УДК 530.12+524.7

01.00.00 Физико-математические науки

ЗАДАЧА МНОГИХ ТЕЛ В МЕТРИКЕ С РАСПРЕДЕЛЕНИЕМ ИСТОЧНИКОВ НА ОКРУЖНОСТИ

Трунев Александр Петрович
к.ф.-м.н., Ph.D.
Директор, A&E Trounev IT Consulting, Торонто, Канада

В настоящей работе мы рассматриваем задачу многих тел в общей теории относительности в случае распределения N сингулярностей на окружности. Указано точное решение задачи для произвольного распределения сингулярностей. Показано, что статическая метрика с N сингулярностями соответствует в теории Ньютона N центрам тяготения, движущимся вокруг центрального тела по круговой орбите в неинерциальной системе отсчета, вращающейся с периодом обращения тел. Рассмотрена постановка задачи многих тел распределенных в начальный момент времени на окружности. В численных расчетах изучены свойства гравитационных потенциалов в задаче об установлении статического состояния, при котором несколько сингулярностей сохраняют начальное положение на окружности. Это достигается за счет релятивистских эффектов, не имеющих аналогов в теории тяготения Ньютона. Используя свойства релятивистских потенциалов, обоснован переход от релятивистской модели движения частиц к динамическим уравнениям в классической теории. Выведена система нелинейных уравнений параболического типа, описывающая эволюцию метрики в потоках Риччи. Сформулирована задача об установлении потенциалов системы в потоках Риччи. Рассматривается применение теории для описания кольцеобразных галактик, планетарных колец и пояса астероидов

Ключевые слова: КОЛЬЦЕОБРАЗНАЯ ГАЛАКТИКА, ПРОБЛЕМА МНОГИХ ТЕЛ, ОБЩАЯ ТЕОРИЯ ОТНОСИТЕЛЬНОСТИ, ПОТОКИ РИЧЧИ

Doi: 10.21515/1990-4665-123-132

UDC 530.12+524.7

Physics and Math

MANY-BODY PROBLEM IN THE METRIC OF CIRCULAR DISTRIBUTED SOURSES

Alexander Trunev
Cand.Phys.-Math.Sci., Ph.D.
Director, A&E Trounev IT Consulting, Toronto, Canada

In this article we consider the many-body problem in general relativity in the case of the distribution of N singularities on the circle. It specifies the exact solution of the problem for an arbitrary distribution of singularities. It is shown that the static metric of N singularities corresponds to Newton's theory of N centers of gravity, moving around the central body in a circular orbit in a non-inertial frame of reference, rotating with a period of bodies revolving. We consider the statement of the problem of many bodies distributed at the initial time on the circle. In numerical calculations, we studied the properties of the gravitational potential in the problem of establishing a static condition in which multiple singularities retain the initial position on the circle. This is achieved due to relativistic effects, which have no analogues in Newton's theory of gravitation. Using the properties of relativistic potentials justified transition from the relativistic motion of the particles to the dynamic equations in the classical theory. A system of non-linear parabolic equations describing the evolution of the metric in the Ricci flow proposed. The problem of the calculation of the potentials in the Ricci flow formulated. The application of the theory to describe the ring galaxy, planetary rings and the asteroid belt considered

Keywords: GENERAL RELATIVITY, MANY-BODY PROBLEM, RICCI FLOW, RING GALAXY

Введение

В работах [1-6] была исследована задача многих тел в общей теории относительности в случае аксиально-симметричных метрик. В [1] исследовано движение релятивистских частиц в метрике с двумя центрами тяготения, представленных сингулярностями гравитационного поля. В работе [2] изучено слияние сингулярностей гравитационного поля в потоках Риччи в аксиально-симметричных метриках. Установлено, что в результате слияния частиц в потоках Риччи образуется устойчивая статическая система, состоящая из гравитационного поля и содержащая особенность, имитирующая частицу.

В численных экспериментах [2-5] было обнаружено, что столкновение частиц в потоках Риччи приводит к образованию гравитационных волн, похожих по своей структуре на волны, зарегистрированные в экспериментах [7-9]. Следовательно, можно предположить, что наблюдаемые гравитационные волны обусловлены, главным образом, переходными процессами, связанными с изменением метрики системы [3].

В работах [4-5] исследована задача о рождении материи при столкновении частиц, представленных сингулярностями гравитационного поля. В качестве примера рассматривается метрика [10], обладающая осевой симметрией и содержащая две сингулярности, имитирующие частицы конечной массы. В численных экспериментах установлено, что столкновение частиц в потоках Риччи приводит к образованию материи трех типов - с положительной и с отрицательной плотностью энергии соответственно [4], а также цветной материи [5].

В работе [6] сформулирована ограниченная задача многих тел в потоках Риччи в общей теории относительности. Изучено расширение метрики [10] на случай трех [11] и более сингулярностей. Показано, что в случае ограниченной задачи трех тел метрика [10] с двумя сингулярностями соответствует в теории Ньютона двум центрам тяготения, движущимся вокруг центра масс по круговым орбитам в неинерциальной системе отсчета, вращающейся с периодом обращения тел.

Задача многих тел в общей теории относительности рассматривалась в работах [1-24] и других. В работе [16] была показано, что уравнений поля для пустого пространства достаточно для описания движения материи представленной в виде точечных сингулярностей. Следовательно, движение материальных частиц, представленных сингулярностями гравитационного поля, является одной из проблем общей теории относительности [16-19]. В таком подходе используются только гравитационные уравнения в пустом пространстве.

Как известно, для описания движения инертной материи в рамках общей теории относительности Эйнштейн и Инфельд сформулировали программу [18]: «Все попытки представить материю тензором энергии-импульса неудовлетворительны, и мы хотим освободить нашу теорию от специального выбора такого тензора. Поэтому мы будем иметь дело здесь только с гравитационными уравнениями в пустом пространстве, а материя будет представлена сингулярностями гравитационного поля».

Отметим, что в существующих подходах к описанию черных дыр широко используется метрика Шварцшильда [20], описывающая сингулярность гравитационного поля, что физически интерпретируется как поле частицы заданной массы.

В альтернативном подходе к описанию движения материальных тел используется тензор энергии-импульса [13-15, 21-25]. Однако в этом случае теория обрастает большим числом гипотез, связанных с неопределенностью понятия материя, особенно в свете последних открытий в астрофизике, указывающих на значительный (95%) вклад темной материи и темной энергии в динамику расширяющейся Вселенной [26].

В настоящей работе рассматривается модификация аксиально-симметричной метрики [1-6], в которой осевая координата является циклической, что соответствует распределению сингулярностей на окружности. Соответственно этой метрике сформулированы задачи [1-6] и, в частности, задача многих тел [6], которая в новой постановке описывает динамику тел при их начальном распределении на окружности. Рассматривается применение теории для описания кольцеобразных галактик, планетарных колец и пояса астероидов.

Аксиально-симметрические поля

Уравнения Эйнштейна имеют вид [27-30]:

$$R_{\mu\nu} - \frac{1}{2} g_{\mu\nu} R = g_{\mu\nu} \Lambda + \frac{8\pi G}{c^4} T_{\mu\nu} \tag{1}$$

Здесь $R_{\mu\nu}, g_{\mu\nu}, T_{\mu\nu}$ - тензор Риччи, метрический тензор и тензор энергии-импульса; Λ, G, c - космологическая постоянная Эйнштейна, гравитационная постоянная и скорость света соответственно. Ниже положим $\Lambda = 0$, что обусловлено малостью влияния этого параметра в ограниченной задаче многих тел.

Решения уравнений Эйнштейна, обладающие осевой симметрией, рассматривались в работах [1-6, 10-12, 28-32] и других (обзор публикаций дан, например, в [29-31]). Метрика таких пространств, при некоторых предположениях, может быть приведена к виду

$$ds^2 = e^{\mu} dt^2 - e^{-\mu} (e^{\nu} d\rho^2 + e^{\nu} dz^2) - e^{-\mu} \rho^2 d\phi^2 \tag{2}$$

Здесь $\mu(\rho,z),\nu(\rho,z)$ - функции, удовлетворяющие уравнениям Эйнштейна. Вычисляя компоненты тензора Эйнштейна $G_{\alpha\beta}=R_{\alpha\beta}-\frac{1}{2}Rg_{\alpha\beta}$ в метрике (2) и полагая для вакуума

$$G_{\alpha\beta}=R_{\alpha\beta}-\tfrac{1}{2}Rg_{\alpha\beta}=0,$$

находим уравнения поля:

$$\begin{aligned}
&\omega_1=\frac{\partial^2\mu}{\partial\rho^2}+\frac{1}{\rho}\frac{\partial\mu}{\partial\rho}+\frac{\partial^2\mu}{\partial z^2}=0,\\
&\omega_2=\frac{\partial\nu}{\partial\rho}-\frac{\rho}{2}\left[\left(\frac{\partial\mu}{\partial\rho}\right)^2-\left(\frac{\partial\mu}{\partial z}\right)^2\right]=0,\\
&\omega_3=\frac{\partial\nu}{\partial z}-\rho\frac{\partial\mu}{\partial\rho}\frac{\partial\mu}{\partial z}=0,\\
&\omega_4=\frac{\partial^2\nu}{\partial\rho^2}+\frac{\partial^2\nu}{\partial z^2}+\frac{1}{2}\left[\left(\frac{\partial\mu}{\partial\rho}\right)^2+\left(\frac{\partial\mu}{\partial z}\right)^2\right]=0.
\end{aligned}\tag{3}$$

Можно проверить, что не все уравнения (3) являются независимыми и что выполняются следующие два соотношения [29]

$$\omega_4\equiv\frac{\partial\omega_2}{\partial\rho}+\frac{\partial\omega_3}{\partial z}+\rho\omega_1\frac{\partial\mu}{\partial\rho},\quad \rho\omega_1\frac{\partial\mu}{\partial z}\equiv\frac{\partial\omega_2}{\partial z}-\frac{\partial\omega_3}{\partial\rho}\tag{4}$$

Следовательно, можно в качестве системы уравнений для определения двух функций $\mu(\rho,z),\nu(\rho,z)$ выбрать, например, первое и четвертое уравнения (3), имеем

$$\begin{aligned}
&\frac{\partial^2\mu}{\partial\rho^2}+\frac{1}{\rho}\frac{\partial\mu}{\partial\rho}+\frac{\partial^2\mu}{\partial z^2}=0,\\
&\frac{\partial^2\nu}{\partial\rho^2}+\frac{\partial^2\nu}{\partial z^2}+\frac{1}{2}\left[\left(\frac{\partial\mu}{\partial\rho}\right)^2+\left(\frac{\partial\mu}{\partial z}\right)^2\right]=0.
\end{aligned}\tag{5}$$

Разрешая систему уравнений (5) приходим к определению статических полей гравитации в случае осевой симметрии. Отметим, что в нерелятивистском пределе потенциал $\mu=2\varphi/c^2$, где φ - гравитационный потенциал в теории гравитации Ньютона. Из второго уравнения (5) находим оценку $\nu \sim \mu^2 = 4\varphi^2 / c^4$.

Рассмотрим решения системы уравнений (3) вида

$$\mu = -\sum_{j=1}^{N} \frac{m_j}{\sqrt{\rho^2 + (z - L_j)^2}},$$
$$\nu = -\sum_{j=1}^{N} \frac{m_j{}^2 \rho^2}{4(\rho^2 + (z - L_j)^2)^2} + \sum_{j \neq k} \frac{m_j m_k}{2(L_j - L_k)^2} \left[\frac{(\rho^2 + (z - L_j)(z - L_k))}{\sqrt{\rho^2 + (z - L_j)^2}\sqrt{\rho^2 + (z - L_k)^2}} - 1 \right] \quad (6)$$

Отметим, что выражения (6) отличаются нормировкой от выражений приведенных, например, в [31] в силу определения метрики (2). В частном случае, полагая в (6) $j = 2$, приходим к выражению потенциалов, впервые полученных в работе [10]

$$\mu_S(\rho, z, L_1, L_2) = -\frac{m_1}{\sqrt{\rho^2 + (z - L_1)^2}} - \frac{m_2}{\sqrt{\rho^2 + (z - L_2)^2}},$$
$$\nu_S(\rho, z, L_1, L_2) = -\frac{m_1{}^2 \rho^2}{4(\rho^2 + (z - L_1)^2)^2} - \frac{m_2{}^2 \rho^2}{4(\rho^2 + (z - L_2)^2)^2} + \quad (7)$$
$$\frac{m_1}{\sqrt{\rho^2 + (z - L_1)^2}} \frac{m_2}{\sqrt{\rho^2 + (z - L_2)^2}} \frac{(\rho^2 + (z - L_1)(z - L_2))}{(L_1 - L_2)^2} - \frac{m_1 m_2}{(L_1 - L_2)^2}$$

В частном случае трех тел потенциалы μ, ν были получены в работе [11]. Выражения (6)-(7) представляют интерес в теории движения, столкновения и слияния частиц, представленных сингулярностями поля, с излучением гравитационных волн в потоках Риччи [1-5].

Выражения (7) подверглись критике со стороны Эйнштейна и Розена [12], как лишенные физического смысла. Действительно, в нерелятивистском случае потенциал μ в (7) сводится к выражению $\mu = 2\varphi / c^2$, где φ - гравитационный потенциал в теории гравитации Ньютона. Но тогда этот потенциал сводится к потенциалу двух точечных масс, расположенных на оси симметрии системы в точках $z = L_{1,2}$.

Поскольку точечные массы в метрике (2) с потенциалами (7) не испытываю взаимного перемещения, хотя должны притягиваться согласно теории Ньютона, автор [10] делает ошибочный вывод, что не верна теория относительности Эйнштейна. В действительности, однако, в теории Ньютона существует статическое решение для двух тяготеющих масс, движущихся по круговым орбитам в синодической системе координат - неинерциальной системе отсчета вращающейся синхронно с периодом обращения тел [33].

Как известно, синодическая система координат применяется в постановках ограниченной задачи трех тел в классической механике [33-35], что может быть использовано в формулировке аналогичной задачи в общей теории относительности. Различие же этих двух задач заключается в наличии потенциала ν, который не имеет аналогов в теории Ньютона, но играет роль аналогичную эффектам неинерциальной системы отсчета в классической механике [6].

Чтобы расширить указанную аналогию, положим в метрике (2)

$$z = R_0 \phi_1 \tag{8}$$

Здесь R_0 – некоторая константа (большой радиус тора), угол ϕ_1 – есть циклическая координата. При такой замене метрика (2) и уравнения (5) не изменятся, однако решение (6) имеет уже иной физический смысл, так как описывает гравитационные потенциалы источников, распределенных по окружности. Такое распределение может быть использовано для описания кольцеобразных галактик, планетарных колец и пояса астероидов.

Рассмотрим решение системы уравнений (5) вида [32]

$$\begin{aligned} \mu &= -\frac{m}{\sqrt{\rho^2 + z^2}} + a \ln \rho, \\ \nu &= -\frac{m^2 \rho^2}{4(\rho^2 + z^2)^2} - \frac{am}{\sqrt{\rho^2 + z^2}} + \frac{a^2}{2} \ln \rho \end{aligned} \tag{9}$$

Отметим, что выражение потенциала μ в форме (8) согласуется с выражением гравитационного потенциала, полученным в нерелятивистском приближении путем обработки данных для 50 галактик [32].

Динамика релятивистских частиц

Движение релятивистских частиц в гравитационном поле в общем случае описывается уравнением

$$\frac{d^2x^\mu}{ds^2}+\Gamma^\mu_{\nu\lambda}\frac{dx^\nu}{ds}\frac{dx^\lambda}{ds}=0 \tag{10}$$

Γ^i_{kl} – символы Кристоффеля второго рода. Символы Кристоффеля вычисляются в метрике (2) согласно

$$\begin{gathered}\Gamma^0_{10}=\frac{\mu_\rho}{2},\,\Gamma^0_{20}=\frac{\mu_z}{2},\\ \Gamma^1_{00}=\frac{\mu_\rho}{2}e^{2\mu-\nu},\,\Gamma^1_{11}=\frac{\nu_\rho-\mu_\rho}{2},\,\Gamma^1_{21}=\frac{\nu_z-\mu_z}{2},\,\Gamma^1_{22}=\frac{-\nu_\rho+\mu_\rho}{2},\Gamma^1_{33}=\frac{\rho\mu_\rho-2}{2}re^{-\nu},\\ \Gamma^2_{00}=\frac{\mu_z}{2}e^{2\mu-\nu},\Gamma^2_{11}=\frac{-\nu_z+\mu_z}{2},\Gamma^2_{21}=\frac{\nu_\rho-\mu_\rho}{2},\;\Gamma^2_{22}=\frac{\nu_z-\mu_z}{2},\Gamma^2_{33}=\frac{\rho^2\mu_z}{2}e^{-\nu},\\ \Gamma^3_{31}=\frac{1}{\rho}-\frac{\mu_\rho}{2},\,\Gamma^3_{32}=-\frac{\mu_z}{2}\end{gathered} \tag{11}$$

Здесь индексы 0,1,2,3 соответствуют координатам t,ρ,z,ϕ.

Определим компоненты скорости согласно [27]

$$\mathrm{v}_\alpha=\gamma_{\alpha\beta}\,\mathrm{v}^\beta,\quad \gamma_{\alpha\beta}=-g_{\alpha\beta}+\frac{g_{0\alpha}g_{0\beta}}{g_{00}} \tag{12}$$

Здесь индексы $\alpha,\beta=1,2,3$.

Как известно, при движении частицы в постоянном поле сохраняется полная энергия [27]

$$E_0=\frac{m_0c^2\sqrt{g_{00}}}{\sqrt{1-\mathrm{v}^2/c^2}} \tag{13}$$

Система уравнений (10) решалась численно в работах [1, 6]. Для нахождения устойчивых орбит начальные данные задавались исходя из решения аналогичной задачи в метрике Шварцшильда. Как известно, радиус ближайшей к центру устойчивой круговой орбит в метрике Шварцшильда и ее момент определяются величиной гравитационного радиуса, $r_g = 2Gm/c^2$, а энергия частицы на такой орбите не зависит от геометрических параметров, имеем [27]:

$$r = 3r_g\,,\quad M = \sqrt{3}m_0 c r_g\,,\quad E_0 = \frac{m_0 c^2 \sqrt{g_{00}}}{\sqrt{1-\mathrm{v}^2/c^2}} = \sqrt{\frac{8}{9}}m_0 c^2 \approx 0.942809 m_0 c^2 \qquad (14)$$

Здесь m_0- масса частицы. Траектории частицы представляют собой навитые на центральное ядро кривые сильно вытянутые в плоскости ортогональной оси симметрии системы. Частица в своем движении удаляется от центра на значительно расстояние. Энергия частицы сохраняется в численных расчетах с точностью 10^{-6}, а по величине превосходит энергию на устойчивых круговых орбитах в метрике Шварцшильда вычисленной согласно (14). Скорость частицы достигает величины $\mathrm{v}/c \approx 0.7$ [1].

В отличие от классической ограниченной задачи трех тел [33-35], в которой для упрощения задачи необходимо осуществить переход в неинерциальную систему координат, метрика (2) изначально является статической, а используемая система координат не является инерциальной по определению.

Более того, как это следует из выражений (7), у метрики Зильберштейна [10] нет нерелятивистского предела, поскольку потенциалы этой метрики содержат сингулярности. В метрике же (9), содержащей логарифмическое слагаемое, потенциалы имеют один порядок величины $\nu \approx \mu$. Поэтому переход к теории Ньютона является проблематичным в указанных метриках. Тем не менее, такой переход был построен в [6] путем формального разложения уравнений по малому параметру $\nu \sim \mu^2 = 4\varphi^2/c^4$.

Рассмотрим уравнения движения (10) с коэффициентами аффинной связности (11), в общем случае имеем:

$$\begin{aligned}
&\frac{d^2t}{ds^2}+\frac{dt}{ds}\frac{dr}{ds}\frac{\partial\mu}{\partial r}+\frac{dt}{ds}\frac{dz}{ds}\frac{\partial\mu}{\partial z}=0,\\
&\frac{d^2r}{ds^2}+\frac{e^{2\mu-\nu}}{2}t_s^2\mu_r+\frac{e^{-\nu}}{2}r\phi_s^2(r\mu_r-2)+r_sz_s(\nu_z-\mu_z)+\frac{z_s^2}{2}(\mu_r-\nu_r)-\frac{r_s^2}{2}(\mu_r-\nu_r)=0,\\
&\frac{d^2z}{ds^2}+\frac{e^{-\nu}}{2}(e^{2\mu}t_s^2+r^2\phi_s^2)\mu_z+r_sz_s(\nu_r-\mu_r)-\frac{z_s^2}{2}(\mu_z-\nu_z)+\frac{r_s^2}{2}(\mu_z-\nu_z)=0,\\
&\frac{d^2\phi}{ds^2}-\frac{\phi_s}{r}(rz_s\mu_z+r_s(r\mu_r-2))=0.
\end{aligned} \tag{15}$$

Здесь $r=\rho, t_s=dt/ds, r_s=dr/ds, z_s=dz/dz, \phi_s=d\phi/ds$. Построим формальное разложение уравнений (15) по малому параметру $\nu \sim \mu^2 << 1$, в первом приближении имеем

$$\begin{aligned}
&\frac{d^2t}{ds^2}+\frac{dt}{ds}\frac{dr}{ds}\frac{\partial\mu}{\partial r}+\frac{dt}{ds}\frac{dz}{ds}\frac{\partial\mu}{\partial z}=0,\\
&\frac{d^2r}{ds^2}-r\phi_s^2-\frac{dz}{ds}\frac{dr}{ds}\frac{\partial\mu}{\partial z}+\frac{1}{2}(t_s^2+z_s^2+r^2\phi_s^2-r_s^2)\frac{\partial\mu}{\partial r}=0,\\
&\frac{d^2z}{ds^2}+\frac{dz}{ds}\frac{dr}{ds}\frac{\partial\mu}{\partial r}+\frac{1}{2}(t_s^2-z_s^2+r^2\phi_s^2+r_s^2)\frac{\partial\mu}{\partial z}=0,\\
&\frac{d^2\phi}{ds^2}-\frac{\phi_s}{r}(rz_s\mu_z+r_s(r\mu_r-2))=0.
\end{aligned} \tag{16}$$

В нерелятивистской теории необходимо положить в уравнениях (16) $t_s=1$, а все тройные произведения положить равными нулю. В результате этих упрощений находим систему уравнений, описывающих динамику частицы во внешнем гравитационном поле в теории Ньютона

$$\begin{aligned}
&t=s,\quad \frac{d^2r}{ds^2}-r\phi_s^2+\frac{1}{2}\frac{\partial\mu}{\partial r}=0,\\
&\frac{d^2z}{ds^2}+\frac{1}{2}\frac{\partial\mu}{\partial z}=0,\quad \frac{d^2\phi}{ds^2}+\frac{2\phi_s r_s}{r}=0.
\end{aligned} \tag{17}$$

Здесь мы можем восстановить размерность времени, полагая $s = ct$ и учесть, что в нерелятивистском случае потенциал μ в (17) сводится к выражению $\mu = 2\varphi / c^2$, где φ - потенциал в теории гравитации Ньютона. Учитывая, что последнее уравнение (17) имеет первый интеграл, находим окончательно

$$\begin{aligned} &\frac{d^2 r}{dt^2} - r\phi_t^2 + \frac{\partial \varphi}{\partial r} = 0, \\ &\frac{d^2 z}{dt^2} + \frac{\partial \varphi}{\partial z} = 0, \quad r^2 \phi_t = const. \end{aligned} \tag{18}$$

В классической механике систему уравнений (18) упрощают, оставляя только первое и последнее уравнения

$$\frac{d^2 r}{dt^2} - r\phi_t^2 + \frac{\partial \varphi}{\partial r} = 0, \quad r^2 \phi_t = const. \tag{19}$$

Таким образом, мы показали, что система уравнений (16), описывающих динамику релятивистских частиц в метрике (2) может быть сведена к стандартной модели классической механики (16), описывающей динамику нерелятивистских частиц в центрально-симметрическом поле. Однако при этом метрика (2) с потенциалами (6), (7) или (9) не сводится к галилеевой метрике, что обусловлено наличием сингулярностей [6, 12].

Основное свойство метрики (2) заключается в том, что система N тел представляется как статическая система, что достигается за счет релятивистских эффектов, которые обеспечиваются вторым потенциалом системы (5), не имеющим аналогов в теории Ньютона. Используя это свойство метрики (2), можно сформулировать ограниченную задачу $N+1$ тел как движение одного тела в статической системе N тел, обладающей, например, потенциалами (6). В этом случае постановка ограниченной задачи для $N+1$ тел в теории тяготения Ньютона сводится к решению системы уравнений (18) с потенциалом μ в форме (6).

Рассмотрим противоположный случай, когда $\mu/\nu \sim 1/\sqrt{N} << 1$ [5]. Это, в частности, выполняется в случае системы состоящей из большого числа частиц, обладающих логарифмическим потенциалом [36]. В первом приближении положим в системе уравнений (15) $\mu = 0$, тогда получим

$$\begin{aligned}
&\frac{d^2t}{ds^2} = 0,\ \frac{d^2r}{ds^2} - e^{-\nu} r\phi_s^2 + r_s z_s \nu_z + \frac{1}{2}(r_s^2 - z_s^2)\nu_r = 0,\\
&\frac{d^2z}{ds^2} + r_s z_s \nu_r - \frac{1}{2}(r_s^2 - z_s^2)\nu_z = 0,\\
&r^2\phi_s = M = const.
\end{aligned} \tag{20}$$

Здесь M – момент импульса частицы. Первое уравнение (20) может быть проинтегрировано, в результате находим $t = s$. Отметим, что в частном случае движения в плоскости (r,z) система уравнений (18) при замене переменных сводится к модели, описывающей плоское движение в 6D [36].

Рассмотрим решение второго уравнения (5), содержащее N особенностей логарифмического типа [5]

$$\nu = -\sum_{i=1}^{N} b_i \ln\sqrt{(\rho-\rho_i)^2 + (z-L_i)^2} \tag{21}$$

При заданном потенциале (21) система уравнений (20) может быть решена численно [5]. Для отображения траектории движения введем координаты $x = r\cos\phi,\ y = r\sin\phi,\ z = z$. На рис. 1 приведены типичные траектории движения релятивистских частиц в метрике (2) с потенциалами (20), вычисленные при начальных данных:

$$\begin{aligned}
&M = 0.1;\ N = 60,\ b_i = 0.1,\ \rho_i = 6 + 4\sin(i2\pi/N),\\
&z_i = 6 + 4\cos(i2\pi/N), i = 0,...,59;\ r(0) = 5.06663,\ r'(0) = 0.01209,\\
&z(0) = 5.01891,\ z'(0) = 0.02091,\ \phi(0) = 0.
\end{aligned}$$

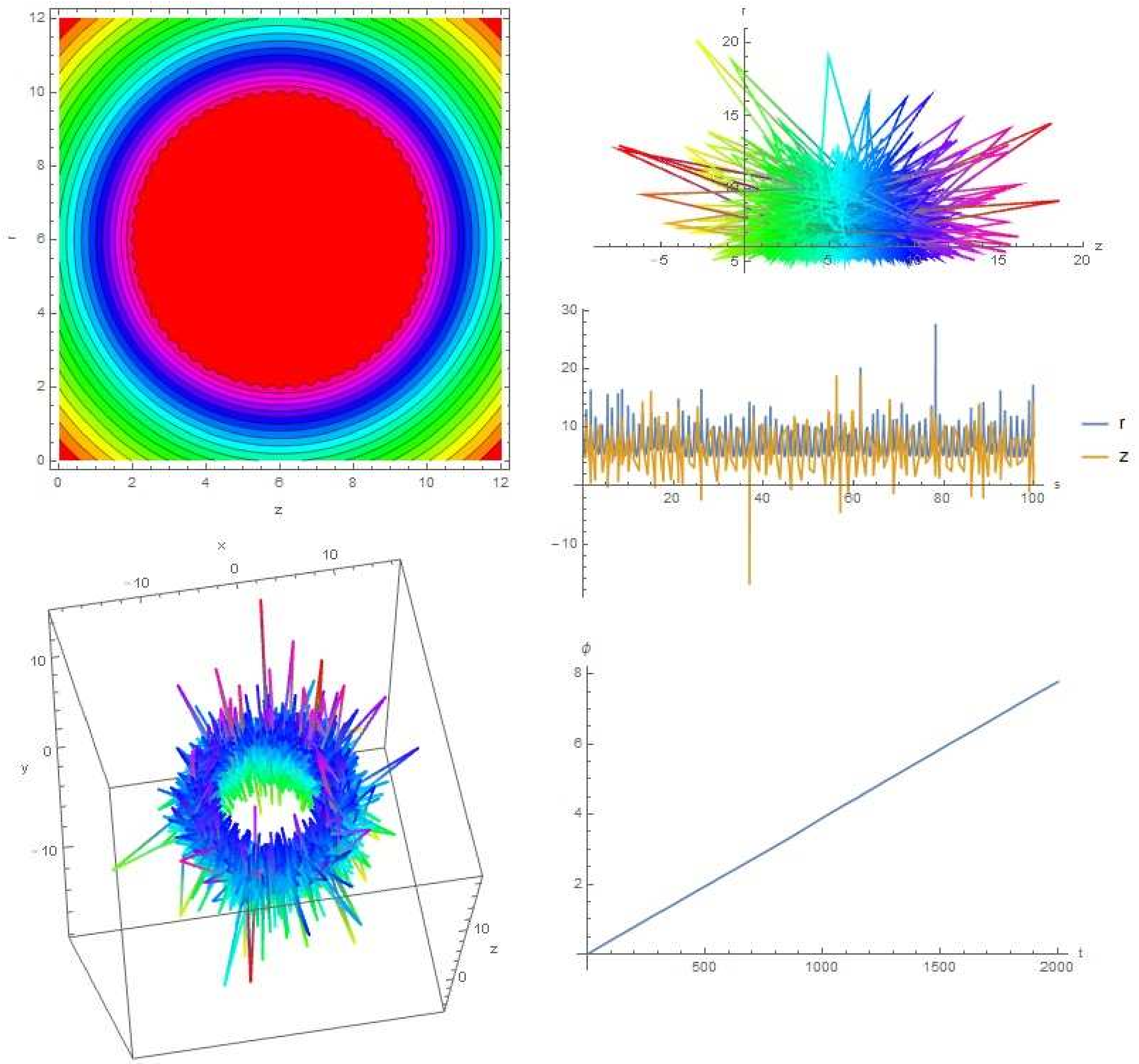

Рис. 1. Линии уровня потенциала системы при распределении особенностей логарифмического типа на окружности (вверху, слева) и траектории частиц в метрике (2), полученные путем численного решения системы уравнений (20) с потенциалом (21).

Траектория движения в логарифмическом потенциале (10) выглядит как тор покрытый игами – нижний левый рис. 1. В плоскости (r,z) траектория выглядит как клубок спутанных ниток – верхний правый рис. 1, что является основным признаком хаотического поведения.

На рис. 2 представлены линии уровня и траектории движения релятивистских частиц в метрике (2) с потенциалами (6), вычисленные при начальных данных:

$$N = 11, m_i = 1, R_0 = 11, L_i = R_0 \sin(i2\pi / N), i = 0,..., N-1; t(0) = 0.t'(0) = 1,$$
$$r(0) = 18, r'(0) = 0., z(0) = 0, z'(0) = 0.03, \phi(0) = 0, \phi'(0) = 0.02$$

Для отображения траектории движения введены новые координаты $x = (R_0 + r\cos\phi)\cos(z/R_0),\ y = (R_0 + r\sin\phi)\cos(z/R_0),\ z = r\sin(z/R_0)$. В этом случае, не смотря на большое число частиц, траектория не выглядит хаотической, что объясняется регулярность распределения сингулярностей одинаковой массы.

Движение сингулярностей в потоках Риччи

Модель (5) обладает уникальным свойством расширения в теории потоков Риччи [37-44], что позволяет задавать движение в системе N тел. В этом случае гравитационные потенциалы в системе уравнений (16) зависят от времени по заданному закону [2-6].

Для моделирования изменения метрики при движении сингулярностей используем потоки Риччи [37-44], которые описываются уравнением

$$\frac{\partial g_{ik}}{\partial t} = D_0 R_{ik} \tag{22}$$

Здесь D_0 – коэффициент диффузии, которые в стандартной теории [37-44] полагают равным $D_0 = -2$, однако в метрике (2) с учетом сигнатуры следует положить $D_0 = 2$, тогда (5) сводится к системе уравнений параболического типа:

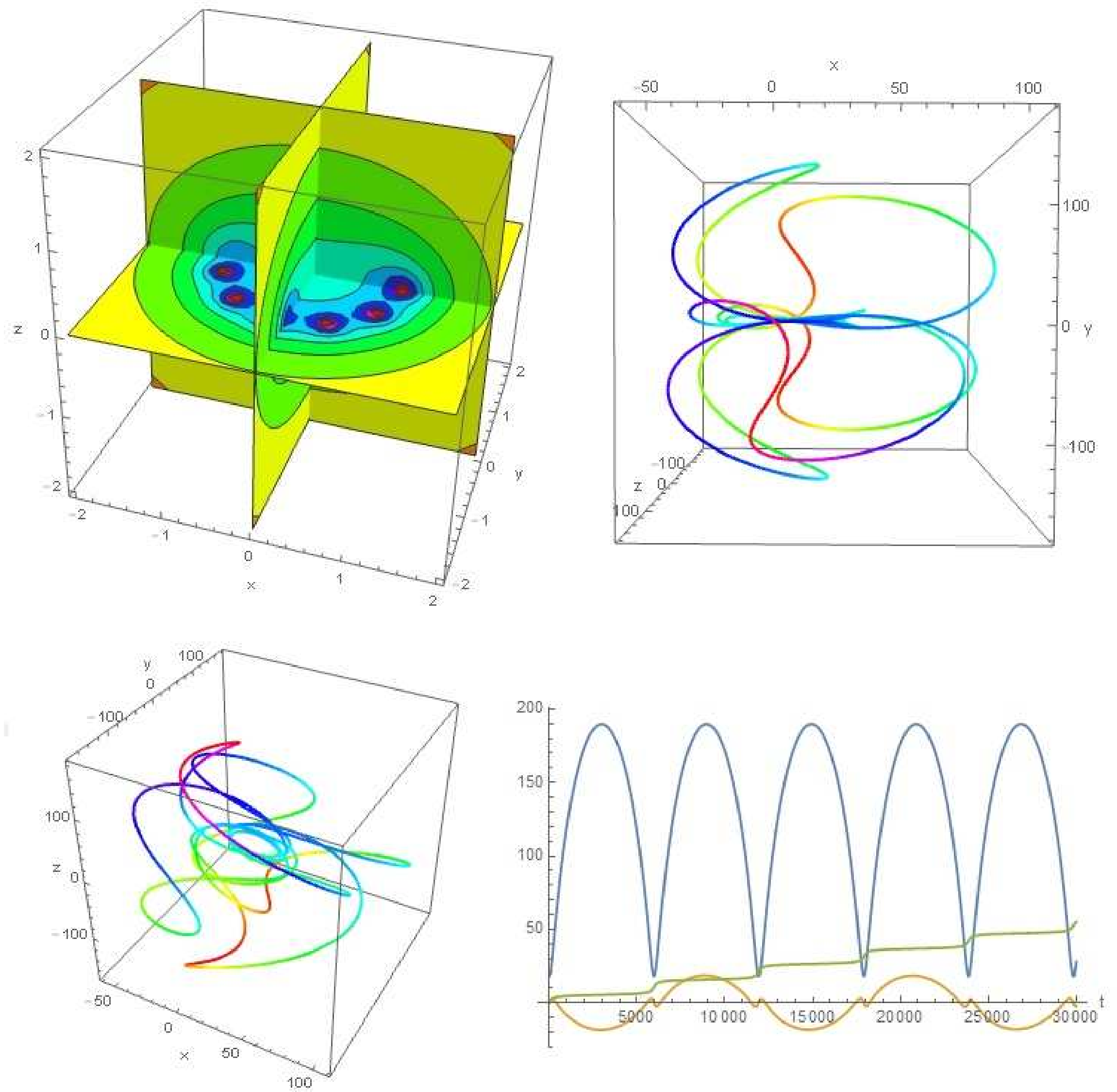

Рис. 1. Линии уровня потенциала системы при распределении сингулярностей на окружности (вверху, слева) и траектории частиц в метрике (2), полученные путем численного решения системы уравнений (15) с потенциалами (6). Внизу справа представлены зависимости координат r, z, ϕ от времени – синяя, желтая и зеленая кривая соответственно.

$$e^{\nu-\mu}\frac{\partial\mu}{\partial t}=\frac{\partial^2\mu}{\partial\rho^2}+\frac{1}{\rho}\frac{\partial\mu}{\partial\rho}+\frac{\partial^2\mu}{\partial z^2}$$
$$e^{\nu-\mu}\frac{\partial\nu}{\partial t}=\frac{\partial^2\nu}{\partial\rho^2}+\frac{\partial^2\nu}{\partial z^2}+\frac{1}{2}\left[\left(\frac{\partial\mu}{\partial\rho}\right)^2+\left(\frac{\partial\mu}{\partial z}\right)^2\right] \qquad (23)$$

Сравнивая (23) и (5) находим, что для установившихся потоков при условиях $\mu_t=\nu_t=0$ система (23) сводится к (5). Обоснованием для такого перехода от статической системы (5) к системе уравнений параболического типа (23) может служить теория, развитая в работах [37-44] и других.

Физический смысл расширения статической модели (5) до модели (23), описывающей потоки Риччи, заключается в том, что по начальным и граничным условиям можно определить к каким решениям сходится решение системы уравнений (5), содержащее особенности, например, решение (6).

Для многих практически важных задач, таких как слияние черных дыр [7-9], достаточно будет знать, как изменяется метрика бинарной системы при сближении центров гравитации с заданной скоростью. Модель потоков Риччи (23) позволяет ответить на этот и другие вопросы, связанные с изменением метрики [2-6].

Рассмотрим задачу об установлении потенциалов системы (23) при столкновении N сингулярностей в прямоугольной области $r_0\le\rho\le R, -L/2\le z\le L/2$ при заданном начальном условии

$$t=0:\mu(0,\rho,z)=\mu_0(\rho,z,\{m_i,L_i\})=-\sum_{i=1}^{N}\frac{m_i}{\sqrt{\rho^2+(z-L_i)^2}},$$
$$\nu(0,\rho,z)=\nu_0(\rho,z,\{m_i,L_i\}) \qquad (24)$$

Здесь функция ν_0 задается вторым уравнением (6). Решение будет зависеть от краевых условий, которые мы сформулируем следующим образом:

$$
\begin{aligned}
&t>0:\mu(t,r_0,z)=\mu_0(r_0,z,\{m_i,L_i\}),\quad \nu(t,r_0,z)=\nu_0(r_0,z,\{m_i,L_i\}),\\
&\mu(t,R,z)=\mu_0(R,z,\{m_i,L_i\}),\quad \nu(t,R,z)=\nu_0(R,z,\{m_i,L_i\}),\\
&\mu(t,\rho,-L/2)=\mu_0(\rho,-L/2,\{m_i,L_i\}),\quad \nu(t,\rho,-L/2)=\nu_0(\rho,-L/2,\{m_i,L_i\}),\\
&\mu(t,\rho,L/2)=\mu_0(\rho,L/2,\{m_i,L_i\}),\quad \nu(t,\rho,L/2)=\nu_0(\rho,L/2,\{m_i,L_i\}).
\end{aligned}
\tag{25}
$$

Здесь r_0 - граница области, отделяющая область численного интегрирования от оси системы, содержащей сингулярные точки потенциала (9). Такая постановка задачи позволяет исключить сингулярности в решениях. Наконец, положим $z=R_0\phi_1,\ L=2\pi R_0$, тогда, задавая движение сингулярностей в виде $L_i=L_i(t)$ и условие периодичности на краях $z=\pm L/2$, имеем постановку задачи о столкновении частиц, распределенных на окружности. Таким образом, общая теория относительности позволяет описать гравитационное поле и динамику частиц в случае кольцевого распределения материи [31].

Полученные результаты могут быть использованы для моделирования динамики частиц в кольцевых галактиках, в планетарных кольцах и в поясе астероидов. Представляется интересным найти геометрический образ и вывести модель для описания рукавов спиральных галактик, однако решение этой задачи выходит за рамки настоящей работы.

Библиографический список

1. Трунев А.П. Динамика релятивистских частиц в метрике галактик / А.П. Трунев // Политематический сетевой электронный научный журнал Кубанского государственного аграрного университета (Научный журнал КубГАУ) [Электронный ресурс]. – Краснодар: КубГАУ, 2016. – №02(116). С. 1619 – 1641. – IDA [article ID]: 1161602101. – Режим доступа: http://ej.kubagro.ru/2016/02/pdf/101.pdf.

2. Трунев А.П. Столкновение частиц в потоках Риччи / А.П. Трунев // Политематический сетевой электронный научный журнал Кубанского государственного аграрного университета (Научный журнал КубГАУ) [Электронный ресурс]. – Краснодар: КубГАУ, 2016. – №07(121). С. 1787 – 1808. – IDA [article ID]: 1211607111. – Режим доступа: http://ej.kubagro.ru/2016/07/pdf/111.pdf.

3. Трунев А.П. Гравитационные волны в потоках Риччи при слиянии сингулярностей / А.П. Трунев // Политематический сетевой электронный научный журнал Кубанского государственного аграрного университета (Научный журнал КубГАУ) [Электронный ресурс]. – Краснодар: КубГАУ, 2016. – №07(121). С. 1907 – 1928. – IDA [article ID]: 1211607121. – Режим доступа: http://ej.kubagro.ru/2016/07/pdf/121.pdf.

4. Трунев А.П. Рождение цветной материи в потоках Риччи в общей теории относительности / А.П. Трунев // Политематический сетевой электронный научный журнал Кубанского государственного аграрного университета (Научный журнал КубГАУ) [Электронный ресурс]. – Краснодар: КубГАУ, 2016. – №08(122). С. 1233 – 1257. – IDA [article ID]: 1221608082. – Режим доступа: http://ej.kubagro.ru/2016/08/pdf/82.pdf.

5. Трунев А.П. Рождение материи при столкновении сингулярностей в потоках Риччи / А.П. Трунев // Политематический сетевой электронный научный журнал Кубанского государственного аграрного университета (Научный журнал КубГАУ) [Электронный ресурс]. – Краснодар: КубГАУ, 2016. – №08(122). С. 983 – 1007. – IDA [article ID]: 1221608069. – Режим доступа: http://ej.kubagro.ru/2016/08/pdf/69.pdf.

6. Трунев А.П. Ограниченная задача многих тел в потоках Риччи в общей теории относительности / А.П. Трунев // Политематический сетевой электронный научный журнал Кубанского государственного аграрного университета (Научный журнал КубГАУ) [Электронный ресурс]. – Краснодар: КубГАУ, 2016. – №08(122). С. 1008 – 1033. – IDA [article ID]: 1221608070. – Режим доступа: http://ej.kubagro.ru/2016/08/pdf/70.pdf.

7. Abbott B.P. et al. Observation of Gravitational Waves from a Binary Black Hole Merger// Phys. Rev. Let., PRL 116, 061102, 12 Feb., 2016.

8. Abbott B.P. et al. Properties of the binary black hole merger GW150914/The LIGO Scientific Collaboration and The Virgo Collaboration, 11 Feb 2016; arXiv:1602.03840.

9. Abbott B.P. et al. The basic physics of the binary black hole merger GW150914/The LIGO Scientific Collaboration and The Virgo Collaboration, Aug 5 2016; arXiv:1608.01940.

10. Silberstein L. Two-Centers Solution of the Gravitational Field Equations, and the Need for a Reformed Theory of Matter//Phys. Rev. 49, 268, 1936.

11. Dexter J. Booth. A static three-center solution to Einstein's gravitational field equations//International Journal of Theoretical Physics, December 1975, Volume 14, Issue 6, pp 361-366.

12. Einstein A., Rosen N. Two-Body Problem in General Relativity Theory//Phys. Rev. 49, 404 – Published 1 March 1936.

13. Levi-Civita. The Relativistic Problem of Several Bodies// Am. Journal of Math, 59, no 1, 9-22, 1937.

14. Eddington A. S., Clark G. L. The Problem of N Bodies in General Relativity. Theory// Proc. Roy. Soc. A 166, 465, 1938.

15. Фок В.А. О движении конечных масс в общей теории относительности// ЖЭТФ, 9, №4, 375, 1939.

16. Einstein A., Infeld L., Hoffmann B. Gravitational Equations and Problems of Motion//Ann. Math., 39, 65-100, 1938.

17. Einstein A., Infeld L. Gravitational Equations and Problems of Motion II//Ann. Math., 41, 455-564, 1940.

18. Einstein A., Infeld L. On the Motion of Particles in General Relativity Theory// Canad. J. Math., 1, 209—241, 1949.

19. Infeld L., Plebansky J. Motion and Relativity.- Pergamon Press, NY, 1960.

20. Schwarzschild K. Uber das Gravitations-feld eines Massenpunktes nach der Einsteinschen Theorie// Sitzungsberichte der K¨oniglich Preussischen Akademie der Wissenschaften zu Berlin, Phys.-Math. Klasse, 189–196 (1916); On the Gravitational Field of a Mass Point according to Einstein's Theory//arXiv: physics/9905030v1 [physics.hist-ph] 12 May 1999.

21. Papapetrou A. Equations of Motion in General Relativity// Proc. Phys. Soc. A 64, 57, 1951.

22. Фок В.А. Теория пространства, времени и тяготения. – М.: ГИТЛ, 1956.

23. Levi-Civita T. The n–Body Problem in General Relativity. – Springer, 1964.

24. Брумберг В.А. Релятивистская небесная механика. – М.: Наука, 1972.

25. Рябушко А.П. Движение тел в общей теории относительности – Мн.: Вышэйшая школа, 1979.

26. Ade P.A.R. et al. [Plank Collaboration]. Plank 2013 results. XVI. Cosmological parameters// arXiv:1303.5076.

27. Landau L.D., Lifshitz E.M. The Classical Theory of Fields. Vol. 2 (3rd ed.). Pergamon Press. ISBN 978-0-08-016019-1, 1971.

28. Synge J.L. Relativity: the General Theory. - Amsterdam, 1960.

29. Petrov A.Z. New methods in general relativity. - Moscow: Nauka, 1966.

30. Hans Stephani, Dietrich Kramer, Malcolm MacCallum, Cornelius Hoenselaers, Eduard Herltet. Exact Solutions to Einstein's Field Equations. Second Edition. Cambridge University Press. ISBN 0-521-46136-7, 2003.

31. Letelier P.S., Oliveira S.R. Superposition of Weyl solutions: the equilibrium forces// Class. Quantum Grav. 15, 421-433, 1998.

32. Трунев А.П. Общая теория относительности и метрика галактик / А.П. Трунев // Политематический сетевой электронный научный журнал Кубанского государственного аграрного университета (Научный журнал КубГАУ) [Электронный ресурс]. – Краснодар: КубГАУ, 2013. – №10(094). С. 360 – 384. – IDA [article ID]: 0941310027. – Режим доступа: http://ej.kubagro.ru/2013/10/pdf/27.pdf.

33. Szebehely V. Theory of Orbits: Restricted Problem of Three Bodies. – Academic Press, NY, 1967.

34. Musielak Z.E., Quarles B. The three-body problem// arXiv:1508.02312v1, 10 Aug 2015.

35. Пуанкаре А. Лекции по небесной механике. – М., Наука, 1965.

36. Трунев А.П. Динамика частиц в метрике с логарифмическим потенциалом / А.П. Трунев // Политематический сетевой электронный научный журнал Кубанского государственного аграрного университета (Научный журнал КубГАУ) [Электронный ресурс]. – Краснодар: КубГАУ, 2016. – №06(120). С. 1067 – 1092. – IDA [article ID]: 1201606070. – Режим доступа: http://ej.kubagro.ru/2016/06/pdf/70.pdf

37. Hamilton R.S. Three manifolds with positive Ricci curvature// Jour. Diff. Geom. 17, 255-306, 1982.

38. Hamilton R.S. Four manifolds with positive curvature operator. Jour. Diff. Geom. 24, 153-179, 1986.

39. Hamilton R.S. The Ricci flow on surfaces// Contemp. Math. 71, 237-261, 1988.

40. Hamilton R.S. The Harnack estimate for the Ricci flow// Jour. Diff. Geom. 37, 225-243, 1993.

41. Hamilton R.S. A compactness property for solutions of the Ricci flow// Amer. Jour. Math. 117, 545-572, 1995.

42. Perelman G. The entropy formula for the Ricci flow and its geometric applications// arXiv:math/0211159, 11 Nov 2002.
43. Perelman G. Finite extinction time for the solutions to the Ricci flow on certain three-manifolds//arXiv:math/0307245, 17 Jul 2003.
44. Perelman G. Ricci flow with surgery on three-manifolds//arXiv:math/0303109, 10 Mar 2003.

References

1. Trunev A.P. Dinamika reljativistskih chastic v metrike galaktik / A.P. Trunev // Politematicheskij setevoj jelektronnyj nauchnyj zhurnal Kubanskogo gosudarstvennogo agrarnogo universiteta (Nauchnyj zhurnal KubGAU) [Jelektronnyj resurs]. – Krasnodar: KubGAU, 2016. – №02(116). S. 1619 – 1641. – IDA [article ID]: 1161602101. – Rezhim dostupa: http://ej.kubagro.ru/2016/02/pdf/101.pdf.
2. Trunev A.P. Stolknovenie chastic v potokah Richchi / A.P. Trunev // Politematicheskij setevoj jelektronnyj nauchnyj zhurnal Kubanskogo gosudarstvennogo agrarnogo universiteta (Nauchnyj zhurnal KubGAU) [Jelektronnyj resurs]. – Krasnodar: KubGAU, 2016. – №07(121). S. 1787 – 1808. – IDA [article ID]: 1211607111. – Rezhim dostupa: http://ej.kubagro.ru/2016/07/pdf/111.pdf.
3. Trunev A.P. Gravitacionnye volny v potokah Richchi pri slijanii singuljarnostej / A.P. Trunev // Politematicheskij setevoj jelektronnyj nauchnyj zhurnal Kubanskogo gosudarstvennogo agrarnogo universiteta (Nauchnyj zhurnal KubGAU) [Jelektronnyj resurs]. – Krasnodar: KubGAU, 2016. – №07(121). S. 1907 – 1928. – IDA [article ID]: 1211607121. – Rezhim dostupa: http://ej.kubagro.ru/2016/07/pdf/121.pdf.
4. Trunev A.P. Rozhdenie cvetnoj materii v potokah Richchi v obshhej teorii otnositel'nosti / A.P. Trunev // Politematicheskij setevoj jelektronnyj nauchnyj zhurnal Kubanskogo gosudarstvennogo agrarnogo universiteta (Nauchnyj zhurnal KubGAU) [Jelektronnyj resurs]. – Krasnodar: KubGAU, 2016. – №08(122). S. 1233 – 1257. – IDA [article ID]: 1221608082. – Rezhim dostupa: http://ej.kubagro.ru/2016/08/pdf/82.pdf.
5. Trunev A.P. Rozhdenie materii pri stolknovenii singuljarnostej v potokah Richchi / A.P. Trunev // Politematicheskij setevoj jelektronnyj nauchnyj zhurnal Kubanskogo gosudarstvennogo agrarnogo universiteta (Nauchnyj zhurnal KubGAU) [Jelektronnyj resurs]. – Krasnodar: KubGAU, 2016. – №08(122). S. 983 – 1007. – IDA [article ID]: 1221608069. – Rezhim dostupa: http://ej.kubagro.ru/2016/08/pdf/69.pdf.
6. Trunev A.P. Ogranichennaja zadacha mnogih tel v potokah Richchi v obshhej teorii otnositel'nosti / A.P. Trunev // Politematicheskij setevoj jelektronnyj nauchnyj zhurnal Kubanskogo gosudarstvennogo agrarnogo universiteta (Nauchnyj zhurnal KubGAU) [Jelektronnyj resurs]. – Krasnodar: KubGAU, 2016. – №08(122). S. 1008 – 1033. – IDA [article ID]: 1221608070. – Rezhim dostupa: http://ej.kubagro.ru/2016/08/pdf/70.pdf.
7. Abbott B.P. et al. Observation of Gravitational Waves from a Binary Black Hole Merger// Phys. Rev. Let., PRL 116, 061102, 12 Feb., 2016.
8. Abbott B.P. et al. Properties of the binary black hole merger GW150914/The LIGO Scientific Collaboration and The Virgo Collaboration, 11 Feb 2016; arXiv:1602.03840.
9. Abbott B.P. et al. The basic physics of the binary black hole merger GW150914/The LIGO Scientific Collaboration and The Virgo Collaboration, Aug 5 2016; arXiv:1608.01940.
10. Silberstein L. Two-Centers Solution of the Gravitational Field Equations, and the Need for a Reformed Theory of Matter//Phys. Rev. 49, 268, 1936.

11. Dexter J. Booth. A static three-center solution to Einstein's gravitational field equations//International Journal of Theoretical Physics, December 1975, Volume 14, Issue 6, pp 361-366.

12. Einstein A., Rosen N. Two-Body Problem in General Relativity Theory//Phys. Rev. 49, 404 – Published 1 March 1936.

13. Levi-Civita. The Relativistic Problem of Several Bodies// Am. Journal of Math, 59, no 1, 9-22, 1937.

14. Eddington A. S., Clark G. L. The Problem of N Bodies in General Relativity. Theory// Proc. Roy. Soc. A 166, 465, 1938.

15. Fok V.A. O dvizhenii konechnyh mass v obshhej teorii otnositel'nosti// ZhJeTF, 9, №4, 375, 1939.

16. Einstein A., Infeld L., Hoffmann B. Gravitational Equations and Problems of Motion//Ann. Math., 39, 65-100, 1938.

17. Einstein A., Infeld L. Gravitational Equations and Problems of Motion II//Ann. Math., 41, 455-564, 1940.

18. Einstein A., Infeld L. On the Motion of Particles in General Relativity Theory// Canad. J. Math., 1, 209—241, 1949.

19. Infeld L., Plebansky J. Motion and Relativity.- Pergamon Press, NY, 1960.

20. Schwarzschild K. Uber das Gravitations-feld eines Massenpunktes nach der Einsteinschen Theorie// Sitzungsberichte der K¨oniglich Preussischen Akademie der Wissenschaften zu Berlin, Phys.-Math. Klasse, 189–196 (1916); On the Gravitational Field of a Mass Point according to Einstein’s Theory//arXiv: physics/9905030v1 [physics.hist-ph] 12 May 1999.

21. Papapetrou A. Equations of Motion in General Relativity// Proc. Phys. Soc. A 64, 57, 1951.

22. Fok V.A. Teorija prostranstva, vremeni i tjagotenija. – M.: GITL, 1956.

23. Levi-Civita T. The n–Body Problem in General Relativity. – Springer, 1964.

24. Brumberg V.A. Reljativistskaja nebesnaja mehanika. – M.: Nauka, 1972.

25. Rjabushko A.P. Dvizhenie tel v obshhej teorii otnositel'nosti – Mn.: Vyshjejshaja shkola, 1979.

26. Ade P.A.R. et al. [Plank Collaboration]. Plank 2013 results. XVI. Cosmological parameters// arXiv:1303.5076.

27. Landau L.D., Lifshitz E.M. The Classical Theory of Fields. Vol. 2 (3rd ed.). Pergamon Press. ISBN 978-0-08-016019-1, 1971.

28. Synge J.L. Relativity: the General Theory. - Amsterdam, 1960.

29. Petrov A.Z. New methods in general relativity. - Moscow: Nauka, 1966.

30. Hans Stephani, Dietrich Kramer, Malcolm MacCallum, Cornelius Hoenselaers, Eduard Herltet. Exact Solutions to Einstein's Field Equations. Second Edition. Cambridge University Press. ISBN 0-521-46136-7, 2003.

31. Letelier P.S., Oliveira S.R. Superposition of Weyl solutions: the equilibrium forces// Class. Quantum Grav. 15, 421-433, 1998.

32. Trunev A.P. Obshhaja teorija otnositel'nosti i metrika galaktik / A.P. Trunev // Politematicheskij setevoj jelektronnyj nauchnyj zhurnal Kubanskogo gosudarstvennogo agrarnogo universiteta (Nauchnyj zhurnal KubGAU) [Jelektronnyj resurs]. – Krasnodar: KubGAU, 2013. – №10(094). S. 360 – 384. – IDA [article ID]: 0941310027. – Rezhim dostupa: http://ej.kubagro.ru/2013/10/pdf/27.pdf.

33. Szebehely V. Theory of Orbits: Restricted Problem of Three Bodies. – Academic Press, NY, 1967.

34. Musielak Z.E., Quarles B. The three-body problem// arXiv:1508.02312v1, 10 Aug 2015.

35. Puankare A. Lekcii po nebesnoj mehanike. – M., Nauka, 1965.

36. Trunev A.P. Dinamika chastic v metrike s logarifmicheskim potencialom / A.P. Trunev // Politematicheskij setevoj jelektronnyj nauchnyj zhurnal Kubanskogo gosudarstvennogo agrarnogo universiteta (Nauchnyj zhurnal KubGAU) [Jelektronnyj resurs]. – Krasnodar: KubGAU, 2016. – №06(120). S. 1067 – 1092. – IDA [article ID]: 1201606070. – Rezhim dostupa: http://ej.kubagro.ru/2016/06/pdf/70.pdf

37. Hamilton R.S. Three manifolds with positive Ricci curvature// Jour. Diff. Geom. 17, 255-306, 1982.

38. Hamilton R.S. Four manifolds with positive curvature operator. Jour. Diff. Geom. 24, 153-179, 1986.

39. Hamilton R.S. The Ricci flow on surfaces// Contemp. Math. 71, 237-261, 1988.

40. Hamilton R.S. The Harnack estimate for the Ricci flow// Jour. Diff. Geom. 37, 225-243, 1993.

41. Hamilton R.S. A compactness property for solutions of the Ricci flow// Amer. Jour. Math. 117, 545-572, 1995.

42. Perelman G. The entropy formula for the Ricci flow and its geometric applications// arXiv:math/0211159, 11 Nov 2002.

43. Perelman G. Finite extinction time for the solutions to the Ricci flow on certain three-manifolds//arXiv:math/0307245, 17 Jul 2003.

44. Perelman G. Ricci flow with surgery on three-manifolds//arXiv:math/0303109, 10 Mar 2003.