УДК 530.145.3

UDC 530.145.3

01.00.00 Физико-математические науки

Physic and mathematics

РОЛЬ КВАНТОВОЙ ЗАПУТАННОСТИ В ЗАДАЧАХ ТЕОРИИ ИГР

THE ROLE OF QUANTUM ENTANGLEMENT IN TASKS OF THE GAMES THEORY

Потапов Виктор Сергеевич
аспирант 2 года обучения
SPIN: 2121-3430
e-mail: vitya-potapov@rambler.ru

Гушанский Сергей Михайлович
к.т.н., доцент
SPIN: 1556-5238, Scopus ID: 56225520500
e-mail: kron@pbox.ttn.ru
Южный федеральный университет,
Таганрог, Россия

Potapov Viktor Sergeevich
2nd year post-graduate student
SPIN: 2121-3430
e-mail: vitya-potapov@rambler.ru

Gushanskiy Sergei Mikhailovich
Cand.Tech.Sci., associate professor
SPIN: 1556-5238, Scopus ID: 56225520500
e-mail: kron@pbox.ttn.ru
South Federal University,
Taganrog, Russia

В данной статье рассматривается экономическая игра «Борьба за рынки». Выполняется построение математической модели квантовой реализации этой игры. Для наглядности выводятся алгоритмы мягкой и жесткой квантовой игры для оценки влияния степени запутанности на работу и результат работы алгоритмов. В нем шаг за шагом даются инструкции по последовательности действий и операций для создания квантовой модели игры «Борьба за рынки». Целью является оценка влияния степени запутанности на работу алгоритмов. Также в работе исследуется влияние квантовой запутанности на выигрыш двух и более игроков. Проводится сравнение с классическими результатами

This article discusses an economic game called "The struggle for markets". We have generated a mathematical model of quantum realization of this game. For clarity, the algorithms are derived for soft and hard quantum games for assessing the impact of the degree of entanglement to work and the result of the algorithm. There are step-by-step instructions for the sequence of actions and operations to create a quantum model of the game. The aim is to assess the influence of the degree of entanglement on work algorithms. Also, we investigate the influence of quantum entanglement on the win for two or more players. The article gives a comparison with classical results

Ключевые слова: КВАНТОВАЯ ТЕОРИЯ ИГР, КВАНТОВЫЕ КОМПЬЮТЕРЫ, КВАНТОВАЯ ЗАПУТАННОСТЬ, СТЕПЕНЬ ЗАПУТАННОСТИ, КВАНТОВОЕ МОДЕЛИРОВАНИЕ, СУПЕРПОЗИЦИЯ

Keywords: QUANTUM GAME THEORY, QUANTUM COMPUTERS, QUANTUM ENTANGLEMENT, DEGREE OF ENTANGLEMENT, QUANTUM SIMULATION, SUPERPOSITION

Введение

В настоящее время теория игр квантовой природы активно осваивается, появляется большое количество новых исследований и работ в этой области. Вначале стоит отметить отличия квантовой теории игр от классической. Все квантовые вычисления базируются на квантовых свойствах частиц, таких как суперпозиция и запутанность [1]. В квантовой теории игр суперпозиция служит мерой неопределенности, когда мы не можем знать, какой стратегией в данный момент времени воспользуется игрок. В классическом математическом аппарате теории вероятности такой возможности нет, известна лишь вероятность выбора той или иной стратегии.

Запутанность, в свою очередь, является параметром, принимающим более двух состояний, например, бесконечное множество. В рамках теории игр квантовая запутанность позволяет моделировать согласованность. Параметр, определяющий, насколько согласованно игроки будут принимать решение в каждый момент времени, т.е. насколько их решения будут зависеть друг от друга. Использование квантовой запутанности в теории игр позволяет согласовать действия игроков [2]. При этом уровень запутанности отражает степень согласованности игроков.

Одним из важнейших свойств запутанности, играющим важную роль в дальнейших рассуждениях, является инвариантность запутанности по отношению к локальным операциям над подсистемами квантовой системы. Другими словами, запутанное состояние двух и более кубитов не может быть ни создано, ни существенно изменено (в смысле изменения запутанности) воздействием на отдельные кубиты. Таким образом, все состояния, которые могут быть получены из состояния с заданной запутанностью только с помощью локальных операций, можно отождествить в смысле величины хранимой в них запутанности. Ниже приведена схема отношений и взаимодействий элементов квантовой механики. Жирным выделены понятия, имеющие место в теории квантовой информации и квантовом компьютинге, а также берущие за основу понятие квантовой запутанности.

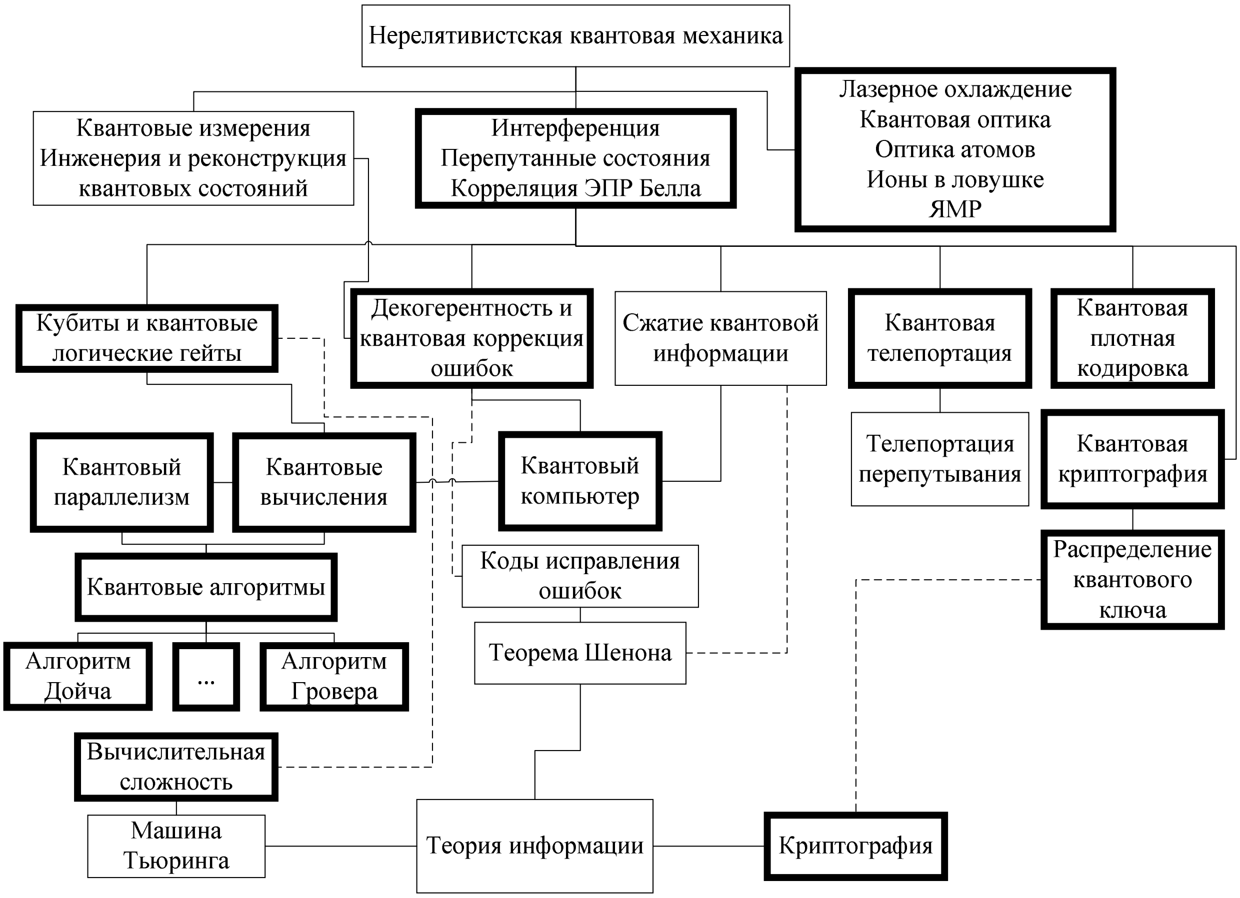

Рис. 1. Взаимосвязь элементов квантовой теории информации и др.

Возникает вопрос о том, как описать многообразие таких состояний. Решение данного вопроса с необходимостью должно предварять исследование взаимосвязи таких многообразий с мерой запутанности квантовых систем.

1. Роль квантовой запутанности в задачах теории игр

1.1. Критерий запутанности

Запутанность – это особая форма корреляции квантовых частиц, не имеющая классических аналогов. Для того чтобы создать максимальную запутанную пару необходимо на первый кубит воздействовать гейтом Адамара, а потом на оба гейтом CNOT. Кубиты изначально берутся в чистом состоянии.

Пусть существует чистое квантовое состояние в пространстве $H_A \otimes H_B$, $d_A = \dim(H_A)$, $d_B = \dim(H_B)$, $d = \min(d_A, d_B)$.

$$|\psi\rangle = \sum_{i=1}^{d_A}\sum_{j=1}^{d_B} a_{ij} * |i\rangle_A * |i\rangle_B \quad (1)$$

Отметим, что незапутанным называется состояние, представимое в виде $|\psi\rangle = |\psi\rangle_A \otimes |\psi\rangle_B$, а все оставшиеся состояния являются запутанными.

Задача. Запутано ли состояние $|\varphi\rangle = \frac{1}{\sqrt{2}}(|00\rangle + |11\rangle)$?

Решение. Матрица, соответствующая этому квантовому состоянию будет $A = \begin{pmatrix} \frac{1}{\sqrt{2}} & 0 \\ 0 & \frac{1}{\sqrt{2}} \end{pmatrix}$. $rank(A) = 2$, следовательно, состояние является запутанным.

1.2. Сингулярное разложение матриц

Базис всех гейтов составляют четыре матрицы Паули, все остальные гейты получаются путем обычного и тензорного произведения матриц, а также умножением на коэффициент. Важную роль в запутанности квантовых состояний играет сингулярное разложение матриц [3] (или SVD-разложение, Singular Value Decomposition). Любая комплексная матрица A размера m×n имеет разложение $A = U * S * V^*$, где U – унитарная матрица порядка m, V – унитарная матрица порядка n, S – диагональная матрица m × n с неотрицательными действительными числами $\{s_1, s_2, \ldots, s_n\}$ на диагонали (эти числа называют сингулярными числами матрицы A).

1.3. Разложение Шмидта

Пусть имеется чистое квантовое состояние в гильбертовом пространстве $H_A \otimes H_B$, $d_A = \dim(H_A)$, $d_B = \dim(H_B)$, $d = \min(d_A, d_B)$ и (1). Конечномерное гильбертово пространство изоморфно своему сопряжению, и по этой причине есть возможность рассмотрения одного вместо другого. Заменим пространство H_B на $H^*{}_B$.

1.4. Теория игр

Теория игр [3] − очень полезная и важная отрасль математики. Она широко применяется в экономике, социальных науках и биологии. Определим, какие преимущества могут дать квантовые вычисления для задач теории игр. Рассмотрим модель показывающую влияние согласованности на выигрыш игроков в мягкой и антагонистической игре. Возьмем известную экономическую игру «Борьба за рынки» с платежной матрицей, приведённой в таблице 1.

Таблица – 1. Платежная матрица

		Игрок B	
		0	1
Игрок A	0	(−2, −4)	(4, 4)
	1	(2, 8)	(−1, −2)

Стандартная интерпретация данной игры состоит в выборе двумя конкурирующими фирмами A и B двух стратегий: 0 – освоение и удержание первого (более выгодного) рынка и 1 – освоение и удержание второго рынка (менее выгодного). Предполагается, что фирма B контролирует оба рынка. В связи с этим проникновение фирмы A на новые рынки связано с финансовыми издержками на рекламную компанию и эти издержки тем больше, чем выгоднее рынок. Фирма B, соответственно, принимает превентивные меры, которые тоже требуют расходов. Победа фирмы A на первом рынке принесет ей вдвое больший выигрыш, чем на втором, однако поражение – полностью разорит. Победа ее на втором рынке принесет меньше выгоды, но и потери от возможного поражения будут не столь значительны. Решая эту типичную задачу теории игр, находим смешанные оптимальные стратегии игроков

$$p_A^* = \frac{1}{3}, \qquad p_B^* = \frac{5}{9} \qquad (1)$$

и их выигрыши, соответственно

$$S^A(p_A^*, p_B^*) = \frac{2}{3}, \qquad S^B(p_A^*, p_B^*) = \frac{4}{3} \qquad (2)$$

Квантовая схема, реализующая данную игру, представлена на рис. 1.

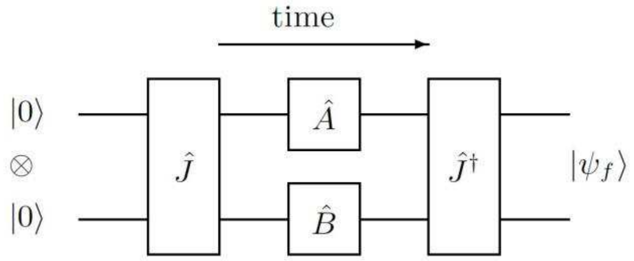

Рисунок 2. Квантовая схема игры двух игроков

Конечное состояние [4] может быть вычислено по формуле

$$\left|\Psi_f\right\rangle = \left|\Psi_i\right\rangle * \hat{J} * (\hat{A} * \hat{B}) * \hat{J}' \tag{3}$$

где $\left|\Psi_i\right\rangle = \left|00\right\rangle$ – начальное состояние кубита, а $\left|\Psi_i\right\rangle$ – конечное; оператор $\hat{J}$ запутывает кубиты игроков, $\hat{A}$ и $\hat{B}$ означают ходы игроков, а гейт $\hat{J}'$ распутывает кубиты для дальнейшего измерения. Последующий выигрыш выводится при помощи классической платежной матрицы.

2. Алгоритм мягкой квантовой игры

Суть игры в том, что любой из игроков может изменить состояние своего мнения (кубита) относительно выбора стратегии “0” или “1”. Для этого в кубит необходимо загрузить заранее вычисленную смешанную стратегию. Для этого необходимо повернуть вектор кубит так, чтобы спроектировать вероятность выбора стратегии на суперпозицию кубита 0 и 1 соответственно. Оператор поворота [5] имеет вид

$$\hat{U}(\theta) = \begin{pmatrix} \cos\frac{\theta}{2} & \sin\frac{\theta}{2} \\ -\sin\frac{\theta}{2} & \cos\frac{\theta}{2} \end{pmatrix} \tag{4}$$

где $0 \le \theta \le \pi$, $\cos\frac{\theta}{2}$ – квадрат изменения вероятности получить кубит в состоянии |0> после измерения, а $\sin\frac{\theta}{2}$ – в состоянии |1>. Заменим $\cos\frac{\theta}{2}$ и $\sin\frac{\theta}{2}$ вероятностями выбора стратегии для первого и второго игрока, соответственно

$$\hat{A} = \begin{pmatrix} \sqrt{p_A} & \sqrt{1-p_A} \\ -\sqrt{1-p_A} & \sqrt{p_A} \end{pmatrix}, \quad \hat{B} = \begin{pmatrix} \sqrt{p_B} & \sqrt{1-p_B} \\ -\sqrt{1-p_B} & \sqrt{p_B} \end{pmatrix} \tag{5}$$

Алгоритм квантовой игры представлен на рис. 2. Изначально игра решается классическим способом, а при помощи платежных матриц высчитываются оптимальные смешанные стратегии p_A, p_B. Эти стратегии в дальнейшем формируют оператор поворота кубит R. Цикл в алгоритме отвечает за наращивание параметра γ (ось X на рис. 3), с его помощью формируется запутывающий оператор J.

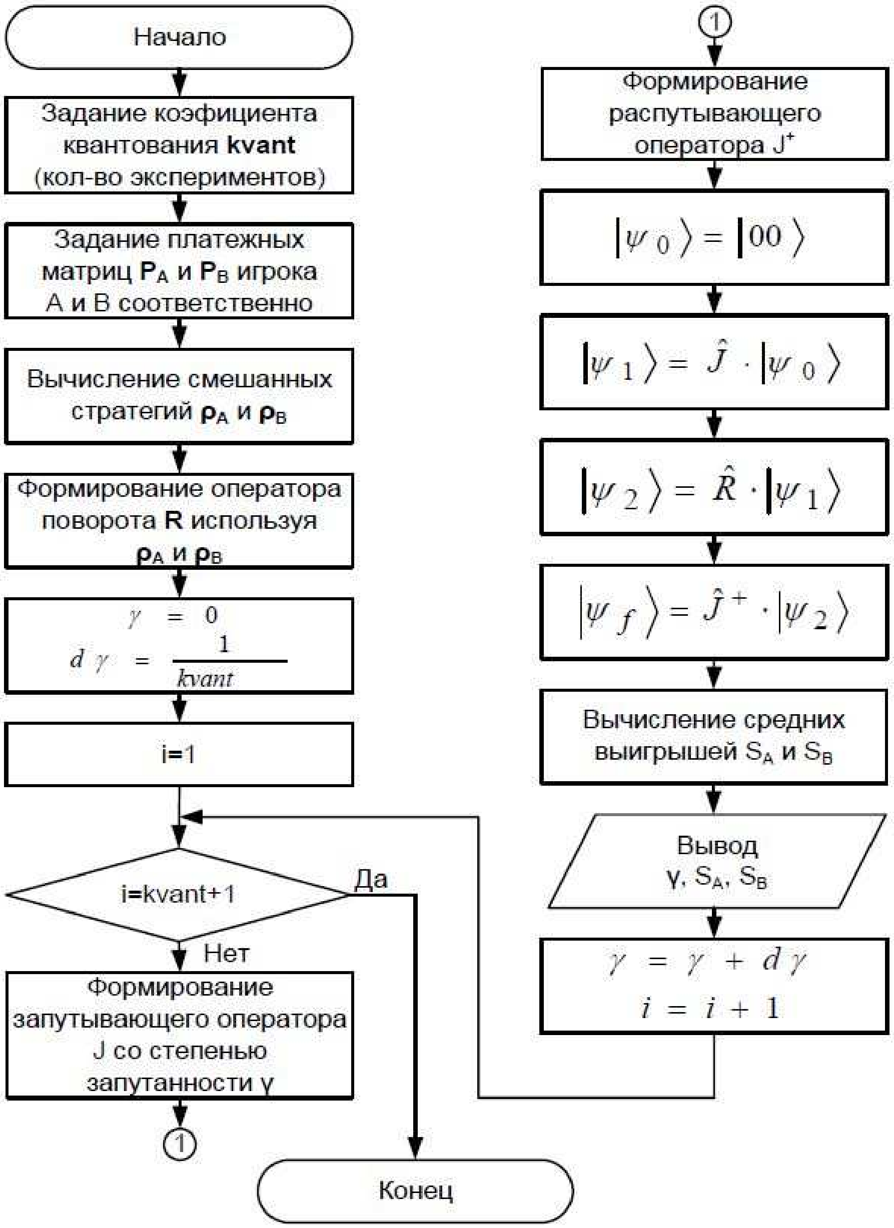

Рисунок 3. Алгоритм мягкой квантовой игры

После того как все операторы сформированы, на каждом шаге цикла выполняется квантовая схема игры двух лиц и формируется конечное состояние кубит $|\Psi_f\rangle$. Используя вектор этого состояния и платежную матрицу, вычисляются усредненные выигрыши игроков.

Отличие алгоритма жесткой квантовой игры от описанного выше (мягкой) заключается в установлении кубит в состояние |01>, а не |00>. Вследствие такой особенности игроки на каждом шаге будут применять противоположные стратегии. В результате работы алгоритма мягкой и жесткой квантовой игры получаем графики, приведенные на рис. 3. В данной задаче мы имеем дело с относительными значениями согласованности и запутанности, варьирующимися от 0 (отсутствие согласованности / запутанности) до 1 (максимальная согласованность / запутанность) и они эквивалентны.

Из рис. 3 видно, что это относится как к мягким, так и к жестким играм. Графики наглядно доказывают, что квантовая теория игр значительно эффективнее классической, при условии использования запутанности. Если согласованность равна нулю - игроки выбирают стратегии независимо от выбора стратегии противоположного игрока в данный момент. Если согласованность равна единице - игроки в мягких играх выбирают одинаковые стратегии при каждом повторении игры, в жестких играх – противоположные. Промежуточные значения – это отклонения от этих состояний: чем ближе к 1, тем вероятность того, что решение примется, согласованно возрастает.

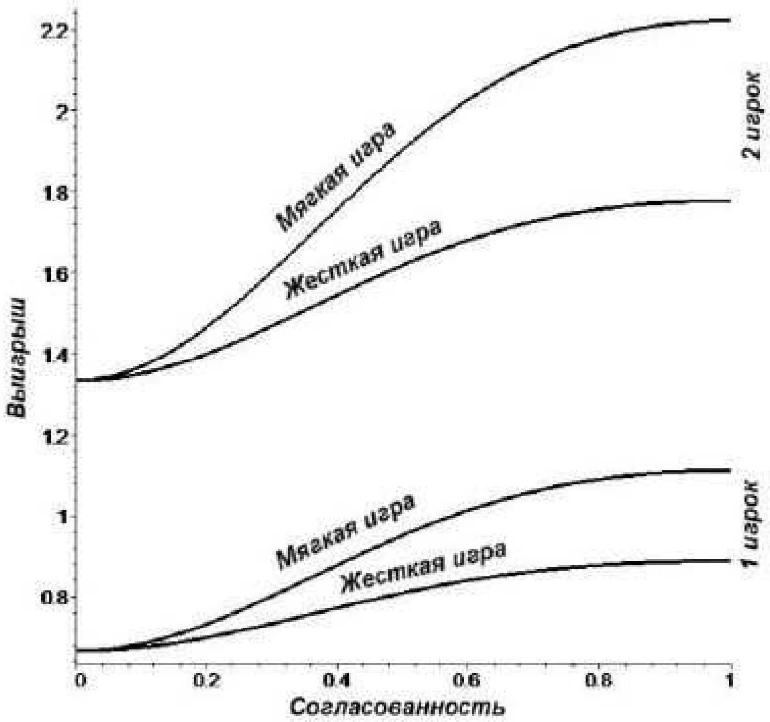

Рисунок 4. Влияние согласованности игроков на их выигрыш

Еще одним достоинством квантовых алгоритмов теории игр в простоте реализации. Например, для моделирования задачи, описанной выше, необходимо два кубита. Соответственно, если задача изменится и добавятся игроки – увеличится лишь число необходимых для моделирования кубит, равное количеству игроков. Таким образом, рост необходимых ресурсов будет линейным, в то время как для классической теории игр этот рост будет субэкспоненциальным. Следовательно, для ресурсоемких задач теории игр классический компьютер становится непригодным.

Заключение

Научная статья рассматривает экономическую игру теории игр – «Борьба за рынки». В рамках данной тематики выполнено построение математической модели квантовой реализации этой игры. Для оценки влияния степени запутанности на работу и последующий результат работы алгоритмов выводятся алгоритмы мягкой и жесткой квантовой игры. В них шаг за шагом даются инструкции по последовательности действий и операций для создания квантовой модели игры «Борьба за рынки». Целью является оценка влияния степени запутанности на работу квантовых алгоритмов. Проводится сравнение с классическими результатами. Также в работе исследуется влияние квантовой запутанности на выигрыш двух и более игроков.

Работа выполнена при финансовой поддержке РФФИ, грант № 15-01-01270.

Литература

1. Гузик В. Ф., Гушанский С. М., Потапов В. С. Количественные характеристики степени запутанности // Известия ЮФУ. Технические науки. Моделирование физических процессов и систем. – Ростов-на-Дону: Изд-во ЮФУ, 2016, № 3. – С. 76-86;
2. Гузик В. Ф., Гушанский С. М., Касаркин А. В. Использование квантовой запутанности для увеличения выигрыша в задачах теории игр для двух и трех игроков // Информатизация и связь. – 2013. – № 5. – С. 103-106;
3. Теория игр // URL: https://ru.wikipedia.org/wiki/Теория_игр (Дата обращения: 10.09.16);
4. Guzik V., Gushanskiy S., Polenov M., Potapov V. Complexity Estimation of Quantum Algorithms Using Entanglement Properties // 16th International Multidisciplinary Scientific GeoConference (SGEM), Bulgaria, 2016. – P. 20 - 26.
5. Guzik V., Gushanskiy S., Polenov M., Potapov V. Models of a quantum computer, their characteristics and analysis // 2015 9th International Conference on Application of Information and Communication Technologies (AICT). – Institute of Electrical and Electronics Engineers, 2015. – P. 583-587.

References

1. Guzik V., Gushansky S., Potapov V. Quantitative characteristics of the degree of entanglement // Proceedings of the SFedU. Technical science. Modeling of physical processes and systems. - Rostov-on-Don: Publishing House of the SFedU, 2016, № 3. – P. 76-86;
2. Guzik V., Gushansky S., Kasarkin A. Using quantum entanglement to increase scoring in the problems of the theory of games for two and three players // Informatization and Communication. - 2013. - № 5. - P. 103-106;
3. Game Theory // URL: https://ru.wikipedia.org/wiki/Теория_игр (reference date: 09/10/16);
4. Guzik V., Gushanskiy S., Polenov M., Potapov V. Complexity Estimation of Quantum Algorithms Using Entanglement Properties // 16th International Multidisciplinary Scientific GeoConference (SGEM), Bulgaria, 2016. - P. 20 - 26.
5. Guzik V., Gushanskiy S., Polenov M., Potapov V. Models of a quantum computer, their characteristics and analysis // 2015 9th International Conference on Application of Information and Communication Technologies (AICT). - Institute of Electrical and Electronics Engineers, 2015. - P. 583-587.