

УДК 544.638.2:51-74

UDC 544.638.2:51-74

01.00.00 Физико-математические науки

Physics and Mathematical sciences

**ТЕОРИЯ ПОДОБИЯ ЭЛЕКТРОМЕМБРАННЫХ СИСТЕМ С УЧЕТОМ ВЫНУЖДЕННОЙ, ГРАВИТАЦИОННОЙ И ЭЛЕКТРОКОНВЕКЦИИ****THEORY OF SIMILARITY OF ELECTRO MEMBRANE SYSTEMS WITH REGARD TO FORCED, GRAVITATIONAL AND ELECTRO CONVECTION**

Коваленко Анна Владимировна  
к.э.н., доцент  
РИНЦ SPIN-код автора: 3693-4813  
Scopus Author ID: 55328224000

Kovalenko Anna Vladimirovna  
Cand.Econ.Sci., associate professor  
RISC SPIN-code: 3693-4813  
Scopus Author ID: 55328224000

Письменский Александр Владимирович  
к.ф.-м.н., доцент  
РИНЦ SPIN-код: 9932-7747  
Scopus Author ID: 13004856800

Pismenskiy Alexander Vladimirovich  
Cand.Phys.-Math.Sci., associate professor  
RISC SPIN-code: 9932-7747  
Scopus Author ID: 13004856800

Уртенов Махамет Али Хусеевич  
д.ф.-м.н., профессор  
РИНЦ SPIN-код: 7189-0748  
Scopus Author ID: 6603363090

Urtenov Makhamet Ali Khuseevich  
Dr.Sci.Phys.-Math., professor  
RISC SPIN-code: 7189-0748  
Scopus Author ID: 6603363090

*Кубанский государственный университет, Краснодар, Россия*

*Kuban State University, Krasnodar, Russia*

В работе предложена общая математическая модель нестационарного неизотермического процесса переноса бинарного электролита в разбавленных растворах в электромембранной системе (ЭМС) с учетом совместного действия гравитационной, вынужденной и электроконвекции в потенциодинамическом режиме. Эта модель представляет собой краевую задачу для системы двумерных квазилинейных уравнений Навье-Стокса, Нернста-Планка-Пуассона в частных производных. Развита теория подобия процесса тепломассопереноса в электромембранных системах, конкретно в канале обессоливания электродиализного аппарата, с учетом с учетом совместного действия концентрационной поляризации, пространственного заряда, гравитационной, вынужденной и электроконвекции. Показано, что критерий электроконвекции явно не зависит от начальной концентрации и поэтому электроконвекция возникает при любой начальной концентрации. В то же время критерий концентрационной конвекции линейно зависит от начальной концентрации и поэтому при высоких концентрациях превалирует концентрационная конвекция, а при более низких концентрациях, роль гравитационной конвекции начинает падать при одновременном возрастании роли электроконвекции. Построенная в работе теория подобия процесса тепломассопереноса в канале обессоливания электродиализного аппарата, с учетом совместного действия концентрационной поляризации, пространственного заряда, гравитационной, вынужденной и электроконвекции имеет важное значение для инженерных расчетов, для масштабирования резуль-

In the article, we have suggested a general mathematical model of non-stationary and non-isothermal process of a binary electrolyte transfer in dilute solutions in an electro-membrane system (EMS), taking into account the joint action of gravitational convection, forced convection and electro convection in potential dynamic mode. This model is a boundary problem for a system of two-dimensional quasi-linear Navier-Stokes equation and Nernst-Planck-Poisson in partial derivatives equation. We have developed a theory of similarity of the process of heat and mass transfer in electro-membrane systems, specifically, in a desalting channel of electro dialysis apparatus, taking into account joint actions of concentration polarization, space charge, gravity convection, forced convection and electro convection. It is shown that the criterion of electro convection does not directly depend on the initial concentration, and, therefore, electro convection occurs at any initial concentration. At the same time, the criterion of concentration convection linearly depends on the initial concentration, and, therefore, at high concentrations, concentration convection prevails, while at lower concentrations, the role of gravitational convection begins to fall whereas the role of electro convection increases. The theory of similarity of the process of heat and mass transfer in the desalting channel of electro dialysis apparatus built in this work taking into account the joint action of concentration polarization, space charge, gravity convection, forced convection and electro convection is important for engineering calculations, for scaling the results of experiments in an electro-membrane cell for industrial electro dialysis water desalting apparatus

татов экспериментов в электромембранной ячейке для промышленных электродиализных аппаратов обессоливания воды

Ключевые слова: ОБЕССОЛИВАНИЕ, КРИТЕРИАЛЬНЫЕ ЧИСЛА, ЭЛЕКТРОДИАЛИЗ, УРАВНЕНИЯ НЕРНСТА-ПЛАНКА-ПУАССОНА И НАВЬЕ-СТОКСА, ПОДОБИЕ, КРИТЕРИИ ПОДОБИЯ

Keywords: DESALINATION, CRITERIAL NUMBERS, ELECTRODIALYSIS, NERNST-PLANCK-POISSON EQUATIONS, NAVIER-STOKES EQUATIONS, SIMILARITY, SIMILARITY THEORY

**Введение.** Тепломассоперенос бинарного электролита в канале обессоливания электродиализного аппарата сопровождается рядом электрохимических процессов, включая конвективный перенос, диффузию, электромиграцию, образование пространственного заряда, джоулевый разогрев электролита и т.д. Имеется ряд экспериментальных данных, позволяющих предположить, что сверхпределный массоперенос в электромембранных системах связан с некоторым видом конвективного смешивания, развивающегося вблизи межфазной границы [1, 2]. В качестве такой конвекции в настоящее время рассматриваются гравитационная конвекция и электроконвекция. Возникновение гравитационной конвекции зафиксировано экспериментально шпирен-методом и с помощью лазерной интерферометрии [3].

Современное состояние теории массопереноса в электродных системах с гравитационной конвекцией описано и проанализировано в обзоре [4]. В мембранных системах описание гравитационной конвекции с учетом изменения концентраций и джоулева разогрева проведено в работах В.А. Шапошника, Е.Н. Коржова и О.В. Григорчук (см., например, [5]). Однако в этих работах изучен только стационарный перенос в допределном режиме и не рассматриваются вынужденная конвекция и перенос тепла через мембрану.

В работах [6, 7] с использованием математической модели была теоретически проанализирована роль гравитационной конвекции и указаны условия, при которых она имеет существенное влияние на тепломассооб-

мен. Было показано, что для этого, например, необходимо, чтобы ширина камеры обессоливания была достаточно большей. Для узких каналов роль гравитационной конвекции незначительна. Однако эти выводы были получены из анализа математических моделей с условием электронейтральности, т.е. при допредельных токовых режимах.

В работе [8] показано, что в запредельном режиме, в области пространственного заряда выделяется значительно больше, чем в области электронейтральности. В связи с этим возникает необходимость в теоретическом исследовании гравитационной конвекции и ее учет в мембранных системах в запредельном режиме с учетом пространственного заряда.

Однако имеются ряд экспериментов ставящих под сомнение роль гравитационной конвекции [9]. В качестве примера можно указать на эксперименты по изменению ориентации электромембранной ячейки относительно поля тяжести Земли [10]. Они показали, что выход по току меняется лишь для относительно широких каналов при небольших скоростях прокачки. Следовательно, возникает гипотеза, что возможно, лишь при таких условиях гравитационная конвекция влияет на перенос ионов соли.

Теоретическое исследование электроконвекции в настоящее время интенсивно развиваются, однако, из-за имеющихся математических и вычислительных трудностей находится, по-видимому, в начальной стадии. Тем не менее, в последнее время, складывается убеждение о значительном вкладе электроконвекции в свехпредельный режим. Современное состояние теории электроконвекции описано и проанализировано в обзоре [11].

Для электроконвекции различают два существенно разных вида: электроосмос первого рода и электроосмос второго рода. Теория электроосмоса первого рода или квазиравновесного электроосмоса у селективной границы была развита С.С. Духиным, Б.В. Дерягиным, Н.А. Мищук и другими [12, 13]. Теория электроосмоса второго рода развита в работах И. Рубинштейна, Б. Зальцмана [14, 15], М. Базанта [16, 17] и др. Таким образом,

можно сказать, что в работах С.С. Духина, Н.А. Мищук, И. Рубинштейна и Б. Зальцмана, М. Базанта заложены основы теории электроконвекции в ЭМС.

Однако в этих работах при математическом моделировании электроконвекции накладываются некоторые ограничения: отсутствует вынужденная конвекция, уравнение Пуассона используется лишь для одномерного случая, а в двумерном случае вместо него используется условие электронейтральности в сочетании с условием скольжения на межфазной границе, в качестве граничных условий для концентрации используется условия периодичности, поскольку канал предполагается бесконечным. Условия периодичности не позволяют учесть обессоливание раствора вниз по потоку. Для решения краевых задач используется метод конечных разностей, и при этом для нелинейного анализа устойчивости используется введение в разностные схемы периодических возмущений. Необходимо отметить, что ошибки, неизбежные при численном решении, в принципе делают ненужным периодические возмущения, вносящие дополнительные искажения в решение. Расчеты, проведенные нами, показывают, что скорость скольжения, рассчитанная по формуле Рубинштейна и Зальцмана, намного меньше скорости вынужденного течения раствора, реально применяемого на практике, и соответственно, не оказывает существенного влияния на исследуемые процессы. Поэтому подход, используемый ими для моделирования электроконвекции, при наличии вынужденной конвекции неприменим. Кроме того, электроконвекция моделируется лишь для диффузионного слоя, что не позволяет исследовать изменение толщины диффузионного слоя в зависимости от длины аппарата, величины падения потенциала и т.д.

Дальнейшее развитие теория электроконвекции получила в работах [18-21]. В этих работах предложена 2D-математическую модель переноса ионов в мембранных ячейках с учетом вынужденной конвекции и электро-

конвекции, при отсутствии химических реакций. Модель основана на связанных уравнениях Навье-Стокса и Нернста-Планка - Пуассона и не содержит каких-либо настраиваемых параметров. Численное решение найдено без априорного разделения всего решения на электронейтральную и заряженную области. Учет ненулевой вынужденной конвекции и специфичные граничные условия, отличают модели друг от друга и от тех, которые были разработаны ранее. В этих работах проведен численный анализ исследуемой задачи, установлены основные закономерности возникновения и развития электроконвекции. В работе [20] впервые теоретически рассчитана вольтамперная кривая. Проведено сопоставление численных результатов с экспериментальными данными и показано их качественное сходство.

В проанализированных выше работах используются, как правило, размерные величины. Поэтому фактически исследуется влияние отдельных факторов, например, скачка потенциала, средней скорости вынужденного течения раствора, геометрических характеристик канала, начальной концентрации, и т.д. на процесс переноса. Однако влияние этих факторов проявляется не порознь, а совместно. Таким образом, возникает проблема введения безразмерных комплексов из размерных величин, имеющих физический смысл и позволяющих выразить внутренние связи процесса. Как известно, для решения этой проблемы используется теория подобия, основанная на переходе к безразмерным параметрам в уравнениях и формулах, описывающих процесс, с использованием характерных для изучаемой системы величин.

Имеется много работ (см. [4, 28]), посвященных переходу к безразмерным переменным и критериям подобия в задачах, где предполагается выполнение условия электронейтральности. В этих работах исследуется в основном влияние вынужденной и естественной конвекции на тепломассоперенос. Однако в рамках предположения о выполнении условия элек-

тронейтральности прямой учет влияния электроконвекции невозможен, а косвенный учет затруднен и требует привлечения дополнительных условий типа условий скольжения. В связи с этим возникает проблема перехода к безразмерным переменным и построения теории подобия с использованием уравнений Нернста-Планка и Пуассона, Навье-Стокса и уравнения теплопроводности. Связь между этими уравнениями осуществляется за счет учета электрической силы и подъемных сил, возникающих в результате концентрационной поляризации, пространственного заряда и джоулевого разогрева раствора.

Переход к безразмерным переменным в системе уравнений Нернста-Планка и Пуассона в частном случае бинарного 1:1 электролита впервые осуществлен, по-видимому, в [22]. Там же предлагается физический смысл некоторых критериев подобия.

В работах [4, 21] осуществлен переход к безразмерным переменным в связанной системе уравнений Нернста-Планка, Пуассона и Навье-Стокса. Из-за того, что в качестве характерного масштаба взята длина мембраны физическая интерпретация безразмерных параметров не совпадает с [22, 23], их физический смысл неясен.

В работе [24] нами была разработана теория подобия для электро-мембранных систем с учетом электроконвекции. Однако в этой работе не учитывалось гравитационная конвекция, возникающая в результате концентрационной поляризации и джоулевого разогрева раствора.

Противоречия в экспериментальных данных и их интерпретации, несовершенство модельных представлений делает невозможным адекватное описание процессов, протекающих в реальных электрохимических системах. Таким образом, теоретическое исследование изучения сверхпредельного тепломассопереноса в канале обессоливания электродиализного аппарата для бинарного электролита в условиях совместного действия концентрационной поляризации, пространственного заряда, вынужденной,

гравитационной и электроконвекции, выяснения роли и влияния каждого из них на перенос ионов соли в электромембранных системах является актуальной проблемой.

Данная работа является продолжением и развитием работ [24, 25]. В ней построена теория подобия процессов переноса в канале обессоливания с учетом **всех типов конвективного движения раствора** в электромембранных системах, а именно с учетом вынужденной конвекции, гравитационной конвекции и электроконвекции, предложены некоторые нетривиальные критерии подобия и определен их физический смысл.

### **§1 Постановка задачи**

Для теоретического изучения взаимодействия вынужденной, гравитационной и электроконвекции, а также джоулева разогрева раствора и переноса тепла через мембраны, построим двумерную модель нестационарного переноса бинарного электролита в гладком прямоугольном канале обессоливания электродиализного аппарата.

В электромембранных технологиях очистки воды, как правило, применяется два основных режима эксплуатации электродиализных аппаратов: гальванодинамический (гальваностатический) и потенциодинамический (потенциостатический).

В данной работе исследуется **потенциодинамический** режим. Будем считать что рассматриваемые катионообменные и анионообменные мембраны являются гомогенными. Кроме того, поверхности ионообменных мембран будем считать эквипотенциальными.

#### **1.1 Переход к безразмерному виду, оценка критериальных чисел, входящих в уравнения**

При проведении и анализе физических и численных экспериментов можно видеть, что часть данных, условно говоря, неизменна, а другая часть варьируется от эксперимента к эксперименту. Если ограничиться экспериментами с раствором хлорида натрия, то неизменными можно

считать коэффициенты диффузии катиона ( $D_1 = 1.33 \cdot 10^{-9} \text{ м}^2/\text{с}$ ) и аниона ( $D_2 = 2.05 \cdot 10^{-9} \text{ м}^2/\text{с}$ ). Считаются неизменными начальная плотность раствора  $\rho_0 = 1002.5 \text{ кг/м}^3$ , коэффициент кинематической вязкости  $\nu = 1006 \cdot 10^{-9} \text{ м}^2/\text{с}$ , коэффициент кинематической вязкости  $\nu = 1006 \cdot 10^{-9} \text{ м}^2/\text{с}$ , удельная теплоемкость раствора  $c_p = 4083 \text{ Дж}/(\text{кг} \cdot \text{К})$  [26].

Используются также универсальные постоянные: число Фарадея  $F$ , универсальная газовая постоянная  $R$ , диэлектрическая проницаемость среды  $\epsilon_r$ .

Изменяемыми параметрами, определяющими условия эксперимента, являются, ширина канала обессоливания  $H$ , которая обычно меняется в зависимости от размера экспериментальной ячейки, длина канала  $L$ , средняя скорость вынужденного течения раствора  $V_0$ , начальная концентрация раствора  $C_0$ .

Ниже предлагаются данные характерные для процесса тепломассопереноса в канале обессоливания электродиализного аппарата. Они используются ниже при переходе к безразмерному виду. Часть этих данных вводится независимо, другая получается «автоматически» при переходе к безразмерному виду.

### **1) Характерные скорость, пространственная величина, время**

Средняя скорость вынужденного течения раствора варьируется от  $V_0 = 2 \cdot 10^{-6} \text{ м/с}$  до  $V_0 = 10^{-2} \text{ м/с}$  и она берется в качестве характерной скорости.

Поскольку, начальное вынужденное течение направлено вдоль канала, то, казалось бы, что нужно использовать в качестве характерного расстояния длину канала, и, определять через него, например, характерное время, число Рейнольдса и т.д. Однако в гидродинамике, для течения в канале в качестве характерного размера берется именно ширина канала  $H$ , а не длина  $L$ . Аналогичная ситуация для течения в круглых трубах, в каче-



стве характерного размера берется диаметр трубы, а не длина. Объясняется это с физической точки зрения тем, что:

1) для длинного канала ( $L \gg H$ ), его длина может считаться бесконечно большой, поскольку на течение длина уже не влияет и остается всего один линейный размер, - ширина канала  $H$ ,

2) каким ни было течение в начале канала, она при  $\hat{L} \approx 2H$  или  $\hat{L} \approx 3H$  вниз по течению становится течением Пуазейля, т.е. характерная длина  $\hat{L}$  - зависит от ширины канала  $H$ , а не от реальной длины канала  $L$ .

Ширина канала обессоливания ЭДА меняется от 0.5 мм до 10 мм, а длина от 1 мм до десятков сантиметров. С учетом 1) и 2) получаем, время  $t_0 = H/V_0$  - это характерное время установления течения, при этом величина  $H$  рассматривается как длина канала, равная по размеру ширине канала. Кроме того, в данной задаче основное внимание уделяется процессам переноса ионов соли, через ионообменные мембраны, т.е. поперек канала.

**2) Характерные значения падения потенциала, начальной концентрации и температуры.** Падение потенциала в камере обессоливания от меняется от  $d_\varphi = 0$  В до  $d_\varphi = 10$  В. Начальная концентрация раствора принимает значения от  $C_0 = 0.01$  моль/м<sup>3</sup> до  $C_0 = 10$  моль/м<sup>3</sup>, начальная температура раствора  $T_0 = 298$  К.

**3) Характерное давление.** Для движения раствора со средней скоростью  $V_0$  величина  $P_0 = \rho_0 V_0^2$  является характерным давлением, которая называется также скоростным напором или динамическим давлением. В аэро- и гидродинамике она обычно служит в качестве характерного масштаба гидродинамического давления и используется при определении аэродинамических коэффициентов.

**4) Характерные величины плотности тока и электрической силы.** Характерным значением плотности тока служить предельная плотность тока, которая считается по формуле  $i_{np} = 2FD_1C_0/H$ . Для того, чтобы выяснить

физический смысл параметров  $\varepsilon^{(u)}$  и  $K_{el}$  (см. ниже), необходимо ввести в рассмотрение характерное значение электрической силы. Для этого в работе [24], используя приближенное решение краевой задачи для системы одномерных уравнений НПП (Нернста - Планка и Пуассона) для раствора хлористого натрия показано [27], что характерным значением пространственной электрической силы в двумерном случае, действующей на квадрат с характерной стороной  $H$  является:

$$F_{el} = 2RT_0C_0H^2 \quad (1)$$

## 1.2 Переход к безразмерным уравнениям

**1) Формулы перехода.** Для математической постановки задачи и численного ее решения необходимо привести уравнения к безразмерному виду. Для этого сделаем следующие замены:

$$\begin{aligned} x^{(u)} &= \frac{x}{H}, \quad y^{(u)} = \frac{y}{H}, \quad L^{(u)} = \frac{L}{H}, \quad t^{(u)} = \frac{tV_0}{H}, \quad \vec{V}^{(u)} = \frac{\vec{V}}{V_0}, \quad P^{(u)} = \frac{P}{P_0}, \quad P_0 = \rho_0V_0^2, \quad D_0 = D_1, \\ \vec{E}^{(u)} &= \frac{HF}{RT_0} \vec{E}, \quad \varphi^{(u)} = \frac{F}{RT_0} \varphi, \quad \varepsilon^{(u)} = \frac{RT_0\varepsilon_r}{F^2H^2C_0}, \quad C_i^{(u)} = \frac{C_i}{C_0}, \quad \vec{j}_i^{(u)} = \frac{H}{D_0C_0} \vec{j}_i, \quad \vec{e}_g^{(u)} = \frac{1}{g} \vec{g}, \\ D_i^{(u)} &= \frac{D_i}{D_0}, \quad \vec{I}^{(u)} = \frac{H}{D_0C_0F} \vec{I}, \quad d_\varphi^{(u)} = \frac{F}{RT_0} d_\varphi, \quad \vec{I}^{(u)} = \frac{H}{DC_0F} \vec{I}, \quad f_0 = \frac{\rho_0V_0^2}{H}, \quad T^{(u)} = \frac{T}{T_0}, \\ B^{(u)} &= \frac{RC_0}{\rho_0c_p}, \quad A_1^{(u)} = \frac{a_1C_0gH}{\rho_0V_0^2}, \quad A_2^{(u)} = \frac{a_2C_0gH}{\rho_0V_0^2}, \quad A_T^{(u)} = \frac{a_TT_0gH}{\rho_0V_0^2}, \quad k = k^{(d)}H^{(d)}. \end{aligned}$$

## 1.3 Безразмерные параметры в уравнениях и краевых условиях и их физический смысл

Рассмотрим безразмерные параметры и выясним их физический смысл:

- 1) **Длина**  $L^{(u)} = L/H = k_d H^{(u)} = k_d$ . Безразмерная длина является параметром.
- 2) **Число Пекле**  $Pe = V_0H/D_0$  - отношение конвективного переноса к молекулярному.
- 3) **Число Рейнольдса**  $Re = V_0H/\nu$  - отношение силы инерции  $F_{in} = \rho_0H^2V_0^2$  к силе вязкого трения  $F_{tr} = \nu\rho_0V_0H$ .

**4) Число Прандтля**  $Pr = \nu/\alpha$  - физическая постоянная, которую можно интерпретировать как количественную меру относительной скорости возрастания гидродинамического и теплового пограничных слоев.

**5) Физический смысл величины  $\varepsilon^{(u)}$ .** Число  $\varepsilon^{(u)}$  можно рассматривать как величину обратную к характерной безразмерной электрической силе:

$$\varepsilon^{(u)} = \frac{(RT_0)^2 \varepsilon_r}{H^2 RT_0 C_0 F^2} = \frac{k_1}{F_{el}}, \text{ где } k_1 = \frac{(RT_0)^2 \varepsilon_r}{F^2} - \text{физическая постоянная величина}$$

имеющая размерность силы. Таким образом:

$$\varepsilon^{(u)} = k_1/F_{el} \quad \text{или} \quad \varepsilon^{(u)} = 1/F_{el}^{(u)}, \quad (2)$$

где  $F_{el}^{(u)}$  - безразмерная характерная электрическая сила. Поэтому  $\varepsilon^{(u)}$  может быть названа **обратным числом электрической силы**.

**6) Физический смысл величины  $K_{el} = \frac{RT_0 C_0}{\rho_0 V_0^2}$ .** Число  $K_{el}$  можно рассмат-

ривать как отношение электрической силы к силе инерции

$$K_{el} = \frac{RT_0 C_0}{\rho_0 V_0^2} = \frac{RT_0 C_0 H^2}{\rho_0 V_0^2 H^2} = \frac{F_{el}}{F_{in}}, \text{ где} \quad (3)$$

$F_{el} = RT_0 C_0 H^2$  - характерная электрическая сила,  $F_{in} = \rho_0 V_0^2 H^2$  - сила инерции.

**7) Общее критериальное число электроконвекции  $K_{ek}$**  определяется как коэффициент при безразмерной электрической силе, ответственной за электроконвекцию, т.е. в виде (4) или через размерные параметры (5):

$$K_{ek} = \varepsilon^{(u)} K_{el}, \quad (4)$$

$$K_{ek} = \frac{(RT_0)^2 \varepsilon_r}{\rho_0 V_0^2 H^2 F^2}. \quad (5)$$

Из определения числа электроконвекции  $K_{ek}$  следует существование такого его критического значения  $\bar{K}_{ek}$ , что при  $K_{ek} \geq \bar{K}_{ek}$ , электроконвекция возникает везде в канале.

**8) Число  $B^{(u)} = RC_0/\rho_0 c_p$ .**

9) Числа  $A_1^{(u)} = \frac{a_1 C_0 g H}{\rho_0 V_0^2}$ ,  $A_2^{(u)} = \frac{a_2 C_0 g H}{\rho_0 V_0^2}$ ,  $A_T^{(u)} = \frac{a_T T_0 g H}{\rho_0 V_0^2}$ . Записывая числа

$A_i^{(u)}, i=1,2$  и  $A_T^{(u)}$  в виде  $A_i^{(u)} = \frac{a_i C_0 g H}{\rho_0 V_0^2} = \frac{a_i C_0 g H^3}{\rho_0 V_0^2 H^2} = \frac{F_i}{F_{in}}, i=1,2$  и

$A_T^{(u)} = \frac{a_T T_0 g H}{\rho_0 V_0^2} = \frac{a_T T_0 g H^3}{\rho_0 V_0^2 H^2} = \frac{F_T}{F_{in}}$ , где  $F_i = a_i C_0 g H^3, i=1,2$ , а  $F_T = a_T T_0 g H^3$ , получаем,

что  $A_i^{(u)}, i=1,2$  и  $A_T^{(u)}$  являются отношениями сил плавучести  $F_i, i=1,2$ , и  $F_T$  к силе инерции.

10) Числа  $k = k^{(d)} H^{(d)}; \vec{e}_g^{(u)} = \vec{g} / g$  - единичный вектор поля тяжести

11) Введем в рассмотрение также безразмерные параметры, входящие

в краевые условия [24]:  $d_\phi^{(u)} = F d_\phi / RT_0$ ,  $d_0^{(u)} = F d_0 / RT_0$ ,  $d_1^{(u)} = F d_1 / RT_0$ ,

$C_{km}^{(u)} = C_{km} / C_0$ ,  $C_{am}^{(u)} = C_{am} / C_0$ , имеющие смысл, соответственно, общего зна-

чения, начального значения и темпа прироста потенциала, а также граничных значений концентраций на анионообменной и катионообменной мембранах. Кроме того, важным параметром является отношение длины к ширине  $k_d$ , равное безразмерной длине. В рамках модели мы считаем одинаковыми начальную концентрацию в канале и концентрацию на входе в канал, хотя могут быть эксперименты, когда они разные. В ряде численных экспериментов ниже для простоты расчетов, принято  $C_{am} = C_{km} = C_0$ .

12) Оценка безразмерных параметров показывает, что для характерных значений размерных величин для электродиализа, число Рейнольдса имеют порядок  $1 \div 100$ , а число Пекле и  $10^2 \div 10^4$ . Число  $\varepsilon$  можно считать малым параметром, поскольку он меняется от  $10^{-17}$  до  $10^{-7}$ . Число  $K_{el}$  имеет порядок  $10 \div 10^3$ . Число  $K_{ek}$  имеет порядок  $10^{-14} \div 10^{-4}$ .

## §2 Краевая задача в безразмерном виде

1) Система уравнений в безразмерных величинах имеет вид (индекс «u» для упрощения записи опущен):

$$\vec{J}_i = z_i D_i C_i \vec{E} - D_i \nabla C_i + Pe C_i \vec{V}, \quad i=1,2 \quad (6)$$

$$Pe \frac{\partial C_i}{\partial t} = -div \vec{j}_i, \quad i = 1, 2 \quad (7)$$

$$\varepsilon \Delta \varphi = -(z_1 C_1 + z_2 C_2) \quad (8)$$

$$\vec{I} = z_1 \vec{j}_1 + z_2 \vec{j}_2 \quad (9)$$

$$\frac{\partial \vec{V}}{\partial t} + (\vec{V} \nabla) \vec{V} = -\nabla P + \frac{1}{Re} \Delta \vec{V} + \varepsilon K_{el} \Delta \varphi \nabla \varphi - (A_1(C_1 - 1) + A_2(C_2 - 1) + A_T(T - 1)) \vec{e}_g \quad (10)$$

$$div(\vec{V}) = 0 \quad (11)$$

$$\frac{\partial T}{\partial t} = -V_x \frac{\partial T}{\partial x} - V_y \frac{\partial T}{\partial y} + \frac{1}{Re \cdot Pr} \left( \frac{\partial^2 T}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 T}{\partial y^2} \right) + \frac{B}{Pe} (i_x E_x + i_y E_y) \quad (12)$$

## 2) Краевые условия в безразмерном виде

Поверхности ионообменных мембран считаются эквипотенциальными  $\varphi(1, y, t) - \varphi(0, y, t) = d_\varphi(t)$ ,  $t \geq 0, y \in [0, L]$ .

### 1) Условия на поверхности анионообменной мембраны:

$$C_2(0, y, t) = C_{am}, \quad t \geq 0, y \in [0, L].$$

$$-\vec{n} \cdot \vec{j}_1 = -\vec{n} \cdot (-z_1 D_1 C_1 \nabla \varphi - D_1 \nabla C_1 + Pe C_1 \vec{V}) = 0.$$

$$\vec{V}(t, 0, y) = 0, \quad t \geq 0, y \in [0, L].$$

$$\frac{\partial T(t, 0, y)}{\partial x} = -k(T(t, 0, y) - 1).$$

### 2) Условия на поверхности катионообменной мембраны:

$$C_1(1, y, t) = C_{km}, \quad t \geq 0, y \in [0, L].$$

$$-\vec{n} \cdot \vec{j}_2 = -\vec{n} \cdot (-z_2 D_2 C_2 \nabla \varphi - D_2 \nabla C_2 + Pe C_2 \vec{V}) = 0.$$

$$\frac{\partial T(t, 1, y)}{\partial x} = k(T(t, 1, y) - 1),$$

$$\vec{V}(t, 1, y) = 0, \quad t \geq 0, y \in [0, L].$$

### 4) Условия на входе в канал обессоливания:

$$C_i(t, x, 0) = C_{i,0}, \quad i = 1, 2$$

$$V_x(t, x, 0) = 0, \quad V_y(t, x, 0) = 6V_0 x(1 - x).$$

$$\vec{n} \cdot \nabla \varphi = -\vec{n} \cdot \nabla (z_1 D_1 C_1 + z_2 D_2 C_2) / (z_1^2 D_1 C_1 + z_2^2 D_2 C_2).$$

$$T(t, x, 0) = T_0.$$

**5) Условия на выходе из канала:**

$$-z_i D_i C_i \frac{\partial \varphi}{\partial y} - D_i \frac{\partial C_i}{\partial y} = 0, \quad i=1,2$$

$$\vec{n} \cdot \nabla \varphi = -\vec{n} \cdot \nabla (z_1 D_1 C_1 + z_2 D_2 C_2) / (z_1^2 D_1 C_1 + z_2^2 D_2 C_2).$$

$$V_x(t, x, L) = 0, V_y(t, x, L) = 6V_0 x(1 - x),$$

$$P(t, 0, L) = P(t, 1, L) = P_0,$$

$$\frac{\partial T(t, x, L)}{\partial x} = 0.$$

**6) Начальные условия:**  $C_i(0, x, y) = C_{i,0}, i=1,2, \quad \varphi(0, x, y) = d_\varphi x,$

$$V_x(0, x, y) = 0, V_y(0, x, y) = 6V_0 x(1 - x), T(0, x, y) = T_0.$$

**§3 Нетривиальные критерии подобия**

Один из нетривиальных мультипликативных критериев подобия, вводится по определению:  $K_{ek} = \varepsilon K_{el}.$

Поскольку в данной работе предполагается, что  $D_0$  и  $\nu$  являются постоянными, то постоянным является число Прандтля:  $Pr = \nu/D_0.$  Числа Пекле и Рейнольдса связаны соотношением:  $Pe = Pr Re.$

Нетривиальные критерии подобия находим, комбинируя тривиальные критерии подобия. Через  $\gamma_i$  будем обозначать постоянные не зависящие от критериев подобия, т.е. физические постоянные в данной задаче.

Найдены следующие нетривиальные критерии подобия:  $A_1 = \gamma_1 A_2,$

$$K_{ek} = \varepsilon K_{el}, \quad Pe^4 \varepsilon^3 A_1^5 = \gamma_2 A_T^3 B^2, \quad A_1 K_{el}^3 Pe^2 = \gamma_3 A_T^3 B^4, \quad A_1^2 K_{ek} Pe^2 = \gamma_4 A_T^2 B^2, \quad \text{где } \gamma_1 = \frac{a_1}{a_2},$$

$$\gamma_2 = \frac{Ra_1^5 \varepsilon_r^3 c_p^2 g^2}{a_T^3 F^6 D^4}, \quad \gamma_3 = \frac{\rho_0^3 c_p^4 a_1}{Ra_T^3 g^2 D^2}, \quad \gamma_4 = \frac{\varepsilon_r \rho_0 c_p^2 a_1^2}{a_T^2 D^2 F^2}.$$

#### §4 Основные закономерности взаимодействия вынужденной, гравитационной и электроконвекции на основе анализа критериев подобия

##### 1) Выводы из анализа критериев подобия

Запишем критерии подобия, отвечающий за электроконвекцию:

$$K_{ek} = \gamma_5 (T_0/V_0 H)^2, \text{ где } \gamma_5 = \varepsilon_r R^2 / \rho_0 F^2. \quad (13)$$

Из (13) следует, что  $K_{ek}$  явно зависит только от начальной температуры  $T_0$ , начальной скорости прокачки раствора  $V_0$  и ширины канала  $H$  в виде комплекса  $T_0/V_0 H$ , причем зависимость квадратичная. При этом, **чем меньше скорость вынужденного течения и (или) ширина канала, и (или) выше температура, тем сильнее выражена электроконвекция.**

Запишем критерии подобия, отвечающие за **концентрационную конвекцию**, в виде:

$$A_i = \gamma_{i,6} \cdot C_0 H / V_0^2, \quad i = 1, 2, \quad \text{где } \gamma_{i,6} = a_i g / \rho_0. \quad (14)$$

Из (14) следует, что  $A_i$  явно зависит только от начальной концентрации  $C_0$ , начальной скорости прокачки раствора  $V_0$  и ширины канала  $H$  в виде комплекса  $C_0 H / V_0^2$ . При этом, **чем меньше скорость вынужденного течения, тем сильнее выражена концентрационная конвекция**, причем зависимость, как и в случае электроконвекции квадратичная. В то же время, в отличие от электроконвекции **концентрационная конвекция усиливается с увеличением ширины канала**. Кроме того, критерии подобия, отвечающий за **концентрационную конвекцию** зависят от начальной концентрации, причем эта зависимость является линейной, и, следовательно, **концентрационная конвекция усиливается с увеличением начальной концентрации раствора.**

Запишем критерий подобия, отвечающие за **тепловую конвекцию** в виде:

$$A_T = \gamma_6 \cdot T_0 H / V_0^2, \quad \text{где } \gamma_6 = a_T g / \rho_0. \quad (15)$$

Из (15) следует, что  $A_T$  явно зависит только от начальной температуры  $T_0$ , начальной скорости прокачки раствора  $V_0$  и ширины канала  $H$  в виде комплекса  $T_0 H / V_0^2$ . Зависимость **тепловой конвекции** от начальной скорости прокачки раствора  $V_0$  и ширины канала  $H$  аналогично такой зависимости **концентрационной конвекции**. В то же время, **тепловая конвекция** зависит не от начальной концентрации, а от начальной температуры, причем эта зависимость является линейной, и, следовательно, **тепловая конвекция усиливается с увеличением начальной температуры раствора**.

Таким образом, теоретически доказано, что с увеличением начальной концентрации и (или) ширины канала, начинает превалировать концентрационная конвекция, а с уменьшением начальной концентрации и (или) ширины канала, начинает превалировать электроконвекция. В то же время при прочих равных условиях, с увеличением температуры вначале будет превалировать тепловая конвекция (зависимость  $A_T$  от  $T_0$  линейная), а затем электроконвекция (зависимость  $K_{ek}$  от  $T_0$  квадратичная).

Определенные выше теоретические закономерности подтверждены численным исследованием краевой задачи. Показано, что для раствора хлористого натрия при комнатной температуры и ширине канала обессоливания порядка 1 мм и скорости вынужденной конвекции 0.001 мм/с, концентрационная конвекция превалирует в области концентраций порядка 10 и более моль/м<sup>3</sup>, а электроконвекция превалирует в области концентраций порядка 0.1 и менее моль/м<sup>3</sup> [29].

## 2) Выводы из анализа нетривиальных критериев подобия

Запишем для удобства все полученные выше нетривиальные критерии подобия:  $A_1 = \gamma_1 A_2$ ,  $K_{ek} = \varepsilon K_{el}$ ,  $Pe^4 \varepsilon^3 A_1^5 = \gamma_2 A_T^3 B^2$ ,  $A_1 K_{el}^3 Pe^2 = \gamma_3 A_T^3 B^4$ ,  
 $A_1^2 K_{ek} Pe^2 = \gamma_4 A_T^2 B^2$ .



С точки зрения влияния начальных данных на концентрационную конвекцию, из равенства  $A_1 = \gamma_1 A_2$  получаем, что роль катионов и анионов, практически одинаково. Отсюда следует, что при  $\gamma_1 = 1$  течение в канале будет симметричным.

Равенство  $Pe^4 \varepsilon^3 A_1^5 = \gamma_2 A_T^3 B^2$  показывает соотношение между концентрационной конвекцией и тепловой конвекцией с учетом пространственного заряда и джоулевым разогревом раствора и степень влияния каждого из них на тепломассоперенос.

Равенства,  $A_1 K_{el}^3 Pe^2 = \gamma_3 A_T^3 B^4$  и  $A_1^2 K_{ek} Pe^2 = \gamma_4 A_T^2 B^2$ , и их аналоги, получаемые заменой  $Re = Pe \cdot Pr$ , а именно:  $A_1 K_{el}^3 Re^2 = \gamma_3 Pr^2 A_T^3 B^4$  и  $A_1^2 K_{ek} Re^2 = \gamma_4 Pr^2 A_T^2 B^2$  показывает соотношение между вынужденной конвекцией, концентрационной конвекцией и тепловой конвекцией с учетом джоулевого разогрева раствора и степень влияния каждого из них на тепломассоперенос.

**Заключение.** Построена достаточно общая математическая модель нестационарного переноса бинарного электролита в электромембранных системах с учетом совместного действия гравитационной, вынужденной и электроконвекции. Она представляет собой краевую задачу для системы квазилинейных уравнений в частных производных.

Развита теория подобия процесса тепломассопереноса в электромембранных системах, конкретно в канале обессоливания электродиализного аппарата, с учетом с учетом совместного действия концентрационной поляризации, пространственного заряда, гравитационной, вынужденной и электроконвекции.

Найдены нетривиальные критерии подобия и выяснен вклад концентрационной поляризации, пространственного заряда, гравитационной, вынужденной и электроконвекции в тепломассоперенос.

Показано, что критерий электроконвекции явно не зависит от начальной концентрации и поэтому электроконвекция возникает при любой начальной концентрации. В то же время критерий концентрационной конвекции линейно зависит от начальной концентрации и поэтому при высоких концентрациях превалирует концентрационная конвекция, а при более низких концентрациях, роль гравитационной конвекции начинает падать при одновременном возрастании роли электроконвекции.

Построенная выше теория подобия процесса тепломассопереноса в канале обессоливания электродиализного аппарата, с учетом совместного действия концентрационной поляризации, пространственного заряда, гравитационной, вынужденной и электроконвекции имеет важное значение для инженерных расчетов, для масштабирования результатов экспериментов в электромембранной ячейке для промышленных электродиализных аппаратов обессоливания воды.

*Исследование выполнено при финансовой поддержке РФФИ в рамках научных проектов № 13-08-93105-НЦНИЛ\_а, № 13-08-93106-НЦНИЛ\_а и № 13-08-96525 р\_юг\_а.*

#### ЛИТЕРАТУРА

1. Уртенев М.Х. Конвективно-диффузионная модель процесса электродиализного обессоливания. Предельный ток и диффузионный слой / Н.П. Гнусин, В.И. Заболоцкий, В.В. Никоненко, М.Х. Уртенев // Электрохимия. – 1986. – Т. 22, № 3. – С. 298-302.
2. Заболоцкий, В.И. Перенос ионов в мембранах / В.И. Заболоцкий, В.В. Никоненко. – М.: Наука, 1996. – 390 с.
3. Шапошник В.А., Васильева В.И., Григорчук О.В. Явления переноса в ионообменных мембранах. М.: Изд-во МФТИ, 2001. 200 с.
4. Волгин В.М., Давыдов А.Д. Естественно-конвективная неустойчивость электрохимических систем // Электрохимия. 2006. Т.42. №6. С.635-678.
5. Григорчук О.В., Коржов Е.Н., Шапошник В.А. Температурное поле в электро-мембранной системе при естественной конвекции // Электрохимия. 1991. Т.27, №12. С.1676-1679
6. Уртенев М.Х. Математическое моделирование переноса в электромембранных системах с учетом конвективных течений / А.В. Лаврентьев, А.В. Письменский, М.Х. Уртенев // Краснодар, КубГТУ, 2006. – 146 с.
7. Письменский, А.В. Моделирование и экспериментальное исследование гравитационной конвекции в электромембранной ячейке / Письменский А.В., Коваленко А.В., Уртенев М. Х., Никоненко В.В., Сиса Ф., Письменская Н.Д. // Электрохимия. – Т.48, №7. – 2012. – С. 830-842.

8. Уртенов К.М., Коваленко А.В., Шапошникова Т.Л. Математическое моделирование тепломассопереноса в электродиализных аппаратах водоподготовки. М.: Финансы и статистика, 2010. 214 с.

9. Письменская Н.Д., Никоненко В.В., Белова Е.И., Лопаткова Г.Ю., Систа Ф., Пурсели Ж., Ларше К. Сопряженная конвекция раствора у поверхности ионообменных мембран при интенсивных токовых режимах // Электрохимия. 2007. Т.43, №3, С.1-21.

10. Nikonenko Victor V., Pismenskaya Natalia D., Belova Elena I., Sistas Philippe, Huguet Patrice, Pourcelly Gérald, Larchet Christian. Intensive current transfer in membrane systems: Modelling, mechanisms and application in electro dialysis // Advances in Colloid and Interface Science 160 (2010) 101–123.

11. Nikonenko V., Kovalenko A., Urtenov M., Pismenskaya N., Han J., Sistas P., Pourcelly G. / Desalination at overlimiting currents: State-of-the-art and perspectives // Desalination. Elsevier. 342 (2014) pp. 85–106

12. Духин, С.С. Исчезновение феномена предельного тока в случае гранулы ионита / С.С. Духин, Н.А. Мищук // Коллоидный журнал. – 1989. – Т. 51, № 4. – С. 659-671.

13. Духин, С.С. Электроосмос второго рода и неограниченный рост тока в смешанном монослое ионита / С.С. Духин, Н.А. Мищук, П.В. Тахистов // Коллоидный журнал. – 1989. – Т. 51, № 3. – С. 616-618.

14. Rubinstein, I. Electro-osmotically induced convection at a permselective membrane / I. Rubinstein, B. Zaltzman // PHYSICAL REVIEW E. – 2000. – V. 62, № 2. – P. 2238-2251.

15. Rubinstein, I. Electro-osmotic slip and electroconvective instability/ I. Rubinstein, B. Zaltzman // J. Fluid Mech. – 2007. –V. 579. – P. 173-226.

16. Dydek, E.V. Overlimiting Current in a Microchannel / E.V. Dydek, B. Zaltzman, I. Rubinstein, D.S. Deng, A. Mani, M.Z. Bazant // Phys. Rev. Let. – 2011 – V. 107. P. 118301.

17. Mani, A. Deionization shocks in microstructures / A. Mani, M.Z. Bazant // Physical Review E. 2011. – V. 84. P. 061504.

18. Рубинштейн, И. Экспериментальная проверка электроосмотического механизма формирования «запредельного» тока в системе с катионообменной электродиализной мембраной / И. Рубинштейн, Б. Зальцман, И. Прец, К. Линдер // Электрохимия. – 2002. – Т. 38, № 8. – С. 956-967.

19. Kwak R. Pham V.S., Lim K.M., Han J. Shear flow of an electrically charged fluid by ion concentration polarization: scaling laws for convection vortices, Physical Review Letters 110 (2013) 114501.

20. Basic mathematical model of overlimiting transfer enhanced by electroconvection in flow-through electro dialysis membrane cells / Urtenov M.K., Uzdenova A.M., Nikonenko V.V., Pismenskaya N.D., Kovalenko A.V., Vasil'eva V.I., Sistas P., Pourcelly G.// Journal of Membrane Science: научный журнал. - 447. 2013. 190-202pp. <http://dx.doi.org/10.1016/j.memsci.2013.07.033>

21. Уртенов М.Х., Никоненко В.В., Коваленко А.В., Узденова А.М. Математическое моделирование электроконвекции в ЭМС с вынужденной конвекцией. Конденсированные среды и межфазные границы. - Т. 13, № 4. 2011. Воронеж. с. 317-324

22. Графов Б.М., Черненко А.А. Прохождение постоянного тока через раствор бинарного электролита // Журнал физической химии. 1963. Т.37. С.664

23. Графов Б.М., Черненко А.А. Теория прохождения постоянного тока через раствор бинарного электролита // Докл. АН СССР. 1962. Т.146. №1. С.135-138

24. Коваленко А.В., Васильева В.И., Никоненко В.В., Узденова А.М., Уртенов М.Х., Sistas P., Белашова Е.Д. Развитие теории подобия процессов переноса в канале обессоливания электродиализного аппарата // Конденсированные среды и межфазные границы, Том 16, № 4, 2014. С. 429—438

25. Коваленко А.В., Никоненко В.В., Узденова А.М., Уртенев М.Х. Критериальные числа электроконвекции в камере обессоливания электродиализатора // Конденсированные среды и межфазные границы. Воронеж. 2013, № 3 (16) С. 386-394.

26. Исаченко В.П. Теплопередача / В.П. Исаченко, В.А. Осипова, А.С. Сукомел. – М.: Энергоиздат, 1981. – 416 с.

27. Коваленко А.В., Уртенев М.Х. Краевые задачи для системы электродиффузионных уравнений. Часть 1. Одномерные задачи (монография) LAP LAMBERT Academic Publishing GmbH & Co. KG, Germany, Saarbrücken. 2011. 281 с.

28. Pham V.S. Direct numerical simulation of electroconvective instability and hysteretic current-voltage response of a permselective membrane / Van Sang Pham, Zirui Li, Kian Meng Lim, Jacob K. White, Jongyoon Han // PHYSICAL REVIEW E 86, 046310 (2012) pp.1-11.

29. Pismenskiy A.V., Urtenov M.K., Kovalenko A.V., Mareev S.V. Electrodialysis desalination process in conditions of mixed convection // Desalination and Water Treatment 2014 (1-3) London. Taylor & Francis. 2014. DOI: 10.1080/19443994.2014.981407

### References

1. Urtenov M.H. Konvektivno-diffuzionnaja model' processa jelektrodi-aliznogo obessolivanija. Predel'nyj tok i diffuzionnyj sloj / N.P. Gnu-sin, V.I. Zabolockij, V.V. Nikonenko, M.H. Urtenov // Jelektrohimiya. – 1986. – Т. 22, № 3. – S. 298-302.

2. Zabolockij, V.I. Perenos ionov v membranah / V.I. Zabolockij, V.V. Nikonenko. – М.: Nauka, 1996. – 390 с.

3. Shaposhnik V.A., Vasil'eva V.I., Grigor'chuk O.V. Javlenija perenosa v ionoobmennyh membranah. М.: Izd-vo MFTI, 2001. 200 с.

4. Volgin V.M., Davydov A.D. Estestvenno-konvektivnaja neustojchivost' jelektrohimicheskikh sistem // Jelektrohimiya. 2006. Т.42. №6. S.635-678.

5. Grigor'chuk O.V., Korzhov E.N., Shaposhnik V.A. Temperaturnoe pole v jelektromembrannoj sisteme pri estestvennoj konvekcii // Jelektrohimiya. 1991. Т.27, №12. S.1676-1679

6. Urtenov M.H. Matematicheskoe modelirovanie perenosa v jelektromembrannyyh sistemah s uchetom konvektivnyh techenij / A.V. Lavrent'ev, A.V. Pis'menskij, M.H. Urtenov // Krasnodar, KubGTU, 2006. – 146 с.

7. Pis'menskij, A.V. Modelirovanie i jeksperimental'noe issledovanie gravitacionnoj konvekcii v jelektromembrannoj jachejke / Pis'menskij A.V., Kovalenko A.V., Urtenov M. H., Nikonenko V.V., Sista F., Pis'menskaja N.D. // Jelektrohimiya. – Т.48, №7. – 2012. – S. 830-842.

8. Urtenov K.M., Kovalenko A.V., Shaposhnikova T.L. Matematicheskoe modelirovanie teplomassoperenosa v jelektrodializnyh apparatah vodo-podgotovki. М.: Finansy i statistika, 2010. 214

9. Pis'menskaja N.D., Nikonenko V.V., Belova E.I., Lopatkova G.Ju., Si-sta F., Purseli Zh., Larshe K. Sopryazhennaja konvekcija rastvora u poverhno-sti ionoobmennyh membran pri intensivnyh tokovyh rezhimah // Jelektrohimiya. 2007. Т.43, №3, S.1-21.

10. Nikonenko Victor V., Pismenskaya Natalia D., Belova Elena I., Sista Philippe, Huguet Patrice, Pourcelly Gérald, Larchet Christian. Intensive current transfer in membrane systems: Modelling, mechanisms and application in electro-dialysis // Advances in Colloid and Interface Science 160 (2010) 101–123.

11. Nikonenko V., Kovalenko A., Urtenov M., Pismenskaya N., Han J., Sista P., Pourcelly G. / Desalination at overlimiting currents: State-of-the-art and perspectives // Desalination. Elsevier. 342 (2014) pp. 85–106

12. Duhin, S.S. Ischeznoenie fenomena predel'nogo toka v sluchae granu-ly ionita / S.S. Duhin, N.A. Mishhuk // Kolloidnyj zhurnal. – 1989. – T. 51, № 4. – S. 659-671.
13. Duhin, S.S. Jelektroosmos vtorogo roda i neogranichennyj rost toka v smeshanom monosloe ionita / S.S. Duhin, N.A. Mishhuk, P.V. Tahistov // Kolloidnyj zhurnal. – 1989. – T. 51, № 3. – S. 616-618.
14. Rubinstein, I. Electro-osmotically induced convection at a permselective membrane / I. Rubinstein, B. Zaltzman // PHYSICAL REVIEW E. – 2000. – V. 62, № 2. – P. 2238-2251.
15. Rubinstein, I. Electro-osmotic slip and electroconvective instability/ I. Rubinstein, B. Zaltzman // J. Fluid Mech. – 2007. – V. 579. – R. 173-226.
16. Dydek, E.V. Overlimiting Current in a Microchannel / E.V. Dydek, B. Zaltzman, I. Rubinstein, D.S. Deng, A. Mani, M.Z. Bazant // Phys. Rev. Lett. – 2011 – V. 107. P. 118301.
17. Mani, A. Deionization shocks in microstructures / A. Mani, M.Z. Bazant // Physical Review E. 2011. – V. 84. P. 061504.
18. Rubinshtejn, I. Jeksperimental'naja proverka jelektroosmoticheskogo mehanizma formirovanija «zapredel'nogo» toka v sisteme s kationoobmennoj jelektrodializnoj membranoj / I. Rubinshtejn, B. Zal'cman, I. Prec, K. Linder // Jelektrohimija. – 2002. – T. 38, № 8. – S. 956-967.
19. Kwak R. Pham V.S., Lim K.M., Han J. Shear flow of an electrically charged fluid by ion concentration polarization: scaling laws for convection vortices, Physical Review Letters 110 (2013) 114501.
20. Basic mathematical model of overlimiting transfer enhanced by electroconvection in flow-through electro dialysis membrane cells / Urtenov M.K., Uzdenova A.M., Nikonenko V.V., Pismenskaya N.D., Kovalenko A.V., Vasil'eva V.I., Sistat P., Pourcelly G. // Journal of Membrane Science: nauchnyj zhurnal. - 447. 2013. 190-202pp. <http://dx.doi.org/10.1016/j.memsci.2013.07.033>
21. Urtenov M.H. , Nikonenko V.V., Kovalenko A.V., Uzdenova A.M. Matematicheskoe modelirovanie jelektrokonvekcii v JeMS s vynuzhdennoj konvekciej. Kondensirovannye sredy i mezhfaznye granicy. - T. 13, № 4. 2011. Voronezh. s. 317-324
22. Grafov B.M., Chernenko A.A. Prohozhdenie postojannogo toka cherez rastvor binarnogo jelektrolita // Zhurnal fizicheskoi himii. 1963. T.37. S.664
23. Grafov B.M., Chernenko A.A. Teorija prohozhdenija postojannogo toka cherez rastvor binarnogo jelektrolita // Dokl. AN SSSR. 1962. T.146. №1. S.135-138
24. Kovalenko A.V., Vasil'eva V.I., Nikonenko V.V., Uzdenova A.M., Urtenov M.H., Sistat P., Belashova E.D. Razvitie teorii podobija processov perenosov v kanale obessolivanija jelektrodializnogo apparata // Kondensirovannye sredy i mezhfaznye granicy, Tom 16, № 4, 2014. S. 429—438
25. Kovalenko A.V., Nikonenko V.V., Uzdenova A.M., Urtenov M.H. Kriterial'nye chisla jelektrokonvekcii v kamere obessolivanija jelektrodializatora // Kondensirovannye sredy i mezhfaznye granicy. Voronezh. 2013, № 3 (16) S. 386-394.
26. Isachenko V.P. Teploperedacha / V.P. Isachenko, V.A. Osipova, A.S. Sukomel. – M.: Jenergoizdat, 1981. – 416 s.
27. Kovalenko A.V., Urtenov M.H. Kraevye zadachi dlja sistemy jelektro-diffuzionnyh uravnenij. Chast' 1. Odnomernye zadachi (monografija) LAP LAMBERT Academic Publishing GmbH & Co. KG, Germany, Saarbrücken. 2011. 281 c.
28. Pham V.S. Direct numerical simulation of electroconvective instability and hysteretic current-voltage response of a permselective membrane / Van Sang Pham, Zirui Li, Kian Meng Lim, Jacob K. White, Jongyoon Han // PHYSICAL REVIEW E 86, 046310 (2012) pp.1-11.

29. Pismenskiy A.V., Urtenov M.K., Kovalenko A.V., Mareev S.V. Electrodialysis desalination process in conditions of mixed convection //Desalination and Water Treatment 2014 (1-3) London. Taylor & Francis. 2014. DOI: 10.1080/19443994.2014.981407