

УДК 530.12+524.7

UDC 530.12+524.7

**ДИНАМИКА РЕЛЯТИВИСТСКИХ ЧАСТИЦ В
МЕТРИКЕ ГАЛАКТИК****DYNAMICS OF RELATIVISTIC PARTICLES IN
THE GALAXY METRIC**

Трунев Александр Петрович
к.ф.-м.н., Ph.D.

*Директор, A&E Trounev IT Consulting, Торонто,
Канада*

Alexander Trunev

Cand.Phys.-Math.Sci., Ph.D.

Director, A&E Trounev IT Consulting, Toronto, Canada

В настоящей работе исследована динамика релятивистских частиц в аксиально-симметричных метриках. Построена метрика, обладающая осевой симметрией и содержащая два центра гравитации и логарифмическую особенность. Рассматривается применение полученных метрик для описания движения частиц в галактиках. Установлено, что в метрике с двумя центрами гравитации существуют устойчивые орбиты, на которых скорость частиц достигает значения $v/c \approx 0.7$. Радиус орбит изменяется в широких пределах, но орбита остается практически плоской. Неустойчивые же движения завершаются тем, что частицы покидают систему. Обсуждается гипотеза, что такого рода релятивистские объекты могут служить источниками магнитного поля планет, звезд и галактик. Рассмотрен вопрос о реализации в метрике галактик гипотетического лифта Эйнштейна, в котором существует однородное гравитационное поле, имитирующее ускоренное движение лифта. Построена численная модель однородного поля в ограниченной области пространства. Показано, что такого рода ускоренные объекты порождают релятивистский эффект в форме логарифмического потенциала, не убывающего при удалении от центра системы. Предполагается, что такого рода потенциалы могут быть связаны с полем Хиггса, ответственным за возникновение инертной массы элементарных частиц

In this study we investigate the dynamics of relativistic particles in the axially symmetric metrics. We have built metric having axial symmetry and contains two centers of gravity and a logarithmic singularity. The application received metrics to the movement of particles in galaxies is described. It is established that there are stable orbit in the metric with two centers of gravity, the particle velocity at which reaches the value $v/c \approx 0.7$. Orbit radius varies widely, but remains substantially flat orbit. Unstable same movements are completed so that the particles leave the system. The hypothesis that this kind of relativistic objects can serve as sources of the magnetic fields of the planets, stars and galaxies has been proposed. The question of the realization in the galaxy metric of Einstein's hypothetical elevator in which there is a uniform gravitational field, simulating the accelerated movement of the elevator is described. A homogeneous gravitational field in a limited region of space was numerical simulated. It has been shown that this kind of accelerated objects generate relativistic effect in the form of a log potential, not diminishing with distance from the center of the system. It is assumed that such capabilities can be associated with the Higgs field responsible for the occurrence of the inertial mass of the elementary particles

Ключевые слова: ГРАВИТАЦИОННЫЕ ВОЛНЫ,
ГЕОМЕТРИЯ ПРОСТРАНСТВА-ВРЕМЕНИ,
ОБЩАЯ ТЕОРИЯ ОТНОСИТЕЛЬНОСТИ

Keywords: SPACE-TIME GEOMETRY, GENERAL
RELATIVITY, GRAVITATIONAL WAVES

Введение

Общая теория относительности Эйнштейна широко применяется в космологии и в астрофизике, в том числе, для моделирования движения звезд в галактиках. В работах Вейля [1] и Леви-Чевита [2] предполагалось, что в галактиках могут наблюдаться гравитационные поля с осевой симметрией.

Решения уравнений Эйнштейна, обладающие осевой симметрией, рассматривались в работах Дельсарта [3], Зильберштейна [4], Эйнштейна и Розена [5], в монографиях [6-8], в наших работах [9-11] и некоторых других (обзор публикаций дан, например, в [6-8]).

В работе [4] была построена метрика с двумя центрами гравитации. Поскольку метрика [4] является статической, но при этом описывает гравитационное поле двух тел, автор работы [4] приходит к выводу, что полученное решение является следствием ошибочности уравнений Эйнштейна. Однако Эйнштейн и Розен [5] указали на ошибочность самого решения [5], которое содержит особые точки и не обладает требуемым геометрическим свойством, что, по их мнению, является указанием на нарушение законов поля.

В работах [12-13] было показано, что не существует решений гравитационного поля в пустоте, удовлетворяющих условиям:

- 1) поле стационарно;
- 2) решение не имеет особых точек;
- 3) полная масса поля отлична от нуля.

Следовательно, особые точки в решении уравнений поля в пустоте являются неотъемлемым признаком источников статического гравитационного поля. В этом смысле решение полученное Зильберштейном [4] не является исключением и не отличается, например, от известного решения Шварцшильда [14], описывающего статическое гравитационное поле точечной массы.

Отметим, что статическая система [4], состоящая из двух центров гравитации, противоречит только теории Ньютона, но не противоречит теории Эйнштейна. Поэтому такую систему следовало бы рассматривать аналогично черным дырам как результат действия релятивистских законов

гравитации [6-8]. Другой подход заключается во включении в систему третьего тела, обладающего отрицательной массой [8-9, 15].

В работе [10] на основе аксиально-симметричных решений уравнений Эйнштейна для вакуума исследована метрика галактик. Получено общее выражение гравитационных полей во внутренней области, согласующееся с экспериментальными данными по скорости вращения, полученной на основе сдвига линий СО и нейтрального водорода в 50 галактиках [16-17]. Развита численная модель, описывающая движение звезд в галактиках. В [11] построены аксиально-симметричные решения уравнений Эйнштейна, описывающие распределение гравитационного потенциала в масштабе кластера галактик.

В настоящей работе исследована динамика релятивистских частиц в аксиально-симметричных метриках. Установлено, что в метрике типа [4] с двумя центрами гравитации существуют устойчивые орбиты, на которых скорость частиц достигает значения $v/c \approx 0.7$. Радиус орбит изменяется в широких пределах, но орбита остается практически плоской. Неустойчивые же движения завершаются тем, что частицы покидают систему. Обсуждается гипотеза, что такого рода релятивистские объекты могут служить источниками магнитного поля планет, звезд и галактик.

Аксиально-симметрические поля

Уравнения гравитационного поля Эйнштейна имеют вид [6-8]:

$$R_{\mu\nu} - \frac{1}{2} g_{\mu\nu} R = g_{\mu\nu} \Lambda + \frac{8\pi G}{c^4} T_{\mu\nu} \quad (1)$$

Здесь $R_{\mu\nu}, g_{\mu\nu}, T_{\mu\nu}$ - тензор Риччи, метрический тензор и тензор энергии-импульса; Λ, G, c - космологическая постоянная Эйнштейна, гравитационная постоянная и скорость света соответственно. Как известно, Эйнштейн предложил в 1912-1955 гг. несколько альтернативных теорий

гравитации, среди которых модель (1) получила всеобщее признание, особенно в последнее время в связи с открытием ускоренного расширения Вселенной [18-19].

Гравитационные поля, обладающие осевой симметрией, рассматривались в работах [1-11] и других. Метрика таких пространств, при некоторых предположениях может быть приведена к виду

$$ds^2 = e^\mu dt^2 - e^{-\mu} (e^\nu d\rho^2 + e^\nu dz^2) - e^{-\mu} \rho^2 d\phi^2 \quad (2)$$

Здесь $\rho = \sqrt{x^{1^2} + x^{2^2}}$; $z = x^3$; $\mu = \mu(\rho, x^3)$, $\nu = \nu(\rho, x^3)$, - функции, удовлетворяющие уравнениям Эйнштейна. Вычисляя компоненты тензора Эйнштейна $G_{\alpha\beta} = R_{\alpha\beta} - \frac{1}{2} R g_{\alpha\beta}$ в метрике (2) и полагая для вакуума $G_{\alpha\beta} = R_{\alpha\beta} - \frac{1}{2} R g_{\alpha\beta} = 0$, находим уравнения поля:

$$\begin{aligned} \omega_1 &= \frac{\partial^2 \mu}{\partial \rho^2} + \frac{1}{\rho} \frac{\partial \mu}{\partial \rho} + \frac{\partial^2 \mu}{\partial x^{3^2}} = 0, \\ \omega_2 &= \frac{\partial \nu}{\partial \rho} - \frac{\rho}{2} \left[\left(\frac{\partial \mu}{\partial \rho} \right)^2 - \left(\frac{\partial \mu}{\partial x^3} \right)^2 \right] = 0, \\ \omega_3 &= \frac{\partial \nu}{\partial x^3} - \rho \frac{\partial \mu}{\partial \rho} \frac{\partial \mu}{\partial x^3} = 0, \\ \omega_4 &= \frac{\partial^2 \nu}{\partial \rho^2} + \frac{\partial^2 \nu}{\partial x^{3^2}} + \frac{1}{2} \left[\left(\frac{\partial \mu}{\partial \rho} \right)^2 + \left(\frac{\partial \mu}{\partial x^3} \right)^2 \right] = 0. \end{aligned} \quad (3)$$

Можно проверить, что не все уравнения (3) являются независимыми и что выполняются следующие два соотношения

$$\omega_4 \equiv \frac{\partial \omega_2}{\partial \rho} + \frac{\partial \omega_3}{\partial x^3} + \rho \omega_1 \frac{\partial \mu}{\partial \rho}, \quad \rho \omega_1 \frac{\partial \mu}{\partial x^3} \equiv \frac{\partial \omega_2}{\partial x^3} - \frac{\partial \omega_3}{\partial \rho} \quad (4)$$

Следовательно, можно в качестве системы уравнений для определения двух функций $\mu = \mu(\rho, x^3)$, $\nu = \nu(\rho, x^3)$ выбрать, например, первое и четвертое уравнения (3), имеем

$$\frac{\partial^2 \mu}{\partial \rho^2} + \frac{1}{\rho} \frac{\partial \mu}{\partial \rho} + \frac{\partial^2 \mu}{\partial x^3{}^2} = 0,$$

$$\frac{\partial^2 \nu}{\partial \rho^2} + \frac{\partial^2 \nu}{\partial x^3{}^2} + \frac{1}{2} \left[\left(\frac{\partial \mu}{\partial \rho} \right)^2 + \left(\frac{\partial \mu}{\partial x^3} \right)^2 \right] = 0. \quad (5)$$

Отметим, что в нерелятивистском пределе потенциал $\mu = 2\varphi/c^2$, где φ - гравитационный потенциал в теории гравитации Ньютона. Из второго уравнения (5) находим оценку $\nu \sim \mu^2 = 4\varphi^2/c^4$. В галактиках параметр орбитальной скорости и гравитационный потенциал связаны между собой, что позволяет оценить величину $\mu = 2\varphi/c^2 \sim 10^{-6}$. В таком случае в первом приближении можно пренебречь малой величиной $\nu \sim \mu^2 \sim 10^{-12}$. В результате, как и в теории гравитации Ньютона, приходим к уравнению Лапласа для определения гравитационного потенциала.

Разрешая систему уравнений (5) приходим к определению статических полей гравитации в случае осевой симметрии. Отметим, что решение системы уравнений (5) зависит от граничных условий, которые можно сформулировать, например, на осях симметрии галактики и на удаленной границе. В результате находим гравитационный потенциал, не используя объемных источников. В этом случае роль темной материи играют граничные условия, которые можно определить путем измерений орбитальной скорости звезд в галактиках [10-11].

Сила, действующая на частицу в статическом гравитационном поле, определяется в общем случае из выражения [20]

$$\mathbf{f} = \frac{mc^2}{\sqrt{1-v^2/c^2}} \left\{ -\nabla \ln \sqrt{g_{00}} + \frac{\sqrt{g_{00}}}{c} [\mathbf{v}\mathbf{g}] \right\}$$

$$v^\alpha = \frac{cdx^\alpha}{\sqrt{g_{00}}(dx^0 - g_\alpha dx^\alpha)}, \quad g_\alpha = -\frac{g_{0\alpha}}{g_{00}} \quad (6)$$

Здесь m, \mathbf{v} - масса и вектор скорости частицы.

Рассмотрим уравнение движения тела в гравитационном поле в нерелятивистском приближении, имеем

$$\frac{d\mathbf{v}}{dt} = -\nabla\varphi \quad (7)$$

В метрике (2) условие равновесия тел на круговых орбитах имеет вид

$$\frac{\mathbf{v}^2}{\rho} = \frac{\partial\varphi}{\partial\rho} \quad (8)$$

Отсюда находим зависимость потенциала от радиальной координаты

$$\varphi(\rho) = \int_{\rho_0}^{\rho} \frac{\mathbf{v}^2}{\rho} d\rho + \varphi_0 \quad (9)$$

Путем обработки данных для 50 галактик [16-17] было установлено, что наилучшее соответствие со всей совокупностью данных получается в том случае, когда зависимость потенциала от радиальной координаты можно представить в форме

$$\varphi(\rho,0) = -\frac{m}{\rho} + a \ln \rho + b\rho^2 + k\rho + \varphi_0 \quad (10)$$

Здесь a, b, k, m, φ_0 - некоторые константы, характеризующие распределение гравитационного потенциала во внутренней области галактики. Следовательно, можно предположить, что гравитационный потенциал во внутренней области галактики имеет, например, такой вид [10]

$$\varphi(\rho, z) = -\frac{m}{\sqrt{\rho^2 + z^2}} + a \ln \rho + b(\rho^2 - 2z^2) + k\rho + \varphi_0 \quad (11)$$

На рис. 1 представлены результаты моделирования распределения гравитационных потенциалов в галактиках NGC 0000, NGC 0253, NGC 0660, NGC 0891 по данным скорости вращения [16-17] согласно (9)-(10). Отметим, что параметры a, b, k, m, φ_0 вычисляются по методу, описанному в [10]. Первые два слагаемых в правой части (10) и (11) отвечают условиям в центре галактики, в остальные три описывают условия в кластере галактик [11].

Как известно, в центре нашей Галактики находится точечный источник гравитационного поля, который обычно отождествляют с черной дырой [21]. Данные на рис. 1 свидетельствуют, что в некоторых галактиках среди слагаемых в правой части выражения (10) или (11) присутствует потенциал точечной массы, расположенной в начале координат.

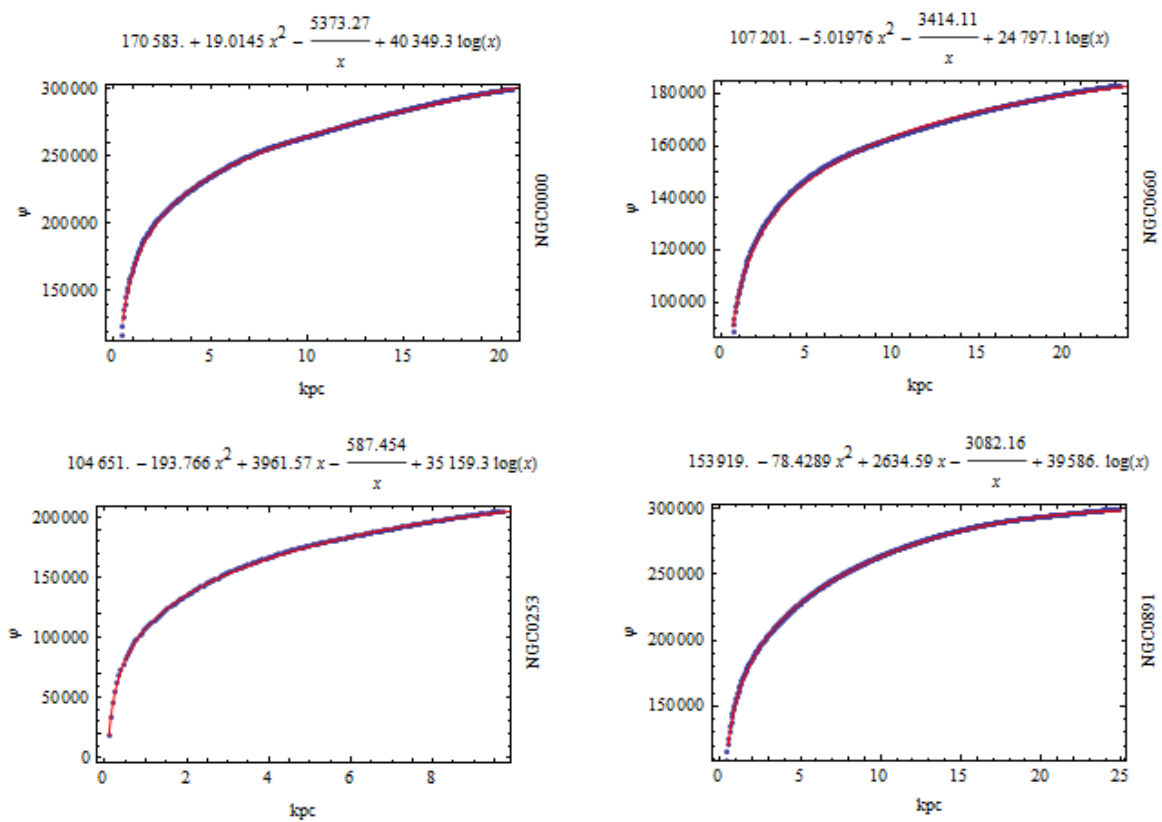


Рис. 1. Зависимость гравитационного потенциала ($\text{км}^2/\text{с}^2$) от радиальной координаты (кпс) в галактиках NGC 0000, NGC 0253, NGC 0660, NGC 0891 по данным [16-17] и по модели (10): поле содержит точечный источник, логарифмическую особенность и квадратичный потенциал, описывающий течение в кластере [11].

Это означает, что следует рассматривать решение полной системы уравнений (5), описывающее гравитационное поле вблизи особенности типа точечного источника. Однако метрика (2) не совпадает с метрикой Шварцшильда [14], поэтому соответствующее решение отличается от решения Шварцшильда, что видно уже из данных на рис. 1, которые содержат, например, логарифмическую особенность, которой нет в стандартном решении Шварцшильда [6-8, 14, 20].

Геометрия объектов, содержащих логарифмическую особенность и точечные массы, ранее не была исследована. Поэтому представляется интересным изучить как сами объекты, так и орбитальное релятивистское движение частиц вокруг этих объектов.

Геометрия релятивистских объектов

Рассмотрим решения системы уравнений (3) вида

$$\begin{aligned} \mu &= -\frac{m_1}{\sqrt{\rho^2 + (z - L_1)^2}} - \frac{m_2}{\sqrt{\rho^2 + (z - L_2)^2}} + a \ln \rho, \\ \nu &= -\frac{m_1^2 \rho^2}{4(\rho^2 + (z - L_1)^2)^2} - \frac{am_1}{\sqrt{\rho^2 + (z - L_1)^2}} - \frac{m_2^2 \rho^2}{4(\rho^2 + (z - L_2)^2)^2} - \frac{am_2}{\sqrt{\rho^2 + (z - L_2)^2}} \\ &+ \frac{m_1}{\sqrt{\rho^2 + (z - L_1)^2}} \frac{m_2}{\sqrt{\rho^2 + (z - L_2)^2}} \frac{(\rho^2 + (z - L_1)(z - L_2))}{(L_1 - L_2)^2} + \frac{a^2}{2} \ln \rho \end{aligned} \quad (12)$$

В частном случае, полагая в (12) $a = 0$, приходим к выражению потенциалов, полученных в работе [4]

$$\begin{aligned} \mu &= -\frac{m_1}{\sqrt{\rho^2 + (z - L_1)^2}} - \frac{m_2}{\sqrt{\rho^2 + (z - L_2)^2}}, \\ \nu &= -\frac{m_1^2 \rho^2}{4(\rho^2 + (z - L_1)^2)^2} - \frac{m_2^2 \rho^2}{4(\rho^2 + (z - L_2)^2)^2} + \\ &\frac{m_1}{\sqrt{\rho^2 + (z - L_1)^2}} \frac{m_2}{\sqrt{\rho^2 + (z - L_2)^2}} \frac{(\rho^2 + (z - L_1)(z - L_2))}{(L_1 - L_2)^2} \end{aligned} \quad (13)$$

Отметим, что именно выражения (13) подверглись критике со стороны Эйнштейна и Розена [5], как лишенные физического смысла. Действительно, в нерелятивистском случае потенциал μ в (13) сводится к выражению $\mu = 2\varphi/c^2$, где φ - гравитационный потенциал в теории гравитации Ньютона. Но тогда этот потенциал сводится к потенциалу двух точечных масс $m_{1,2}$, расположенных на оси симметрии системы в точках $z = L_{1,2}$.

Поскольку точечные массы $m_{1,2}$ в метрике (2) не испытывают взаимного перемещения, хотя должны притягиваться согласно теории Ньютона, автор [4] делает ошибочный вывод, что не верна теория относительности Эйнштейна. На самом же деле, как это легко видеть, у выражений (13) нет нерелятивистского предела, поскольку массы предполагаются точечными. Следовательно, всегда найдется такая малая область, что геометрия пространства-времени вокруг точечной массы, погруженной в эту область, сколь угодно сильно будет отличаться от евклидовой геометрии. Но в таком случае точечные массы не должны следовать законам Ньютона, так как эти законы не выполняются в окрестности самих масс.

Будем характеризовать геометрию релятивистских объектов в метрике (2) функцией

$$\sqrt{-g} = \rho \exp(\nu - \mu) \quad (14)$$

На рисунке 2 представлены изолинии функции (14), вычисленные по уравнениям (12) для двух точечных масс без логарифмической особенности (вверху) и с логарифмической особенностью – внизу, $a = 1$. Слева на рисунках заданы единичные массы, а справа - $m_1 = m_2 = 3$.

Из представленных данных следует, что геометрия пространства-времени вокруг точечных масс в метрике (2) является весьма сложной, что полностью подтверждает приведенные выше доводы и одновременно

опровергает выводы [4]. Следует, однако, заметить, что сами релятивистские объекты, описываемые уравнениями (12) в метрике (2), возможно, наблюдаются в природе в форме источников магнитного поля планет, звезд и галактик.

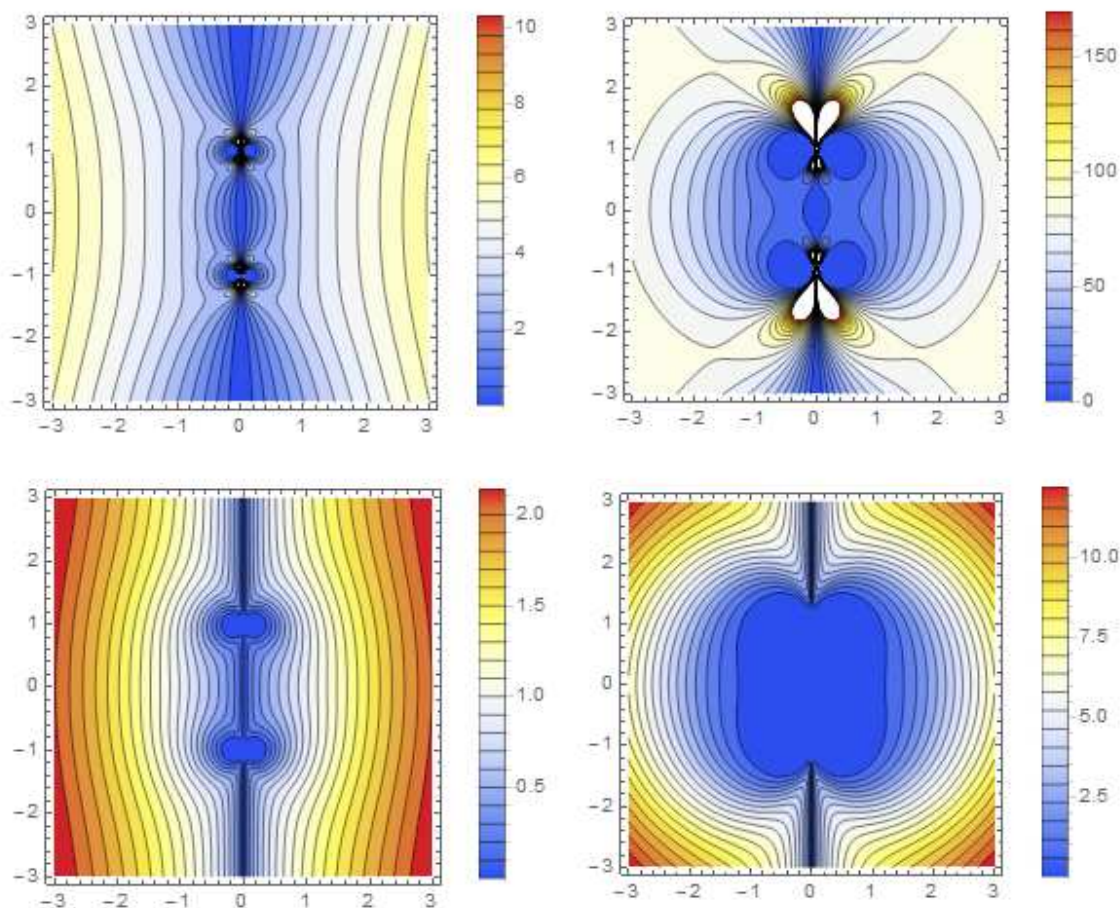


Рис. 2. Геометрия релятивистских объектов в метрике (2): изолинии функции $\sqrt{-g} = \rho \exp(v - \mu)$ вычислены по уравнениям (12) для двух точечных масс без логарифмической особенности (вверху) и с логарифмической особенностью - внизу при $a=1$; слева $m_1 = m_2 = 1$, а на правых рисунках $m_1 = m_2 = 3$.

Наконец, полагая в (12) $m_1 = m, L_1 = 0, m_2 = 0$, получим

$$\begin{aligned}\mu &= -\frac{m}{\sqrt{\rho^2 + z^2}} + a \ln \rho, \\ \nu &= -\frac{m^2 \rho^2}{4(\rho^2 + z^2)^2} - \frac{am}{\sqrt{\rho^2 + z^2}} + \frac{a^2}{2} \ln \rho\end{aligned}\tag{15}$$

Отметим, что выражение потенциала μ в форме (15) согласуется с выражением гравитационного потенциала (11), полученным в нерелятивистском приближении путем обработки данных для 50 галактик [10]. Потенциал ν не имеет аналогов в теории Ньютона. В этом смысле выражения (12) представляют интерес для исследования динамики релятивистских частиц в метрике галактик с особенностью, отличной от особенности в метрике Шварцшильда.

Моделирование движения релятивистских частиц в метрике галактик

Движение нерелятивистских частиц в метрике (2) было исследовано в работах [10-11]. Согласно (11) и (12), в галактиках существует два типа особенностей — простой полюс и логарифмическая особенность. Поэтому следует рассматривать не только точечные источники типа черной дыры, но также источники, распределенные вдоль оси симметрии, для которых нет физического аналога, хотя в общей теории относительности это просто решения уравнения Эйнштейна для вакуума в метрике (2). Отметим, что гравитационные потенциалы типа (10) или (11) соответствуют природе гравитации в галактическом масштабе, как это следует из обработки данных для 50 галактик [10].

Полученные результаты показывают, что метрика галактик с осевой симметрией типа (2) в нерелятивистском приближении соответствует гравитационным потенциалам вида (10) или (11), которые возрастают

неограниченно с увеличением расстояния до центра системы. Очевидно, что этот рост может быть ограничен на большом расстоянии, где метрика (2) переходит в метрику галактического кластера [11].

Движение релятивистских частиц в гравитационном поле в общем случае описывается уравнением

$$\frac{d^2 x^\mu}{ds^2} + \Gamma_{\nu\lambda}^\mu \frac{dx^\nu}{ds} \frac{dx^\lambda}{ds} = 0 \quad (16)$$

Γ_{kl}^i – символы Кристоффеля второго рода. Для определения траекторий релятивистских частиц в галактиках мы использовали уравнение (16) с потенциалами вида (12), (13) или (15). Символы Кристоффеля вычисляются в метрике (2) согласно

$$\begin{aligned} \Gamma_{10}^0 &= \frac{\mu_\rho}{2}, \Gamma_{20}^0 = \frac{\mu_z}{2}, \\ \Gamma_{00}^1 &= \frac{\mu_\rho}{2} e^{2\mu-\nu}, \Gamma_{11}^1 = \frac{v_\rho - \mu_\rho}{2}, \Gamma_{21}^1 = \frac{v_z - \mu_z}{2}, \Gamma_{22}^1 = \frac{-v_\rho + \mu_\rho}{2}, \Gamma_{33}^1 = \frac{r\mu_\rho - 2}{2} re^{-\nu}, \\ \Gamma_{00}^2 &= \frac{\mu_z}{2} e^{2\mu-\nu}, \Gamma_{11}^2 = \frac{-v_z + \mu_z}{2}, \Gamma_{21}^2 = \frac{v_\rho - \mu_\rho}{2}, \Gamma_{22}^2 = \frac{v_z - \mu_z}{2}, \Gamma_{33}^2 = \frac{r^2 \mu_z}{2} e^{-\nu}, \\ \Gamma_{31}^3 &= \frac{1}{\rho} - \frac{\mu_\rho}{2}, \Gamma_{32}^3 = -\frac{\mu_z}{2} \end{aligned} \quad (17)$$

Здесь индексы 0,1,2,3 соответствуют координатам t, ρ, z, ϕ .

Определим ковариантные компоненты скорости \mathbf{v} как трехмерного вектора согласно [20]

$$v_\alpha = \gamma_{\alpha\beta} v^\beta, \quad \gamma_{\alpha\beta} = -g_{\alpha\beta} + \frac{g_{0\alpha} g_{0\beta}}{g_{00}} \quad (18)$$

Здесь индексы $\alpha, \beta = 1, 2, 3$.

Как известно, при движении частицы в постоянном поле сохраняется полная энергия

$$E_0 = \frac{m_0 c^2 \sqrt{g_{00}}}{\sqrt{1 - v^2/c^2}} \quad (19)$$

Система уравнений (16) с учетом выражений (12) и (17) решалась численно. При нахождении устойчивых орбит начальные данные задавались исходя из решения аналогичной задачи в метрике Шварцшильда. Как известно, радиус ближайшей к центру устойчивой круговой орбит в метрике Шварцшильда и ее момент определяются величиной гравитационного радиуса, $r_g = 2Gm/c^2$, а энергия частицы на такой орбите не зависит от геометрических параметров, имеем [20]:

$$r = 3r_g, \quad M = \sqrt{3}m_0cr_g, \quad E_0 = \frac{m_0c^2\sqrt{g_{00}}}{\sqrt{1-v^2/c^2}} = \sqrt{\frac{8}{9}}m_0c^2 \approx 0.942809m_0c^2 \quad (20)$$

Здесь m_0 - масса частицы. На рис. 3 приведены типичные траектории движения релятивистских частиц в метрике (2) с потенциалами (12), вычисленные для начальных данных:

$$\begin{aligned} a = 0, m_1 = m_2 = 2, L_1 = -L_2 = 1, \\ t(0) = 0, t'(0) = 1.89011, \rho(0) = 6, \rho'(0) = 0, \\ z(0) = 1, z'(0) = 0, \phi(0) = 0, \phi'(0) = 0.0593t'(0) \end{aligned} \quad (21)$$

Отметим, что задание производной собственного времени позволяет синхронизовать время с параметром s , вдоль которого определяется решение системы уравнений (16).

Траектории частицы представляют собой навитые на центральное ядро кривые сильно вытянутые в плоскости ортогональной оси симметрии системы. Задавая начальные данные (21) в виде $\rho(0) = 3(L_1 - L_2)$, находим, что радиальная координата изменяется в широких пределах $6 \leq \rho \leq 140$ - рис. 3. Однако при отклонении от начальных данных $\rho(0) = 3(L_1 - L_2)$ более чем на 1% частица в своем движении удаляется от центра на значительно расстояние. Энергия частицы сохраняется в численных расчетах с точностью 10^{-6} , а по величине превосходит энергию на устойчивых круговых орбитах в метрике

Шварцшильда вычисленной согласно (20). Скорость частицы достигает величины $v/c \approx 0.7$.

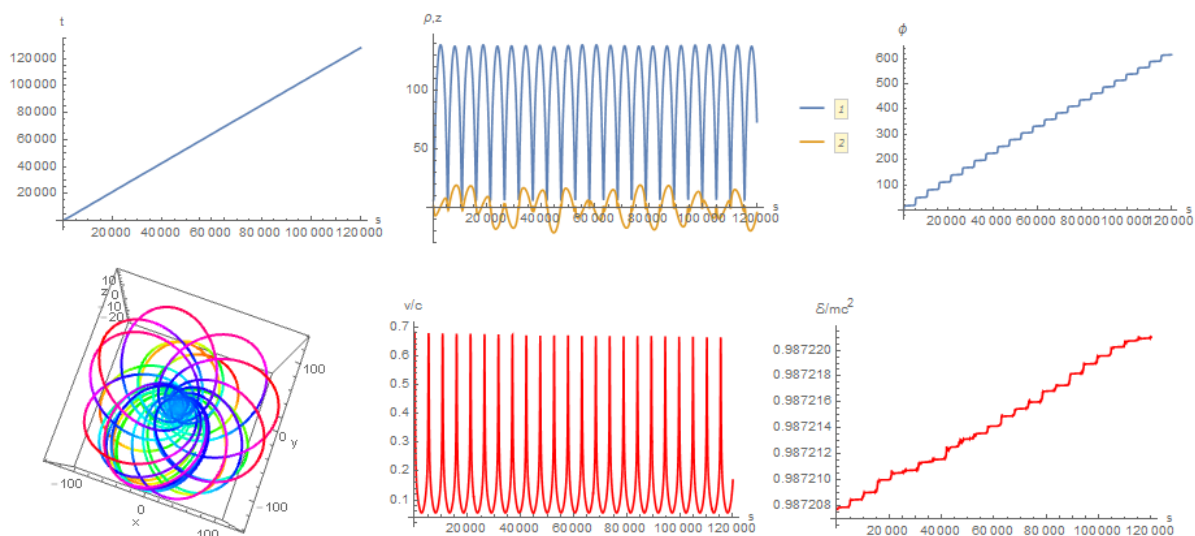


Рис. 3. Траектории частиц в метрике (2), полученные путем численного решения системы уравнений (16) с потенциалами (12) и с начальными данными (21).

На рис. 4 приведены результаты моделирования орбит с начальными данными в виде

$$\begin{aligned}
 a &= 0, m_1 = 1, m_2 = 2, L_1 = -L_2 = 1, \\
 t(0) &= 0, t'(0) = 1.3, \rho(0) = 6, \rho'(0) = 0, \\
 z(0) &= 1, z'(0) = 0, \phi(0) = 0, \phi'(0) = 0.0593t'(0)
 \end{aligned}
 \tag{22}$$

В этом случае масса системы в полтора раза меньше, чем в задаче с данными (21), но устойчивые орбиты все еще определяются условием $\rho(0) = 3(L_1 - L_2)$, которое, следовательно, не зависит от массы и от гравитационного радиуса. Период колебаний и амплитуд радиальных колебаний в этом случае уменьшаются по сравнению с задачей (21) приблизительно в 6 раз – сравните рис. 3 и 4.

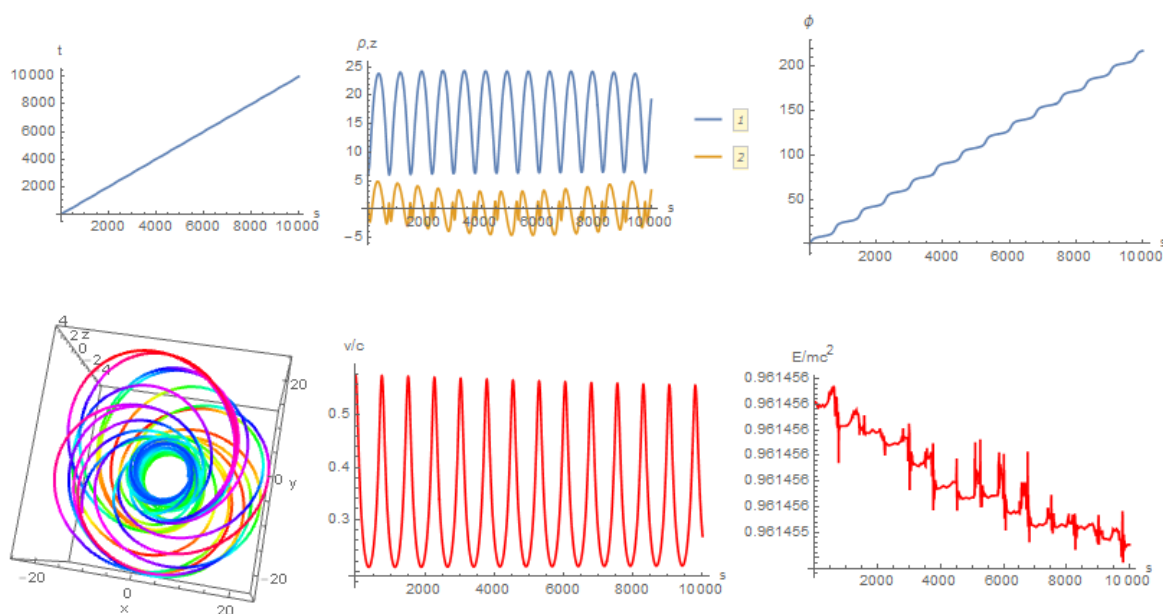


Рис. 4. Траектории частиц в метрике (2), полученные путем численного решения системы уравнений (16) с потенциалами (12) и с начальными данными (22).

На рис. 5 приведены результаты моделирования траекторий при включении логарифмического потенциала,

$$\begin{aligned}
 a &= 0.01, m_1 = 1, m_2 = 2, L_1 = -L_2 = 1, \\
 t(0) &= 0, t'(0) = 1.1, \rho(0) = 6, \rho'(0) = 0, \\
 z(0) &= 1, z'(0) = 0, \phi(0) = 0, \phi'(0) = 0.0593t'(0)
 \end{aligned}
 \tag{23}$$

Отметим, что наличие даже слабого возмущения в форме логарифмического потенциала с параметром $a = 0.01$ приводит к существенному изменению как амплитуды, так и периода радиальных колебаний приблизительно в два и три раза соответственно по сравнению с невозмущенным движением – рис. 4.

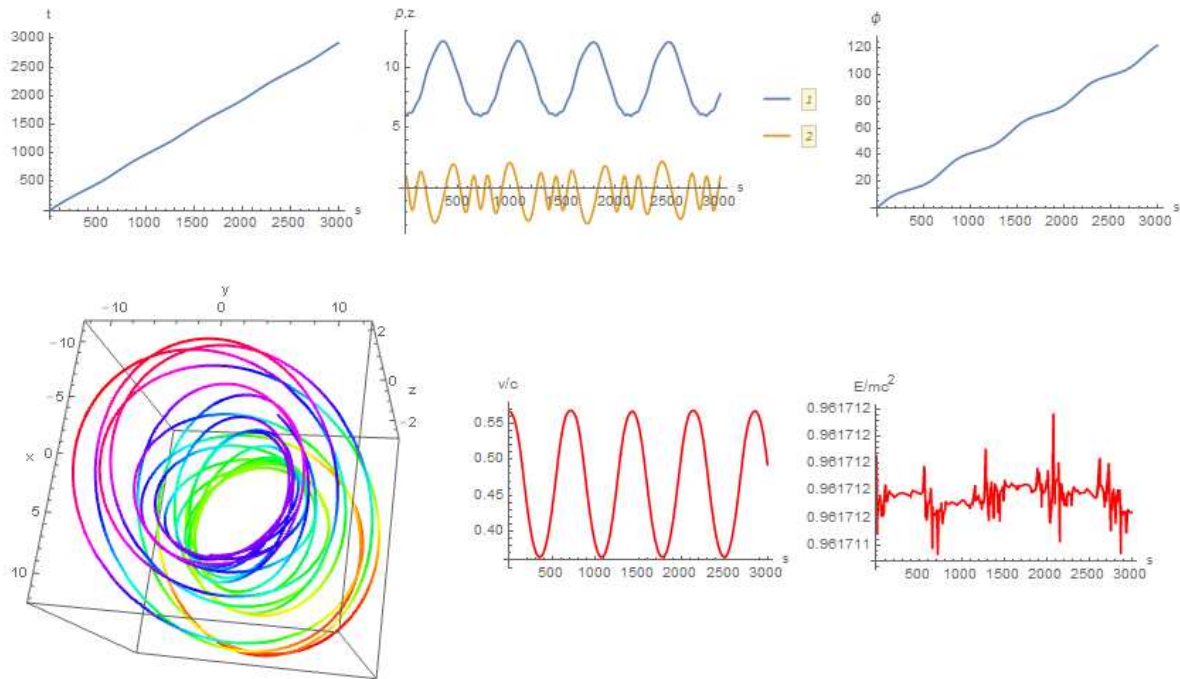


Рис. 5. Траектории частиц в метрике (2), полученные путем численного решения системы уравнений (16) с потенциалами (12) и с начальными данными (23).

В некоторой области параметров в системе с логарифмическим потенциалом возникает движение, внешне похожее на гармонические колебания – рис. 6. Можно предположить, что в этой области параметров система уравнений (16) может быть проинтегрирована точно. Действительно, рассмотрим уравнение Гамильтона-Якоби

$$g^{ik} \frac{\partial S}{\partial x^i} \frac{\partial S}{\partial x^k} - m_0^2 c^2 = 0 \tag{24}$$

Будем искать решение уравнения (24) в метрике (2) в форме

$$S = -E_0 t + M \phi + S_1(\rho, z) \tag{25}$$

Подставляя (25) в (24), находим

$$E_0^2 e^{-\mu} - \frac{M^2}{\rho^2} e^{\mu} - e^{\mu-\nu} \left(\frac{\partial S_1}{\partial \rho} \right)^2 - e^{\mu-\nu} \left(\frac{\partial S_1}{\partial z} \right)^2 - m_0^2 c^2 = 0 \quad (26)$$

Наконец, полагая в (26), что движение происходит в плоскости $z = 0$, приходим к искомому уравнению

$$E_0^2 e^{-\mu} - \frac{M^2}{\rho^2} e^{\mu} - e^{\mu-\nu} \left(\frac{\partial S_1}{\partial \rho} \right)^2 - m_0^2 c^2 = 0 \quad (27)$$

Разрешая уравнение (27), находим $S_1(\rho, E, M)$, отсюда траектория движения определяется согласно

$$\partial S / \partial M = \phi + \partial S_1 / \partial M = 0$$

Следовательно, траектория частицы описывается одним интегралом,

$$\phi = \pm M \int \frac{e^{\mu+\nu/2} d\rho}{\rho \sqrt{E_0^2 \rho^2 - e^{2\mu} M^2 - m_0^2 c^2 \rho^2 e^{\mu}}} \quad (28)$$

Что и требовалось доказать. Если предположить, что в метрике (1) по плоским траекториям типа (28) движутся заряженные частица, то такие частицы создают круговые токи, генерирующие статическое магнитное поле. Тем самым может получить объяснение статическое магнитное поле планет, звезд и галактик.

Наконец, заметим, что движение релятивистских частиц в сильном гравитационном поле не приводит к увеличению их энергии, что видно из данных, приведенных на рис. 3-5. Этим релятивистское движение в гравитационных полях существенно отличается от движения релятивистских частиц в ускорителях, где энергия частиц возрастает по мере приближения их скорости к скорости света.

Лифт Эйнштейна и гравитационные волны

В метрике (2) можно описать однородное гравитационное поле, локализованное в цилиндре ограниченного размера – т.н. лифт Эйнштейна.

Действительно, сформулируем задачу для системы уравнений (5), задавая однородное поле $\mu = g_E z$ в области $\rho \leq R, -L/2 \leq z \leq L/2$. Тогда за границей области лифта гравитационный потенциал μ , определяемый как решение уравнения Лапласа, будет подобен электростатическому потенциалу поля цилиндрического конденсатора, который на большом расстоянии от системы убывает как поле диполя – левый рис. 7.

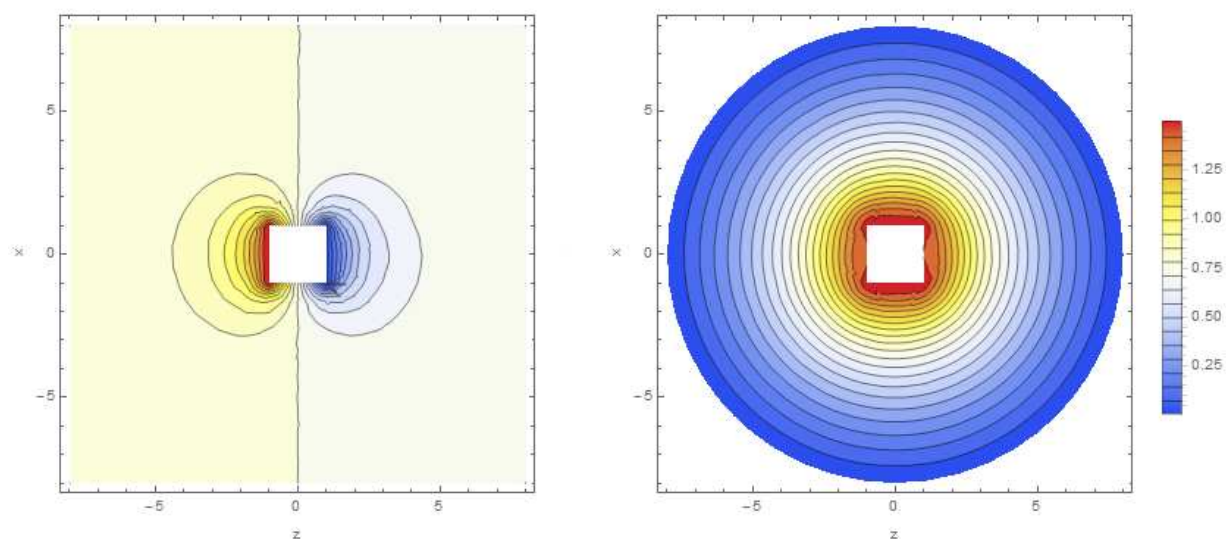


Рис. 7. Однородное гравитационное поле, локализованное в цилиндре и имитирующее лифт Эйнштейна, порождает в метрике галактик (2) гравитационные потенциалы двух типов.

Второй потенциал системы (5) подобен компоненте векторного потенциала прямолинейного провода с током, который на большом удалении от системы ведет себя как логарифмическая функция – правый рис. 7. Эта аналогия позволяет предположить, что ускоряемые тела порождают гравитационные возмущения, не убывающие на бесконечности. Такого рода потенциалы можно сравнить с полем Хиггса, ответственным за возникновение массы элементарных частиц.

Следовательно, гравитационное излучение, обусловленное ускорением частиц в метрике галактик, по своим свойствам подобно электромагнитному излучению. В этой связи заметим, что гравитационные волны, предсказанные Эйнштейном сразу после создания общей теории относительности [22-24], наконец были зарегистрированы в прецизионных экспериментах [25]. Как известно, Эйнштейн установил, что механическая система теряет энергию при изменении квадрупольного момента согласно уравнению [20, 24]

$$-\frac{dE}{dt} = \frac{G}{45c^5} \ddot{D}_{\alpha\beta}^2, D_{\alpha\beta} = \int \rho (3x_\alpha x_\beta - r^2 \delta_{\alpha\beta}) dV \quad (29)$$

Здесь функция G, ρ - гравитационная постоянная и плотность соответственно. По порядку величины потери энергии вследствие гравитационного излучения составляют

$$-\frac{dE}{dt} = k_E \frac{G \omega^6 m^2 l^4}{45c^5} \quad (30)$$

Здесь k_E – численный коэффициент, ω, m, l – характерная частота, масса и размеры системы соответственно. Даже в случае двойных звезд потери энергии из-за гравитационного излучения относительно малы. Тем не менее, в 1974 году была обнаружена система двойного пульсара PSR B1913+16, в которой скорость движения по орбите составляет около 200 км/с, что позволяет зарегистрировать изменение периода обращения, связанное с излучением гравитационных волн [26].

В общем случае характерная частота колебаний в двойных системах относительно мала и даже в случае слияния черных дыр характерная частота сигнала составляет около 35-250 Гц [25]. Следовательно, согласно (2), в этом случае потеря энергии происходит из-за большой массы системы, которая для события, зарегистрированного в [25] составила 36 и 29 масс Солнца для двух черных дыр соответственно.

Отметим, что в метрике галактик (2) с потенциалами (12) центры гравитации при любой их массе не сливаются в единый объект, поскольку удерживаются за счет релятивистских эффектов, обусловленных наличием второго гравитационного потенциала. Тем самым предопределяется стабильность галактических ядер, вокруг которых формируется устойчивые звездные орбиты. При этом близкие к ядру галактики объекты могут в процессе движения достигать релятивистской скорости.

Наконец, заметим, что при движении релятивистских частиц в метрике галактик гравитационное излучение приводит к торможению частиц, поэтому, их орбиты не могут оставаться стабильными длительное время. С другой стороны, если такие частицы имеют электрический заряд, то существует также торможение, обусловленное излучением электромагнитных волн. Однако решение этих вопросов выходит за рамки настоящей работы.

Библиографический список

1. Weyl H., Zur Gravitationstheorie, Ann. Phys. 54, 1917; Weyl H., Bemerkung uber die axialsymmetrischen Losungen der Einsteinschen Gravitationsgleichungen, Ann. Phys. 59, 1919.
2. Levi-Civita T. ds² Einsteiniani in campi Newtoniani, Atti Accad. Naz. dei Lincei 27, fasc. 7—8, Roma, 1918; ds² Einsteiniani in campi Newtoniani, Atti Accad. Naz. Lincei 28, 1919.
3. Delsarte J. Sur les ds² d'Einstein a symetrie axiale. - Paris, 1934; Delsarte J. Sur les ds² binaires et le probleme d'Einstein, Journ Math. Pures Appl. 13, 19, 1934.
4. Ludwik Silberstein. Two-Centers Solution of the Gravitational Field Equations, and the Need for a Reformed Theory of Matter//Phys. Rev. 49, 268 – Published 1 February 1936
5. A. Einstein and N. Rosen. Two-Body Problem in General Relativity Theory//Phys. Rev. 49, 404 – Published 1 March 1936
6. Synge J.L. Relativity: the General Theory. - Amsterdam, 1960.
7. Petrov A.Z. New methods in general relativity. - Moscow: Nauka, 1966.
8. Hans Stephani, Dietrich Kramer, Malcolm MacCallum, Cornelius Hoenselaers, Eduard Herltet. Exact Solutions to Einstein's Field Equations. Second Edition. Cambridge University Press. ISBN 0-521-46136-7, 2003.
9. Dexter J. Booth. A static three-center solution to Einstein's gravitational field equations//International Journal of Theoretical Physics, December 1975, Volume 14, Issue 6, pp 361-366.

10. Трунев А.П. Общая теория относительности и метрика галактик / А.П. Трунев // Политематический сетевой электронный научный журнал Кубанского государственного аграрного университета (Научный журнал КубГАУ) [Электронный ресурс]. – Краснодар: КубГАУ, 2013. – №10(094). С. 360 – 384. – IDA [article ID]: 0941310027. – Режим доступа: <http://ej.kubagro.ru/2013/10/pdf/27.pdf>
11. Трунев А.П. Метрика местного суперкластера галактик и общая теория относительности / А.П. Трунев // Политематический сетевой электронный научный журнал Кубанского государственного аграрного университета (Научный журнал КубГАУ) [Электронный ресурс]. – Краснодар: КубГАУ, 2013. – №10(094). С. 893 – 916. – IDA [article ID]: 0941310061. – Режим доступа: <http://ej.kubagro.ru/2013/10/pdf/61.pdf>
12. Einstein A. Demonstration of the Non-existence of Gravitational Fields with a Non-vanishing Total Mass free Singularities// Revista Univ. nac. Tucuman, ser A, 2, N 1-2, 11-15, 1941.
13. Einstein A., Pauli W. Non-existence of Regular Stationary Solutions of Relativistic Field Equation// Ann. Math., 44,131-137, 1943
14. K. Schwarzschild. Uber das Gravitations-feld eines Massenpunktes nach der Einsteinschen Theorie// Sitzungsberichte der Königlich Preussischen Akademie der Wissenschaften zu Berlin, Phys.-Math. Klasse, 189–196 (1916); On the Gravitational Field of a Mass Point according to Einstein's Theory//arXiv: physics/9905030v1 [physics.hist-ph] 12 May 1999.
15. Bondi H. Negative mass in general relativity// Rev. Mod. Phys., 29, 243, 1957.
16. Yoshiaki Sofue and Vera Rubin. Rotation Curves of Spiral Galaxies// Ann. Rev. Astron. Astrophys. 39 (2001) 137-174.
17. Sofue Y. 1999. Publ. Astron. Soc. Japan. 51:445// <http://www.ioa.s.u-tokyo.ac.jp/~sofue/h-rot.htm>
18. Adam G. Riess et all. Observational Evidence from Supernovae for an Accelerating Universe and Cosmological Constant// arXiv: astro-ph/ 9805201, 15 May, 1998.
19. George F R Ellis, Henk van Elst. Cosmological models//arXiv:gr-qc/9812046v5 2 Sep 2008.
20. L.D. Landau, E.M. Lifshitz. The Classical Theory of Fields. Vol. 2 (3rd ed.). Pergamon Press. ISBN 978-0-08-016019-1, 1971.
21. Ghez A. M., Salim S., Weinberg N. N., Lu J. R., Do T., Dunn J. K., Matthews K., Morris M. R., Yelda S., Becklin E. E., Kremenek T., Milosavljevic M., Naiman J. Measuring Distance and Properties of the Milky Way's Central Supermassive Black Hole with Stellar Orbits//The Astrophysical Journal, Volume 689, Issue 2, pp. 1044-1062.
22. Einstein A. Nahemngsweise Integration der Feldgleichungen der Gravitation. Sitzungsber. preuss. Akad. Wiss., 1916, 1, 688—696
23. Einstein A. Uber Gravitationwellen. Sitzungsber. preuss. Akad. Wiss., 1918, 1, 154—167.
24. Einstein A. Prinzipielles zur allgemeinen Relativitdtstheorie. Ann. Phys., 1918, 55, 241—244; Альберт Эйнштейн. Собрание научных трудов. Т. 1. – М., Наука, 1965, с. 613.
25. Abbott B.P. et al. Observation of Gravitational Waves from a Binary Black Hole Merger// Phys. Rev. Let., PRL 116, 061102, 12 Feb., 2016.
26. Taylor J.H., Weisberg J.M. A new test of general relativity – Gravitational radiation and the binary pulsar PSR 1913+ 16// Astrophysical Journal, 253, 908-920, 1982.

Bibliograficheskij spisok

1. Weyl H., Zur Gravitationstheorie, Ann. Phys. 54, 1917; Weyl H., Bemerkung uber die axialsymmetrischen Losungen der Einsteinschen Gravitationsgleichungen, Ann. Phys. 59, 1919.
2. Levi-Sivita T. ds2 Einsteiniani in campi Newtoniani, Atti Accad. Naz. dei Lincei 27, fasc. 7—8, Roma, 1918; ds2 Einsteiniani in campi Newtoniani, Atti Accad. Naz. Lincei 28, 1919.
3. Delsarte J. Sur les ds2 d'Einstein a symetrie axiale. - Paris, 1934; Delsarte J. Sur les ds2 binaires et le probleme d'Einstein, Journ Math. Pures Appl. 13, 19, 1934.
4. Ludwik Silberstein. Two-Centers Solution of the Gravitational Field Equations, and the Need for a Reformed Theory of Matter//Phys. Rev. 49, 268 – Published 1 February 1936
5. A. Einstein and N. Rosen. Two-Body Problem in General Relativity Theory//Phys. Rev. 49, 404 – Published 1 March 1936
6. Synge J.L. Relativity: the General Theory. - Amsterdam, 1960.
7. Petrov A.Z. New methods in general relativity. - Moscow: Nauka, 1966.
8. Hans Stephani, Dietrich Kramer, Malcolm MacCallum, Cornelius Hoenselaers, Eduard Herltet. Exact Solutions to Einstein's Field Equations. Second Edition. Cambridge University Press. ISBN 0-521-46136-7, 2003.
9. Dexter J. Booth. A static three-center solution to Einstein's gravitational field equations//International Journal of Theoretical Physics, December 1975, Volume 14, Issue 6, pp 361-366.
10. Trunев A.P. Obshhaja teorija otnositel'nosti i metrika galaktik / A.P. Trunев // Politematicheskij setevoj jelektronnyj nauchnyj zhurnal Kubanskogo gosudarstvennogo agrarnogo universiteta (Nauchnyj zhurnal KubGAU) [Jelektronnyj resurs]. – Krasnodar: KubGAU, 2013. – №10(094). S. 360 – 384. – IDA [article ID]: 0941310027. – Rezhim dostupa: <http://ej.kubagro.ru/2013/10/pdf/27.pdf>
11. Trunев A.P. Metrika mestnogo superklastera galaktik i obshhaja teorija otnositel'nosti / A.P. Trunев // Politematicheskij setevoj jelektronnyj nauchnyj zhurnal Kubanskogo gosudarstvennogo agrarnogo universiteta (Nauchnyj zhurnal KubGAU) [Jelektronnyj resurs]. – Krasnodar: KubGAU, 2013. – №10(094). S. 893 – 916. – IDA [article ID]: 0941310061. – Rezhim dostupa: <http://ej.kubagro.ru/2013/10/pdf/61.pdf>
12. Einstein A. Demonstration of the Non-existence of Gravitational Fields with a Non-vanishing Total Mass free Singularities// Revista Univ. nac. Tucuman, ser A, 2, N 1-2, 11-15, 1941.
13. Einstein A., Pauli W. Non-existence of Regular Stationary Solutions of Relativistic Field Equation// Ann. Math., 44,131-137, 1943
14. K. Schwarzschild. Uber das Gravitations-feld eines Massenpunktes nach der Einsteinschen Theorie// Sitzungsberichte der Königlich Preussischen Akademie der Wissenschaften zu Berlin, Phys.-Math. Klasse, 189–196 (1916); On the Gravitational Field of a Mass Point according to Einstein's Theory//arXiv: physics/9905030v1 [physics.hist-ph] 12 May 1999.
15. Bondi H. Negative mass in general relativity// Rev. Mod. Phys., 29, 243, 1957.
16. Yoshiaki Sofue and Vera Rubin. Rotation Curves of Spiral Galaxies// Ann. Rev. Astron. Astrophys. 39 (2001) 137-174.
17. Sofue Y. 1999. Publ. Astron. Soc. Japan. 51:445// <http://www.ioa.s.u-tokyo.ac.jp/~sofue/h-rot.htm>

18. Adam G. Riess et al. Observational Evidence from Supernovae for an Accelerating Universe and Cosmological Constant// arXiv: astro-ph/ 9805201, 15 May, 1998.
19. George F R Ellis, Henk van Elst. Cosmological models//arXiv:gr-qc/9812046v5 2 Sep 2008.
20. L.D. Landau, E.M. Lifshitz. The Classical Theory of Fields. Vol. 2 (3rd ed.). Pergamon Press. ISBN 978-0-08-016019-1, 1971.
21. Ghez A. M., Salim S., Weinberg N. N., Lu J. R., Do T., Dunn J. K., Matthews K., Morris M. R., Yelda S., Becklin E. E., Kremenek T., Milosavljevic M., Naiman J. Measuring Distance and Properties of the Milky Way's Central Supermassive Black Hole with Stellar Orbits//The Astrophysical Journal, Volume 689, Issue 2, pp. 1044-1062.
22. Einstein A. Nahemngsweise Integration der Feldgleichungen der Gravitation. Sitzungsber. preuss. Akad. Wiss., 1916, 1, 688—696
23. Einstein A. Uber Gravitationwellen. Sitzungsber. preuss. Akad. Wiss., 1918, 1, 154—167.
24. Einstein A. Prinzipielles zur allgemeinen Relativitdtstheorie. Ann. Phys., 1918, 55, 241—244; Al'bert Jejnshtejn. Sobranie nauchnyh trudov. T. 1. – M., Nauka, 1965, s. 613.
25. Abbott B.P. et al. Observation of Gravitational Waves from a Binary Black Hole Merger// Phys. Rev. Let., PRL 116, 061102, 12 Feb., 2016.
26. Taylor J.H., Weisberg J.M. A new test of general relativity – Gravitational radiation and the binary pulsar PSR 1913+ 16// Astrophysical Journal, 253, 908-920, 1982.