УДК 528.13

UDC 528.13

К ВОПРОСУ ОЦЕНКИ ТОЧНОСТИ ГЕОДЕЗИЧЕСКИХ СЕТЕЙ ИЗ ЧЕТЫРЕХУГОЛЬНИКА С ИЗМЕРЕННЫМИ СТОРОНАМИ

TO THE QUESTION OF ASSESSING THE ACCURACY OF GEODETIC NETWORKS OF A QUADRANGLE WITH MEASURED SIDES

Соколов Юрий Григорьевич
к.т.н., профессор

Струсь Сергей Сергеевич
к.э.н., доцент

Пшидаток Саида Казбековна
к.с-х.н., ст.преподаватель

Губанова Наталья Яковлевна
доцент
Кубанский государственный аграрный университет, Краснодар, Россия

Sokolov Yuriy Grigoryevich
Cand.Tech.Sci., professor

Strus Sergey Sergeyevich
Cand.Econ.Sci., associate professor

Pshidatok Saida Kazbekovna
Cand.Agr.Sci., senior lecturer

Gubanova Natalia Yakovlevna
associate professor
Kuban State Agrarian University, Krasnodar, Russia

В работе найдены весовые функции для точек внутри сети. Полученная система уравнений решается по способу наименьших квадратов. В результате решения системы уравнений была выведена оригинальная формула для подсчета обратных весов любой точки рассматриваемой сети

The article presents the weighting function for the points within the geodetic network. The obtained system of equations is solved by the method of least squares. In the result of solving the system of equations we found the original formula for calculation of reverse weights of any point in the geodetic network

Ключевые слова: СПОСОБ НАИМЕНЬШИХ КВАДРАТОВ, ОБРАТНЫЕ ВЕСА, ГЕОДЕЗИЧЕСКАЯ СЕТЬ, ОЦЕНКА ТОЧНОСТИ, КООРДИНАТЫ

Keywords: METHOD OF LEAST SQUARES, REVERSE WEIGHT, GEODETIC NETWORK, COORDINATES, ACCURACY ASSESSMENT

В работах [1,2] рассматриваются вопросы создания и уравнивания заполняющих сетей из четырехугольников с измеренными сторонами. При этом для составления условных уравнений с целью уравнивания таких сетей рекомендуется использовать следующий алгоритм:

$$\left.\begin{array}{c}
\left(\frac{\partial X_{\text{ОП.j}}}{\partial \mathrm{S}_{1.\mathrm{i}}}\right)=\left(\frac{\partial \mathrm{X}_{\text{П.j}}}{\partial\ \mathrm{S}_{1.\mathrm{i}}}\right)+\left(\frac{\partial \mathrm{X}_{\text{Л.j}}}{\partial\ \mathrm{S}_{1.\mathrm{i}}}-\frac{\partial \mathrm{X}_{\text{П.j}}}{\partial\ \mathrm{S}_{1.\mathrm{i}}}\right)\times A_j+\left(\frac{\partial \mathrm{Y}_{\text{Л.j}}}{\partial\ \mathrm{S}_{1.\mathrm{i}}}-\frac{\partial \mathrm{Y}_{\text{П.j}}}{\partial\ \mathrm{S}_{1.\mathrm{i}}}\right)\times B_j;\\
\left(\frac{\partial Y_{\text{ОП.j}}}{\partial \mathrm{S}_{1.\mathrm{i}}}\right)=\left(\frac{\partial \mathrm{Y}_{\text{П.j}}}{\partial\ \mathrm{S}_{1.\mathrm{i}}}\right)+\left(\frac{\partial \mathrm{X}_{\text{Л.j}}}{\partial\ \mathrm{S}_{1.\mathrm{i}}}-\frac{\partial \mathrm{X}_{\text{П.j}}}{\partial\ \mathrm{S}_{1.\mathrm{i}}}\right)\times C_j+\left(\frac{\partial \mathrm{Y}_{\text{Л.j}}}{\partial\ \mathrm{S}_{1.\mathrm{i}}}-\frac{\partial \mathrm{Y}_{\text{П.j}}}{\partial\ \mathrm{S}_{1.\mathrm{i}}}\right)\times D_j;\\
\left(\frac{\partial X_{\text{ОП.j}}}{\partial \mathrm{S}_{2.\mathrm{i}}}\right)=\left(\frac{\partial \mathrm{X}_{\text{П.j}}}{\partial\ \mathrm{S}_{2.\mathrm{i}}}\right)+\left(\frac{\partial \mathrm{X}_{\text{Л.j}}}{\partial\ \mathrm{S}_{2.\mathrm{i}}}-\frac{\partial \mathrm{X}_{\text{П.j}}}{\partial\ \mathrm{S}_{2.\mathrm{i}}}\right)\times A_j+\left(\frac{\partial \mathrm{Y}_{\text{Л.j}}}{\partial\ \mathrm{S}_{2.\mathrm{i}}}-\frac{\partial \mathrm{Y}_{\text{П.j}}}{\partial\ \mathrm{S}_{2.\mathrm{i}}}\right)\times B_j;\\
\left(\frac{\partial Y_{\text{ОП.j}}}{\partial \mathrm{S}_{2.\mathrm{i}}}\right)=\left(\frac{\partial \mathrm{Y}_{\text{П.j}}}{\partial\ \mathrm{S}_{2.\mathrm{i}}}\right)+\left(\frac{\partial \mathrm{X}_{\text{Л.j}}}{\partial\ \mathrm{S}_{2.\mathrm{i}}}-\frac{\partial \mathrm{X}_{\text{П.j}}}{\partial\ \mathrm{S}_{2.\mathrm{i}}}\right)\times C_j+\left(\frac{\partial \mathrm{Y}_{\text{Л.j}}}{\partial\ \mathrm{S}_{2.\mathrm{i}}}-\frac{\partial \mathrm{Y}_{\text{П.j}}}{\partial\ \mathrm{S}_{2.\mathrm{i}}}\right)\times D_j;\\
\left(\frac{\partial X_{\text{ОП.j}}}{\partial \mathrm{S}_{1.\mathrm{j}}}\right)=\frac{S_{1.j}}{b_j^2\times h_j}(Y_{\text{ОП}}-Y_{\text{П}})_j;\\
\left(\frac{\partial Y_{\text{ОП.j}}}{\partial \mathrm{S}_{1.\mathrm{j}}}\right)=\frac{S_{1.j}}{b_j^2\times h_j}(X_{\text{ОП}}-X_{\text{П}})_j\\
\left(\frac{\partial X_{\text{ОП.j}}}{\partial \mathrm{S}_{2.\mathrm{j}}}\right)=\frac{S_{2.j}}{b_j^2\times h_j}(Y_{\text{Л}}-Y_{\text{ОП}})_j;\\
\left(\frac{\partial Y_{\text{ОП.j}}}{\partial \mathrm{S}_{2.\mathrm{j}}}\right)=-\frac{S_{1.j}}{b_j^2\times h_j}(X_{\text{Л}}-X_{\text{ОП}})_j
\end{array}\right\}, \quad (1)$$

где: j – номер четырехугольника;

$X_{\text{ОП.j}}$, $Y_{\text{ОП.j}}$ – координаты определяемой точки в j-том четырехугольнике;

$X_{\text{П.j}}$, $X_{\text{Л.j}}$, $Y_{\text{П.j}}$, $Y_{\text{Л.j}}$ – координаты правой и левой точек в диагонали (по отношению к определяемой) в j-том четырехугольнике;

$S_{1.i}$, $S_{2.i}$ – измеренные длины сторон i-го четырехугольника, влияющие на определение координат определяемой точки в j-том четырехугольнике;

A_j, B_j, C_j, D_j – «передаточные коэффициенты»;

b_j – длина диагонали j-того четырехугольника;

h_j – коэффициент определяемый по формуле (4).

«Передаточные коэффициенты» найдем из следующей зависимости:

$$\left.\begin{array}{l} A_j = \left(\dfrac{\sin\alpha_2}{\sin\gamma}\times\cos\alpha_1\right)_j; \\ B_j = \left(\dfrac{\sin\alpha_2}{\sin\gamma}\times\sin\alpha_1\right)_j; \\ C_j = \left(-\dfrac{\cos\alpha_2}{\sin\gamma}\times\cos\alpha_1\right)_j; \\ D_j = \left(-\dfrac{\cos\alpha_2}{\sin\gamma}\times\sin\alpha_1\right)_j; \end{array}\right\}, \tag{2}$$

где: $\alpha_{1.j}$, $\alpha_{2.j}$ – дирекционные углы сторон $S_{1.i}$, $S_{2.i}$;

γ_j – угол засечки в j-том четырехугольнике.

Длина диагонали j-того четырехугольника найдется по формуле:

$$b_j = \sqrt{(X_Л - X_П)_j^2 + (Y_Л - Y_П)_j^2}, \tag{3}$$

где: $X_{П.j}$, $X_{Л.j}$, $Y_{П.j}$, $Y_{Л.j}$ – координаты правой и левой точек в диагонали (по отношению к определяемой) в j-том четырехугольнике.

Коэффициент рассчитаем по следующей формуле:

$$h_j = \sqrt{\left(\frac{S_{2.j}}{b_j}\right)^2 - q_j^2}, \tag{4}$$

где: $S_{2.i}$ – измеренные длины сторон i-го четырехугольника, влияющие на определение координат определяемой точки в j-том четырехугольнике;

b_j – длина диагонали j-того четырехугольника;

q_j – коэффициент определяемый по формуле (5).

$$q_j = \frac{1}{2}\left[1 + \left(\frac{S_{2.j}}{b_j}\right)^2 - \left(\frac{S_{1.j}}{b_j}\right)^2\right], \tag{5}$$

где: $S_{1.i}$, $S_{2.i}$ – измеренные длины сторон i-го четырехугольника, влияющие на определение координат определяемой точки в j-том четырехугольнике;

b_j – длина диагонали j-того четырехугольника.

Важным аспектом таких построений является оценка точности полученных координат точек сети. Рассмотрим её на примере сети из фигур близких к квадратам (рис.1). В такой сети имеются 6 избыточно измеренных сторон: $S_{1\text{-}1.4}$ $S_{1\text{-}2.4}$, $S_{1\text{-}3.4}$, $S_{2\text{-}4.1}$, $S_{2\text{-}4.2}$ $S_{2\text{-}4.3}$. Следовательно, для этой сети можно записать 6 условных уравнений сторон.

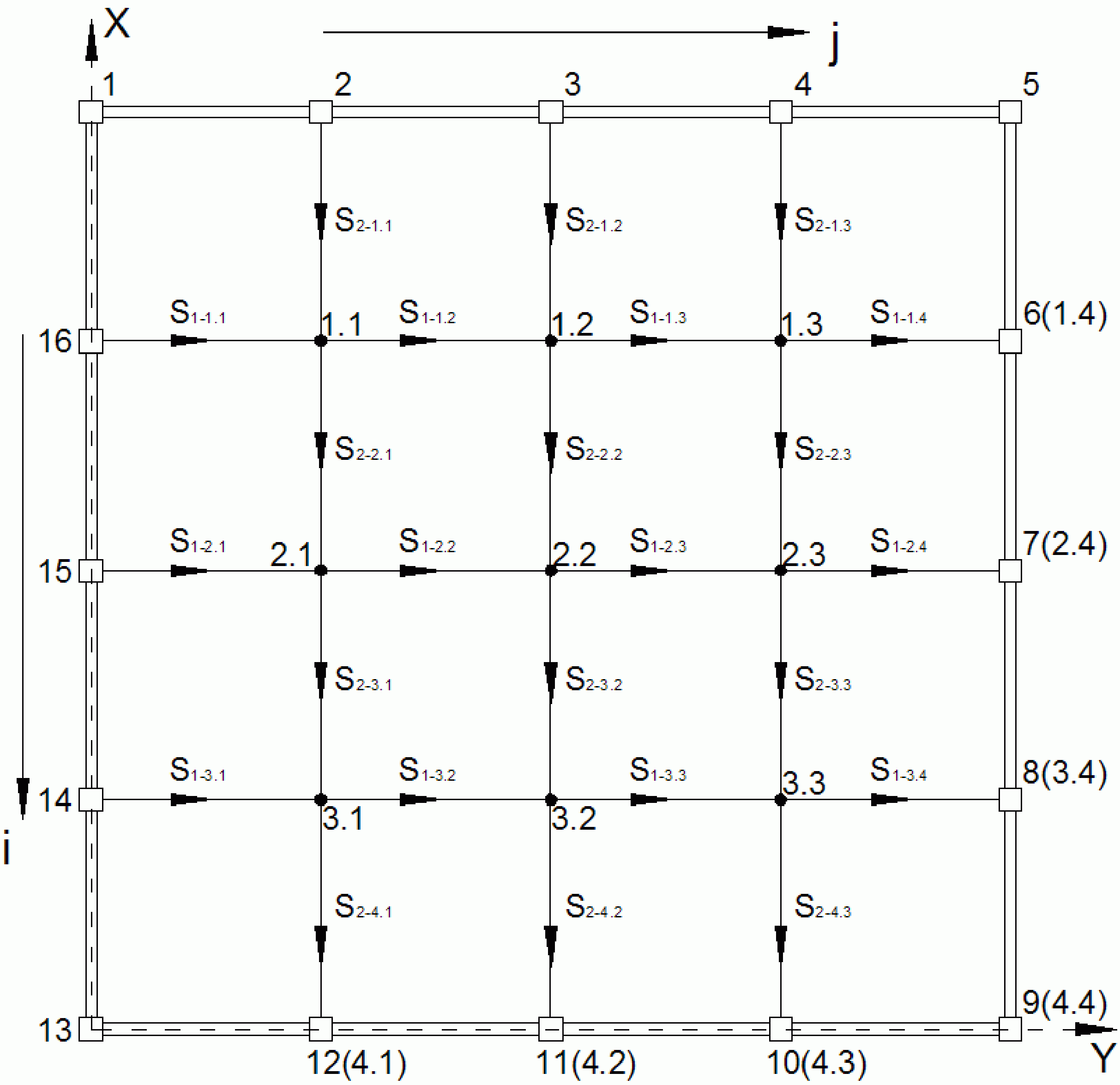

Рис.1 – Сеть из четырехугольников с измеренными сторонами

Например, для стороны 1-1.4 запишем:

$$S_{1-1.4} - \sqrt{(X_{1.4} - X_{1.3})^2 + (Y_{1.4} - Y_{1.3})^2} = f_{S1-1.4}, \qquad (7)$$

где: $X_{1.4}$, $X_{1.3}$, $Y_{1.4}$, $Y_{1.3}$ – координаты точек 1.3 и 1.4, вычисленные последовательными линейными засечками;

$S_{1\text{-}1.4}$ – измеренная длина стороны 1-1.4;

$f_{S1-1.4}$ - невязка в длине стороны $S_{1\text{-}1.4}$.

Выражению (7) после дифференцирования будет соответствовать условное уравнение вида:

$$\begin{gathered}
V_{1-1.4}-\left[\left(\frac{\partial X_{1.4}}{\partial S_{1-1.1}}-\frac{\partial X_{1.3}}{\partial S_{1-1.1}}\right)\times\cos\alpha_{1-1.4}+\left(\frac{\partial Y_{1.4}}{\partial S_{1-1.1}}-\frac{\partial Y_{1.3}}{\partial S_{1-1.1}}\right)\sin\alpha_{1-1.4}\right]\times V_{1-1.1}-\\
-\left[\left(\frac{\partial X_{1.4}}{\partial S_{2-1.1}}-\frac{\partial X_{1.3}}{\partial S_{2-1.1}}\right)\times\cos\alpha_{1-1.4}+\left(\frac{\partial Y_{1.4}}{\partial S_{2-1.1}}-\frac{\partial Y_{1.3}}{\partial S_{2-1.1}}\right)\sin\alpha_{1-1.4}\right]\times V_{2-1.1}-\\
-\ldots\left[\left(\frac{\partial X_{1.4}}{\partial S_{2-1.3}}-\frac{\partial X_{1.3}}{\partial S_{2-1.3}}\right)\times\cos\alpha_{1-1.4}+\left(\frac{\partial Y_{1.4}}{\partial S_{2-1.3}}-\frac{\partial Y_{1.3}}{\partial S_{2-1.3}}\right)\sin\alpha_{1-1.4}\right]\times V_{2-1.3}+\\
+f_{S1-1.4}=0
\end{gathered}\tag{8}$$

Учитывая, что точка 4.1 – жесткая, получим следующее уравнение:

$$\begin{gathered}
V_{1-1.4}+\left(\frac{\partial X_{1.3}}{\partial S_{1-1.1}}\times\cos\alpha_{1-1.4}+\frac{\partial Y_{1.3}}{\partial S_{1-1.1}}\times\sin\alpha_{1-1.4}\right)\times V_{1-1.1}+\\
+\left(\frac{\partial X_{1.3}}{\partial S_{2-1.1}}\times\cos\alpha_{1-1.4}+\frac{\partial Y_{1.3}}{\partial S_{2-1.1}}\times\sin\alpha_{1-1.4}\right)\times V_{2-1.1}+\ldots+\\
+\left(\frac{\partial X_{1.3}}{\partial S_{2-1.3}}\times\cos\alpha_{1-1.4}+\frac{\partial Y_{1.3}}{\partial S_{2-1.3}}\times\sin\alpha_{1-1.4}\right)\times V_{2-1.3}+\\
+f_{S1-1.4}=0
\end{gathered}\tag{9}$$
,

где: V – поправки к измеренным сторонам;

$\alpha_{1\text{-}1.4}$ – дирекционный угол линии 1-1.4;

$\frac{\partial X}{\partial S}$ и $\frac{\partial Y}{\partial S}$ - частные производные, взятые по всем сторонам, влияющие на положение точки 1.3.

Следуя приведенному алгоритму и учитывая, что для рассматриваемой сети «передаточные коэффициенты» A=B=C=0; D=1., вычислим значения частных производных и подставим их в (9). В результате получим:

$$\sum_{i=1}^{4}v_{1-1.i}+f_{S1-1.4}=0\tag{10}$$

Аналогичным образом получим условные уравнения для избыточно измеренных линий $S_{1\text{-}2.4}$ $S_{1\text{-}3.4}$, $S_{2\text{-}4.1}$ $S_{2\text{-}4.2}$, $S_{2\text{-}4.3}$. В результате получим систему из 6 условных уравнений вида:

$$\begin{aligned}
&\sum_{i=1}^{4} v_{1-1.i} + f_{S1-1.4} = 0; \quad \sum_{i=1}^{4} v_{2-i.1} + f_{S2-4.1} = 0;\\
&\sum_{i=1}^{4} v_{1-2.i} + f_{S1-2.4} = 0; \quad \sum_{i=1}^{4} v_{2-i.2} + f_{S2-4.2} = 0;\\
&\sum_{i=1}^{4} v_{1-3.i} + f_{S1-3.4} = 0; \quad \sum_{i=1}^{4} v_{2-i.3} + f_{S2-4.3} = 0.
\end{aligned} \tag{11}$$

Добавим к этим уравнениям выражения весовых функций для координат 4-х точек(2.1, 2.2, 1.1, 1.2):

$$\begin{aligned}
&F_{X2.2} = -V_{2-1.2} - V_{2-2.2}; \quad && F_{Y2.2} = V_{1-2.1} + V_{1-2.2};\\
&F_{X1.2} = -V_{2-1.2}; && F_{Y1.2} = V_{1-1.1} + V_{1-1.2};\\
&F_{X2.1} = -V_{2-1.1} - V_{2-2.1}; && F_{Y2.1} = V_{1-2.1};\\
&F_{X1.1} = -V_{2-1.1}; && F_{Y1.1} = V_{1-1.1};
\end{aligned} \tag{12}$$

В результате решения полученной системы по способу наименьших квадратов (считая, что все измерения равноточные) для обратных весов этих точек были найдены следующие значения:

$$\begin{aligned}
&\frac{1}{P_{X2.2}} = 1; \quad \frac{1}{P_{Y2.2}} = 1; \quad \frac{1}{P_{2.2}} = \sqrt{\frac{1}{P_{X2.2}} + \frac{1}{P_{Y2.2}}} = \sqrt{2} = 1{,}41.\\
&\frac{1}{P_{X1.2}} = \frac{3}{4}; \quad \frac{1}{P_{Y1.2}} = 1; \quad \frac{1}{P_{1.2}} = \sqrt{\frac{1}{P_{X1.2}} + \frac{1}{P_{Y1.2}}} = \sqrt{1{,}75} = 1{,}32.\\
&\frac{1}{P_{X2.1}} = 1; \quad \frac{1}{P_{Y2.1}} = \frac{3}{4}; \quad \frac{1}{P_{2.1}} = \sqrt{\frac{1}{P_{X2.1}} + \frac{1}{P_{Y2.1}}} = \sqrt{1{,}75} = 1{,}32.\\
&\frac{1}{P_{X1.1}} = \frac{3}{4}; \quad \frac{1}{P_{Y1.1}} = \frac{3}{4}; \quad \frac{1}{P_{1.1}} = \sqrt{\frac{1}{P_{X1.1}} + \frac{1}{P_{Y1.1}}} = \sqrt{1{,}5} = 1{,}22.
\end{aligned} \tag{13}$$

Распространим аналогичные расчеты на сети размером n на m квадратов, для обратных весов точек с координатами i и j будут получены следующие выражения:

$$\frac{1}{P_{Xi,j}} = \frac{i}{n\times(n-i)};$$
$$\frac{1}{P_{Yi,j}} = \frac{j}{m\times(m-j)}; \qquad (14)$$
$$\frac{1}{P_{i,j}} = \sqrt{\frac{i\times(n-i)}{n} + \frac{j\times(m-j)}{m}};$$

Для примера используем сеть размером n = 6, m = 4. По формуле (14) будем иметь следующий результат:

$$\frac{1}{P_{1.1}} = 1{,}26; \quad \frac{1}{P_{1.2}} = 1{,}35; \quad \frac{1}{P_{1.3}} = 1{,}26;$$
$$\frac{1}{P_{2.1}} = 1{,}44; \quad \frac{1}{P_{2.2}} = 1{,}53; \quad \frac{1}{P_{2.3}} = 1{,}44;$$
$$\frac{1}{P_{3.1}} = 1{,}50; \quad \frac{1}{P_{3.2}} = 1{,}58; \quad \frac{1}{P_{3.3}} = 1{,}50.$$

Поле распределения полученных обратных весов по результатам уравнивания приведено на рисунке 2.

Как и следовало ожидать, самое слабое место в сети (по точности определения координат) оказалось в середине – самой удаленной точки от опорных точек.

Интерес представляет анализ зависимости точности определения координат точек в самом слабом месте сети от её размеров (m × n)

По формуле (14) для симметричных сетей получим:

1) m = 4, n = 4, (m × n) = 16, $\frac{1}{P_1} = 1{,}41;$

2) m = 4, n = 6, (m × n) = 24, $\frac{1}{P_1} = 1{,}58;$

3) m = 6, n = 6, (m × n) = 36, $\frac{1}{P_1} = 1{,}73;$

4) m = 6, n = 8, (m × n) = 48, $\frac{1}{P_1} = 1{,}87;$

5) m = 8, n = 8, (m × n) = 64, $\frac{1}{P_1} = 2{,}00;$

Как видно из приведенных расчетов, по мере увеличения размеров сети точность определения положения точек в самом слабом месте падает и это надо учитывать.

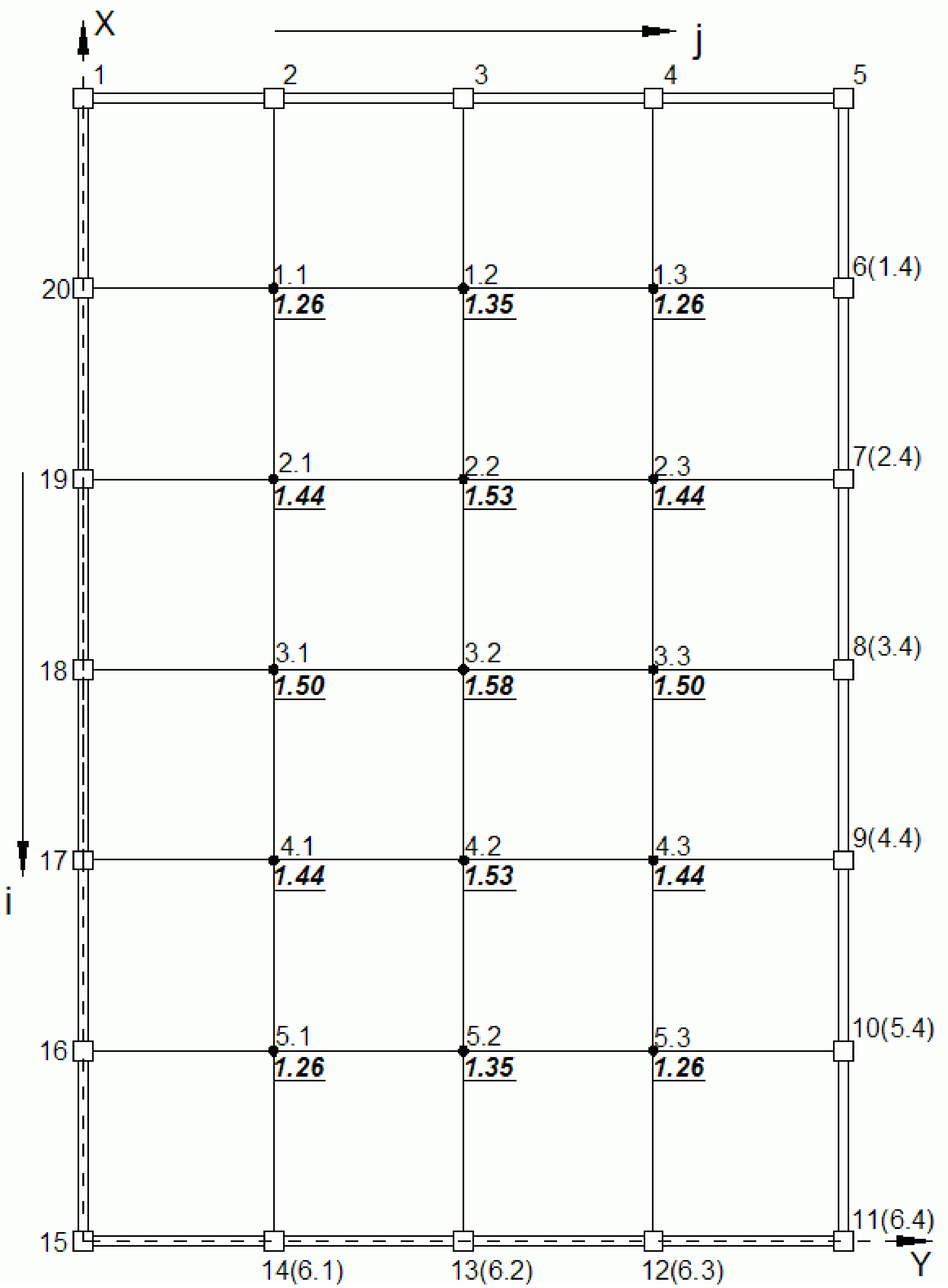

Рис. 2 – Распределение весов по вершинам фигур.

В заключении следует отметить, что приведенные результаты исследований могут быть рекомендованы при составлении проектов геодезических сетей подобного вида.

Список литературы

1. Ю.Г. Соколов, А.Т. Гаврюхов К вычислению коэффициентов условных уравнений при уравнивании заполняющих сетей из четырехугольников с измеренными сторонами // Научный журнал Труды КубГАУ, Краснодар, 2008 №15 - 7с.
2. Ю.Г. Соколов, Н.А. Тимошенко, П.М. Данильченко. К вопросу составления условных уравнений в геодезических сетях из четырехугольников с измеренными сторонами // Научный журнал «Электронный ресурс – Краснодар», КубГАУ. 2007 - №28 - 7 с.

References

1. Ju.G. Sokolov, A.T. Gavrjuhov K vychisleniju kojefficientov uslovnyh uravnenij pri uravnivanii zapolnjajushhih setej iz chetyrehugol'nikov s izmerennymi storonami // Nauchnyj zhurnal Trudy KubGAU, Krasnodar, 2008 №15 - 7s.
2. Ju.G. Sokolov, N.A. Timoshenko, P.M. Danil'chenko. K voprosu sostavle-nija uslovnyh uravnenij v geodezicheskih setjah iz chetyrehugol'nikov s izmerennymi storonami // Nauchnyj zhurnal «Jelektronnyj resurs – Krasnodar», KubGAU. 2007 - №28 - 7 s.