нажатии кнопки «Справка» пользователю показывается краткая теория о том, как совершаются колебания системы маятников.

Для запуска моделирования нужно выбрать в верхнем Меню→Маятники. Открывается следующее окно, представленное на рисунке 3:

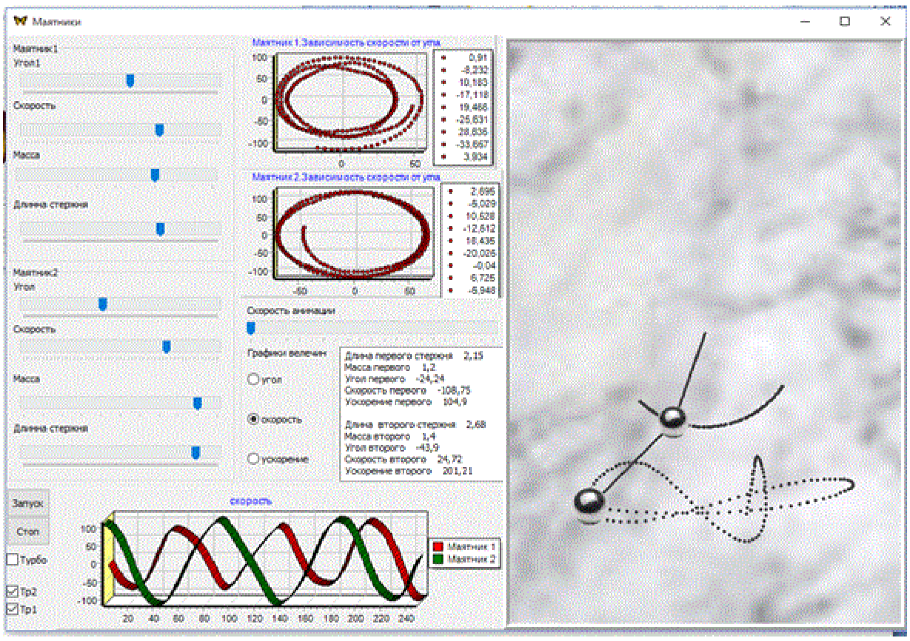

Рисунок 3 – Окно программы, реализующее модель движения

Данная программа спроектирована таким образом, чтобы ее можно было использовать на интерактивной доске. Начальные значения двух маятников на длинных невесомых стержнях задаются с помощью ползунков.

Так, перед запуском на выполнение можно задать:

1. Угол отклонения первого и второго мятников от -180^0 до 180^0.
2. Начальную скорость первого и второго мятников от -25 до 25.
3. Массу первого и второго мятников от 5 до 25.
4. Длину стержня у первого и второго мятников от 10 до 300.

Выставив начальные значения маятников нужно нажать кнопку «Запуск». Маятники начинают совершать колебательные незатухающие колебания. При этом отображаются графики зависимости скорости от угла первого и второго маятников.

Ниже располагается окно (см. рисунок 3) для отображения графиков зависимости ускорения от времени, скорости от времени и угла от времени. На рабочем поле можно включать отображение траекторий обоих маятников с помощью флажков под кнопкой «Стоп». Кнопка «Стоп» останавливает анимацию. Чтобы закрыть программу нужно нажать Меню→Выход**.**

Программа была опробована на операционных системах: Windows XP,Windows 7, Windows 8, Windows 10 [11, 15].

4. Основные процедуры, используемые в программе

В программе используются следующие процедуры:

– voidForm_1() – чтения всех необходимых данных из формы для начала расчета колебания маятников;

– voidVerlet() – просчет основных параметров маятников, таких как: угол, скорость, ускорение;

– voidUpdateArrays() – обновление ячеек массива, для возможности дальнейшего расчета необходимых параметров маятников;

– voidAccel() – расчет ускорения маятников, которые необходимы для нахождения новых декартовых координат маятников;

– voidCalcPendulums() – расчет новых координат маятников, исходя из значений углов отклонений;

– voidraschet() – визуальное отображение движения маятников [12].

Приведем, например, тело процедуры voidraschet():

```
double tf[2]; double dt; dt= 1; dt=dt/8000;
for(int k=0;k<160;k++)
{
  puti() ; Accel();
  for(int          i=0;i<2;i++)          tf[i]          =
Pendulums[i].preAcceleration;
  for(int i=0;i<2;i++)
  {
     Pendulums[i].Angle=      Pendulums[i].preAngle      +
Pendulums[i].preSpeed * dt + Pendulums[i].Acceleration*dt*dt/2
;
     Pendulums[i].Speed    =    Pendulums[i].preSpeed    +
Pendulums[i].Acceleration * dt;   }
  puti(); Accel();
  for(int i=0;i<2;i++)
  {
     tf[i] = (tf[i] + Pendulums[i].Acceleration) / 2 ;
     Pendulums[i].Speed = Pendulums[i].Speed + tf[i] * dt;
     Pendulums[i].Angle     =     Pendulums[i].Angle     +
Pendulums[i].Speed * dt + tf[i] * dt * dt / 2;
     if ( Pendulums[i].Angle > 360)
          Pendulums[i].Angle = (Pendulums[i].Angle / 360-
int(Pendulums[i].Angle / 360)) * 360 ;
     if (Pendulums[i].Angle < -360)
          Pendulums[i].Angle  =  (Pendulums[i].Angle  /  (-
360)-int(Pendulums[i].Angle / (-360))) * (-360) ;     }
}    UpdateArrays();
```

Выводы. Разработанная программа моделирует движение двух связанных маятников, используя численные методы. При построении модели применялся метод Эйлера решения дифференциальных уравнений, что с высокой достоверностью отображает не только визуальное движение маятников, но и построение графиков функций скорости, угла и ускорения в зависимости от времени. При запуске программы отображаются, в том числе, числовые параметры маятников.

При рассмотрении математического маятника рассматривался случай колебательных движений при небольших углах. В данной программе можно вводить углы до 360 градусов, но при этом нужно учитывать, что тогда используется не нить, а невесомый нерастяжимый стержень.

Созданную программу можно использовать как модель двойного маятника при исследовании колебаний, а также как методическое пособие на занятиях по физике, а так же и во внеурочной деятельности как виртуальную лабораторию, на занятиях по информатике и программированию для демонстрации и изучения приложений, разработанных на языке программирования C++.

ЛИТЕРАТУРА

1. Алексеев Д.В. Компьютерное моделирование физических задач в Microsoft Visual Basic / Д.В. Алексеев. – М. : Солон-Пресс, 2004. – 525 с.
2. Безгласный С.П. Ограниченное управление движениями двухмассового маятника / С.П. Безгласный, Е.Е. Пиякина, А.А. Талипова // Автоматизация процессов управления. – 2013. – № 4(34). – С. 35–41.
3. Бордовский Г.А. Физические основы математического моделирования / Г.А. Бордовский, А.С. Кондратьев, А.Д.Р. Чоудери. – М. : Академия, 2005. – 320 с.
4. Буланчук П.О. Управление точкой равновесия одинарного и двойного математических маятников косой вибрацией/ П.О. Буланчук, А.Г. Петров // Докл. РАН. – 2012. – Т. 442, № 4. – С. 474–478.
5. Буланчук П.О. Параметры вибрации точки подвеса для заданного положения равновесия двойного математического маятника / П.О. Буланчук, А.Г. Петров // Изв. РАН. Механика твердого тела. – 2013. – № 4. – С. 31–39.
6. Данилов О.Е. Использование компьютерной модели математического маятника при изучении механических колебаний в курсе физики // Молодой ученый. – 2014. – №18. – С. 17 – 24.
7. Иванов А.В. Исследование гомоклинических трансверсальных пересечений двойного математического маятника : дис. … канд. физ.-мат. наук : 01.01.03 / Иванов Алексей Валентинович. – Санкт-Петербург, 2000. – 148 с.
8. Крамаренко Т.А. Выбор языка программирования для разработки интерфейса информационной системы учёта оборудования в университете / Т.А. Крамаренко, А.В. Синотин // Теория и практика имитационного моделирования и создания тренажёров : сб. статей Междун. науч.–техн. конф. – Пенза: ПензГТУ, 2016. – С. 100–109.

9. Крамаренко Т. А. К вопросу использования систем компьютерного тестирования при подготовке специалистов в системе высшего образования / Т.А. Крамаренко // Вестник КГУ им. Н.А. Некрасова: Сер.: Педагогика. Психология. Социальная работа. – 2015. – № 3 (Июль – Август – Сентябрь). – Т. 21. – С. 121–126.

10. Кумицкий Б.М. Модель математического маятника как объект научно-исследовательской работы студентов в физпрактикуме/ Б.М. Кумицкий, Н.А. Саврасова // Материалы V Междунар. научн.-практ. конф. «Научные перспективы XXI века : Достижения и перспективы нового столетия». – Новосибирск, 2014. – С. 107–109.

11. Лукьяненко Т.В. Опыт использования системы Moodle для организации дистанционного обучения в ВУЗе / Т.В. Лукьяненко // Качество современных образовательных услуг – основа конкурентоспособности ВУЗА : сб. статей по материалам межфакультетской учебн.-методич. конф. Отв. за вып. М.В. Шаталова. – Краснодар : КубГАУ, 2016. – С. 301–303.

12. Лукьяненко Т.В. Программная реализация модели В.В.Леонтьева на языке C# / Т.В. Лукьяненко, Т.А. Крамаренко, В.Р. Лабинцева // Политематический сетевой электронный научный журнал Кубанского государственного аграрного университета (Научный журнал КубГАУ) [Электронный ресурс]. – Краснодар : КубГАУ, 2017. – №131(07). – С. 387–403. – IDA [article ID]: 1311707032. – Режим доступа: http://ej.kubagro.ru/2017/07/pdf/32.pdf.

13. Притыченко И.Ю. Разработка базы данных системы прогнозирования динамики цен на недвижимость / И.Ю. Притыченко, Т.В. Лукьяненко // Научное обеспечение агропромышленного комплекса : сб. ст. по материалам 71-й науч.-практ. конф. студентов по итогам НИР за 2015 год. – Краснодар : КубГАУ, 2016. – С. 395–398.

14. Программирование на языке Си++ : учеб. пособие / А.Г. Мурлин, В.А. Мурлина, Н.В. Ефанова, Е.А. Иванова. – Краснодар : КубГАУ, 2016. – 186 с.

15. Федорова Ю.А. Использование средств отладки в VBA / Ю.А. Федорова, Т.А. Крамаренко, Т.В. Лукьяненко // Информационное общество: современное состояние и перспективы развития : сб. материалов IX студенческого международного форума. – Краснодар : КубГАУ, 2017. – С. 348–350.

16. Холостова О.В. Об устойчивости относительных равновесий двойного маятника / О.В. Холостова // Изв. РАН. Механика твердого тела. – 2011. – № 4. – С. 18–30.

REFERENCES

1. Alekseev D.V. Komp'juternoe modelirovanie fizicheskih zadach v Microsoft Visual Basic / D.V. Alekseev. – M. : Solon-Press, 2004. – 525 s.

2. Bezglasnyj S.P. Ogranichennoe upravlenie dvizhenijami dvuhmassovogo majatnika / S.P. Bezglasnyj, E.E. Pijakina, A.A. Talipova // Avtomatizacija processov upravlenija. – 2013. – № 4(34). – S. 35–41.

3. Bordovskij G.A. Fizicheskie osnovy matematicheskogo modelirovanija / G.A. Bordovskij, A.S. Kondrat'ev, A.D.R. Chouderi. – M. : Akademija, 2005. – 320 s.

5. Bulanchuk P.O. Upravlenie tochkoj ravnovesija odinarnogo i dvojnogo matematicheskih majatnikov kosoj vibraciej/ P.O. Bulanchuk, A.G. Petrov // Dokl. RAN. – 2012. – T. 442, № 4. – S. 474–478.

6. Bulanchuk P.O. Parametry vibracii tochki podvesa dlja zadannogo polozhenija ravnovesija dvojnogo matematicheskogo majatnika / P.O. Bulanchuk, A.G. Petrov // Izv. RAN. Mehanika tverdogo tela. – 2013. – № 4. – S. 31–39.

7. Danilov O.E. Ispol'zovanie komp'juternoj modeli matematicheskogo majatnika pri izuchenii mehanicheskih kolebanij v kurse fiziki // Molodoj uchenyj. – 2014. – №18. – S. 17 – 24.

8. Ivanov A.V. Issledovanie gomoklinicheskih transversal'nyh peresechenij dvojnogo matematicheskogo majatnika : dis. … kand. fiz.-mat. nauk : 01.01.03 / Ivanov Aleksej Valentinovich. – Sankt-Peterburg, 2000. – 148 s.

9. Kramarenko T.A. Vybor jazyka programmirovanija dlja razrabotki interfejsa informacionnoj sistemy uchjota oborudovanija v universitete / T.A. Kramarenko, A.V. Sinotin // Teorija i praktika imitacionnogo modelirovanija i sozdanija trenazhjorov : sb. statej Mezhdun. nauch.–tehn. konf. – Penza: PenzGTU, 2016. – S. 100–109.

10. Kramarenko T.A. K voprosu ispol'zovanija sistem komp'juternogo testirovanija pri podgotovke specialistov v sisteme vysshego obrazovanija / T.A. Kramarenko // Vestnik KGU im. N.A. Nekrasova: Ser. : Pedagogika. Psihologija. Social'naja rabota. – 2015. – № 3 (Ijul' – Avgust – Sentjabr'). – T. 21. – S. 121–126.

10. Kumickij B.M. Model' matematicheskogo majatnika kak ob#ekt nauchno-issledovatel'skoj raboty studentov v fizpraktikume/ B.M. Kumickij, N.A. Savrasova // Materialy V Mezhdunar. nauchn.-prakt. konf. «Nauchnye perspektivy HHI veka : Dostizhenija i perspektivy novogo stoletija». – Novosibirsk, 2014. – S. 107–109.

11. Luk'janenko T.V. Opyt ispol'zovanija sistemy Moodle dlja organizacii distancionnogo obuchenija v VUZe / T.V. Luk'janenko // Kachestvo sovremennyh obrazovatel'nyh uslug – osnova konkurentosposobnosti VUZA : sb. statej po materialam mezhfakul'tetskoj uchebn.-metodich. konf. Otv. za vyp. M.V. Shatalova. – Krasnodar : KubGAU, 2016. – S. 301–303.

12. Luk'janenko T.V. Programmnaja realizacija modeli V.V.Leont'eva na jazyke S# / T.V. Luk'janenko, T.A. Kramarenko, V.R. Labinceva // Politematicheskij setevoj jelektronnyj nauchnyj zhurnal Kubanskogo gosudarstvennogo agrarnogo universiteta (Nauchnyj zhurnal KubGAU) [Jelektronnyj resurs]. – Krasnodar : KubGAU, 2017. – №131(07). – S. 387–403. – IDA [article ID]: 1311707032. – Rezhim dostupa: http://ej.kubagro.ru/2017/07/pdf/32.pdf.

13. Pritychenko I.Ju. Razrabotka bazy dannyh sistemy prognozirovanija dinamiki cen na nedvizhimost' / I.Ju. Pritychenko, T.V. Luk'janenko // Nauchnoe obespechenie agropromyshlennogo kompleksa : sb. st. po materialam 71-j nauch.-prakt. konf. studentov po itogam NIR za 2015 god. – Krasnodar : KubGAU, 2016. – S. 395–398.

14. Programmirovanie na jazyke Si++ : ucheb. posobie / A.G. Murlin, V.A. Murlina, N.V. Efanova, E.A. Ivanova. – Krasnodar : KubGAU, 2016. – 186 s.

15. Fedorova Ju.A. Ispol'zovanie sredstv otladki v VBA / Ju.A. Fedorova, T.A. Kramarenko, T.V. Luk'janenko // Informacionnoe obshhestvo: sovremennoe sostojanie i perspektivy razvitija : sb. materialov IX studencheskogo mezhdunarodnogo foruma. – Krasnodar : KubGAU, 2017. – S. 348 – 350.

16. Holostova O.V. Ob ustojchivosti otnositel'nyh ravnovesij dvojnogo majatnika / O.V. Holostova // Izv. RAN. Mehanika tverdogo tela. – 2011. – № 4. – S. 18–30.