УДК 519.1

АЛГОРИТМ ВЫЧИСЛЕНИЯ ОПРЕДЕЛИТЕЛЕЙ ПРЕДФРАКТАЛЬНЫХ ГРАФОВ С ПОЛНЫМИ ЗАТРАВКАМИ, СОХРАНЯЮЩИХ СМЕЖНОСТЬ СТАРЫХ РЕБЕР

Байрамукова Зухра Халитовна

Кочкаров Ахмат Магометович
д.ф.-м.н., профессор
Северо-Кавказская государственная гуманитарно-технологическая академия, Черкесск, Россия

В статье получен алгоритм - рекуррентная формула для вычисления определителей предфрактальных графов с полными затравками, сохраняющих смежность старых ребер в траектории

Ключевые слова: БАЗИСНЫЕ ФИГУРЫ ПРЕДФРАКТАЛЬНЫХ ГРАФОВ, ОПРЕДЕЛИТЕЛИ ПРЕДФРАКТАЛЬНЫХ ГРАФОВ

UDC 519.1

ALGORITM OF CALCULATION OF DETERMINANTS OF PREFRACTAL GRAPHS WITH THE FULL PRIMERS, KEEPING OLD EDGES CONTIGUITY

Bayramukova Zuhra Halitovna

Kochkarov Ahmat Magometovich
Dr.Sci.Phys.-Math., professor
North-Caucasian State Humanitarian Technological Academy, Cherkessk, Russia

In the article, the algorithm – a recurrent formula for calculation of determinants of prefractal graphs with the full primers, keeping old edges contiguity in a trajectory was received

Keywords: BASIC FIGURES OF PREFRACTAL GRAPHS, DETERMINANTS OF PREFRACTAL GRAPHS

В настоящее время бурно развивается раздел дискретной математики, направление – спектральная теория графов [1] , основанный на алгебраических инвариантах графов – его спектрах. Спектральная теория графов позволяет выявить зависимость между спектральными и структурными свойствами графов, характеризовать графы спектрами. Что позволяет разработать приложения спектрального метода как в самой теории графов, так и в комбинаторике, в физике при исследовании физических моделей, в которых спектры графов имеют важное самостоятельное значение. В настоящее время теоретико-графовые (топологические) подходы приобрели для прикладных задач большое значение. Как известно, задачи, структура которых меняется во времени и, более того, размерность этих задач изменяется во времени (увеличивается), можно моделировать с помощью предфрактальных и фрактальных графов [2], [3]. При исследовании сетей больших размерностей изменяющихся во времени – так называемых больших и малых миров также моделируют с помощью предфрактальных и фрактальных графов [4]. Чтобы выявить связи между спектральными и структурными свойствами предфрактальных графов необходимо вычислять определители их матриц смежности.

А также при исследовании многих задач математического программирования [5], задач экономики с определением балансов [6], в задачах теории графов [7] часто приходится вычислять определители. Например, в задачах линейного программирования [8], чтобы найти решение систем линейных уравнений ограничения с использованием метода Крамера, необходимо вычислять определители матриц коэффициентов системы ограничения. А в теории графов вычисляются определители матриц смежностей для определения тех или иных инвариантов графов. Как только задачи становятся большой размерности, вычисление определителя усложняется.

В настоящей работе рассматривается вычисление определителей матриц смежностей предфрактальных графов [9] с полными затравками, смежность старых ребер которых в траектории не нарушается. Приведем в начале несколько понятий, часто применяемых в данной работе.

Термином *затравка* условимся называть какой-либо связный граф $H=(W,Q)$. Для определения *фрактального (предфрактального) графа* [9], [10],[11] нам потребуется операция *замены вершины затравкой* (ЗВЗ). Суть операции ЗВЗ заключается в следующем. В данном графе $G=(V,E)$ у намеченной для замещения вершины $\tilde{v}\in V$ выделяется множество $\tilde{V}=\{\tilde{v}_j\}\subseteq V$, $j=1,2,...,|\tilde{V}|$, смежных ей вершин. Далее из графа G удаляется вершина $\tilde{v}$ и все инцидентные ей ребра. Затем каждая вершина $\tilde{v}_j\in\tilde{V}$, $j=1,2,...,|\tilde{V}|$ соединяется ребром с (одной и той же, если смежность старых ребер сохраняется) вершиной затравки $H=(W,Q)$.

Предфрактальный граф будем обозначать через $G_L=(V_L,E_L)$, где V_L - множество вершин графа, а E_L - множество его ребер. Определим его рекуррентно, поэтапно заменяя каждый раз в построенном на предыдущем этапе $l=1,2,...,L-1$ графе $G_l=(V_l,E_l)$ каждую его вершину затравкой $H=(W,Q)$. На этапе $l=1$ предфрактальному графу соответствует затравка $G_1=H$. Об описанном процессе говорят, что *предфрактальный граф* $G_L=(V_L,E_L)$ *порожден затравкой* $H=(W,Q)$. Процесс порождения предфрактального графа G_L, по существу, есть процесс построения последовательности предфрактальных графов $G_1,G_2,...,G_L$ называемый *траекторией*. Для предфрактального графа G_L, ребра появившиеся на l-том $l\in\{1,2,...,L\}$ этапе порождения, будем называть *ребрами ранга* l. *Новыми* ребрами предфрактального графа G_L назовем ребра ранга L, а все остальные ребра назовем – *старыми*.

Если из предфрактального графа G_L, порожденного n-вершинной затравкой H, последовательно удалить все старые ребра (ребра ранга l, $l=1,2,...,L-1$), то исходный граф распадется на множество связных компонент $\{B_L^{(1)}\}$, каждая из которых изоморфна [7] затравке H. Множество компонент $\{B_L^{(1)}\}$ будем называть *блоками первого ранга*. Аналогично, при удалении из предфрактального графа G_L всех старых ребер рангов $l=1,2,...,L-2$, получим множество блоков $\{B_L^{(2)}\}$ *второго ранга* изоморфных предфрактальному графу G_2. Обобщая, скажем, что при удалении из предфрактального графа G_L всех ребер рангов $l=1,2,...,L-r$, получим множество $\{B_L^{(r)}\}$, $r\in\{1,2,...,L-1\}$ *блоков* r-*го ранга* изоморфных предфрактальному графу G_r. *Измененным блоком* r-*го ранга* мы будем называть блок r-го ранга, из которого удалена одна вершина затравки и все инцидентные ей ребра.

«Элементарной фигурой» [1] называется : а) граф K_2 (ребро) или б) любой граф C_q, $q\geq 1$ (простой цикл); «базисной фигурой» U называется любой граф, все компоненты которого являются элементарными фигурами. $K_{nl}(c,p)$ - число базисных фигур с n^l вершинами в предфрактальном графе G_l, $K^*_{nl}(c,p)$ - число базисных фигур с n^l-1

вершинами в измененных блоках, имеющих c простых циклов и p компонент.

Для вычисления определителей в данной работе используется

Лемма [1].Определитель матрицы смежностей графа $G=(V,E)$ с N вершинами вычисляется по формуле

$$|A|=(-1)^N\sum_{U\in U_N}(-1)^{p(U)}2^{c(U)},$$

где $p(U)$ - число компонент, $c(U)$ - число простых циклов, содержащихся в U, а U_N означает множество всех базисных фигур, содержащихся в графе $G=(V,E)$ и имеющих точно N вершин.

В результате применения леммы к предфрактальным графам, получена

Теорема. Определитель матрицы смежностей A_l предфрактального графа G_l с полной n-вершинной затравкой $H=(W,Q)$ вычисляется по формуле

$$|A_l|=(-1)^{n^l}\sum(-1)^p 2^c K_{nl}(c,p).$$

Суммирование ведется по множеству чисел базисных фигур с $N=n^l$ вершинами, которое определяет формула

$$\begin{aligned}K_{nl}(c,p)=&\sum_{\substack{\sum a_i=c\\ \sum b_i=p}}\prod_{i=1}^{n}K_{n,l-1}(a_i,b_i)+\\&+\sum_{j=2}^{n-1}\sum_{\substack{a+\sum a_i+\sum g_i=c\\ b+\sum b_i+\sum d_i=p}}K_{j,1}(a,b)\,C_n^j\prod_{i=1}^{n-j}K_{n,l-1}(a_i,b_i)\prod_{i=1}^{j}K^*_{n,l-1}(g_i,d_i)+\\&+\sum_{\substack{a+\sum g_i=c\\ b+\sum d_{i_i}=p}}K_{n1}(a,b)\prod_{i=1}^{n}K^*_{n,l-1}(g_i,d_i)\end{aligned}$$

и

$$K_{nl}^{*}(c,p)=\sum_{\substack{\sum a_i+a=c\\ \sum b_i+b=p}} K_{n,l-1}^{*}(a,b)\prod_{i=1}^{n-1}K_{n,l-1}(a_i,b_i)+$$

$$+\sum_{j=3}^{n-1}\sum_{\substack{\sum a_i+\sum g_i+a=c\\ \sum b_i+\sum d_i+b=p}} K_{j-1,1}(a,b)C_{n-1}^{j-1}\prod_{i=1}^{j}K_{n,l-1}^{*}(g_i,d_i)\cdot\prod_{i=1}^{n-j}K_{n,l-1}(a_i,b_i).+$$

$$+\sum_{\substack{a+\sum g_i=c\\ b+\sum d_i=p}} K_{n-1,1}(a,b)\prod_{i=1}^{n}K_{n,l-1}^{*}(g_i,d_i).$$

Доказательство. Условие теоремы предполагает, что определены множества $K_{n,l-1}(c,p)$, $K_{n,l-1}^{*}(c,p)$. С увеличением l в предфрактальном графе появляются новые вершины и новые ребра, то есть его форма усложняется. Для того чтобы систематизировать процесс нахождения чисел базисных фигур $K_{nl}(c,p)$, используем схему:

1) в базисных фигурах графа G_l с n^l вершинами отсутствуют ребра 1-го ранга (нет измененных блоков);

2) из старых ребер 1-го ранга сохранено одно ребро (два измененных блока);

3) из старых ребер 1-го ранга сохранен цикл C_3 (три измененных блока);

. . . .

n) из старых ребер 1-го ранга сохранены базисные фигуры затравки(имеется n измененных блоков).

Для подсчета числа базисных фигур по каждому пункту схемы используем правило умножения из комбинаторики. Суммируя количества базисных фигур с равным числом циклов c и компонент p из всех пунктов схемы, получаем

$$K_{nl}(c,p)=\sum_{\substack{\sum a_i=c\\ \sum b_i=p}}\prod_{i=1}^{n}K_{n,l-1}(a_i,b_i)+$$
$$+\sum_{j=2}^{n-1}\sum_{\substack{a+\sum a_i+\sum g_i=c\\ b+\sum b_i+\sum d_i=p}}K_{j,1}(a,b)\cdot C_n^j\cdot\prod_{i=1}^{n-j}K_{n,l-1}(a_i,b_i)\cdot\prod_{i=1}^{j}K^*_{n,l-1}(g_i,d_i)+$$
$$+\sum_{\substack{a+\sum g_i=c\\ b+\sum d_{i_i}=p}}K_{n1}(a,b)\prod_{i=1}^{n}K^*_{n,l-1}(g_i,d_i).$$

Здесь каждая сумма получена в соответствующем пункте схемы.

Для вычисления $K^*_{nl}(c,p)$ используем схему:

1) в базисных фигурах нет ребер 1-го ранга (один измененный блок $l-1$ - го ранга);

2) в базисных фигурах имеется одно ребро 1-го ранга (три измененных блока $l-1$ - го ранга);

3) имеется цикл C_3 из ребер 1-го ранга (четыре измененных блока $l-1$- го ранга);

. . . .

n-1) из ребер 1-го ранга в базисные фигуры измененного блока l- го ранга входят базисные фигуры затравки с $n-1$ вершинами.

Отсюда следует формула

$$K^*_{nl}(c,p)=$$
$$\sum_{\substack{\sum a_i+a=c\\ \sum b_i+b=p}}K^*_{n,l-1}(a,b)\prod_{i=1}^{n-1}K_{n,l-1}(a_i,b_i)+$$
$$+\sum_{j=3}^{n-1}\sum_{\substack{\sum a_i+\sum g_i+a=c\\ \sum b_i+\sum d_i+b=p}}K_{j-1,1}(a,b)\cdot C_{n-1}^{j-1}\cdot\prod_{i=1}^{j}K^*_{n,l-1}(g_i,d_i)\cdot\prod_{i=1}^{n-j}K_{n,l-1}(a_i,b_i).+$$
$$+\sum_{\substack{a+\sum g_i=c\\ b+\sum d_i=p}}K_{n-1,1}(a,b)\prod_{i=1}^{n}K^*_{n,l-1}(g_i,d_i).$$

Теорема доказана.

Вычислим, к примеру, $|A_2|$ при $n=4$. По теореме имеем:

определитель матрицы смежностей предфрактального графа G_2 с полной четырехвершинной затравкой $H=(W,Q)$ вычисляется по рекуррентной формуле

$$\left|A_2\right| = (-1)^{4^2} \sum (-1)^p 2^c K_{42}(c,p),$$

где

$$K_{42}(c,p) = \sum_{\substack{\sum a_i = c \\ \sum b_i = p}} \prod_{i=1}^{4} K_{41}(a_i, b_i) +$$
$$+ \sum_{j=2}^{3} \sum_{\substack{a+\sum a_i + \sum g_i = c \\ b+\sum b_i + \sum d_i = p}} K_{j1}(a,b) \cdot C_4^j \cdot \prod_{i=1}^{4-j} K_{41}(a_i, b_i) \prod_{i=1}^{j} K_{41}^{*}(g_i, d_i) +$$
$$+ \sum_{\substack{a+\sum g_i = c \\ b+\sum d_i = p}} K_{41}(a,b) \prod_{i=1}^{4} K_{41}^{*}(g_i, d_i)$$

$K_{41}(c,p)$ принадлежат множеству всех чисел базисных фигур этапа $l=1$, а $K_{41}^{*}(c,p)$ - множеству всех чисел базисных фигур в измененных блоках.

Пусть $l=1$. Рассматриваем граф G_1 (рис.1).

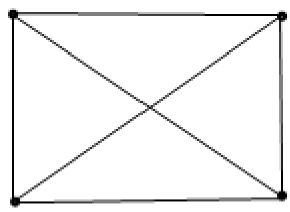

Рис.1.

Построим все базисные фигуры в графе G_1 с 4-мя вершинами (рис.2).

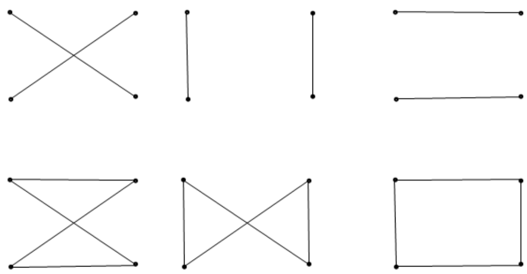

Рис.2.

Первые три фигуры имеют 0 циклов и 2 компоненты, т.е. $K_{41}(0,2)=3$. Остальные три-1 цикл и 1 компоненту, $K_{41}(1,1)=3$. Т.о. по лемме получаем

$$|A_1| = (-1)^4 \left(3(-1)^2 2^0 + 3(-1)^1 2^1\right) = -3$$

Пусть $l=2$. Рассматриваем граф G_2 (рис.3) по схеме:

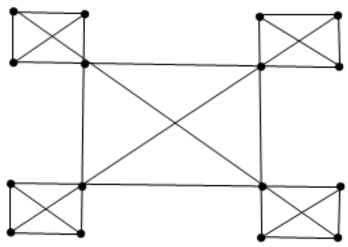

Рис.3.

1) в базисных фигурах графа G_2 с $N=4^2=16$ вершинами отсутствуют ребра 1-го ранга (нет измененных блоков) (рис. 4а));

2) из старых ребер 1-го ранга сохранено одно ребро (два измененных блока) (например, рис. 4б));

3) из старых ребер 1-го ранга сохранен цикл C_3 (три измененных блока) (например, рис.4в));

4) из старых ребер сохранен либо цикл C_4 или два ребра, не имеющих общую вершину (4 измененных блока) (рис. 4г)), т.е. базисные фигуры затравки.

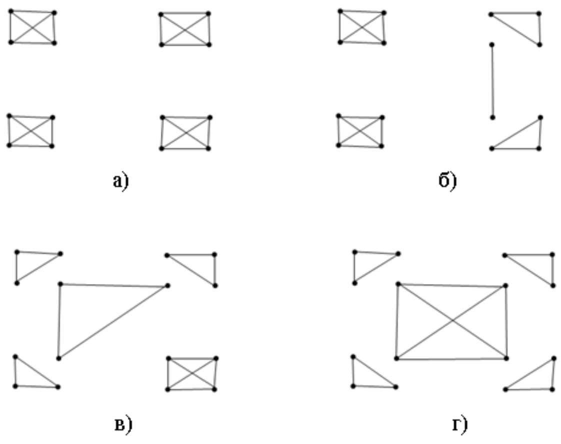

Рис.4.

Т.о., все базисные фигуры графа G_2 с 16 вершинами содержатся в графах этих 4-х видов.

1) $K_{42}(c,p)=\sum\limits_{\substack{\sum a_i=c\\ \sum b_i=p}}\prod\limits_{i=1}^{4}K_{41}(a_i,b_i)$

где $K_{41}(a_i,b_i)\in\{K_{41}(c,p)\}=\{K_{41}(0,2),K_{41}(1,1)\}=\{3,3\}$,

$K_{42}(0,8)=K_{41}^{4}(0,2)=3^4=81$,

$$\begin{aligned}K_{42}(1,7)&=K_{41}(1,1)K_{41}(0,2)\ K_{41}(0,2)K_{41}(0,2)+\\&+K_{41}(0,2)K_{41}(1,1)K_{41}(0,2)K_{41}(0,2)+\\&+K_{41}(0,2)K_{41}(0,2)K_{41}(1,1)K_{41}(0,2)+\\&+K_{41}(0,2)K_{41}(0,2)K_{41}(0,2)K_{41}(1,1)=4\cdot 3\cdot 3^3=324,\end{aligned}$$

$K_{42}(2,6)=C_4^2K_{41}^2(0,2)K_{41}^2(1,1)=6\cdot 3^4=486$,

$K_{42}(3,5)=C_4^1K_{41}(0,2)K_{41}^3(1,1)=324,$

$K_{42}(4,4)=K_{41}^4(1,1)=3^4=81$;

2) $K_{42}(c,p)=\sum\limits_{\substack{\sum a_i+\sum g_i=c\\ \sum b_i+\sum d_i+1=p}}C_4^2K_{21}(0,1)\prod\limits_{i=1}^{2}K_{41}(a_i,b_i)\prod\limits_{i=1}^{2}K_{41}^{*}(g_i,d_i)$,

$K_{41}^{*}(g_i,d_i)=K_{31}(1,1)=1$;

$\hat{E}_{42}(2,7)=K_{41}^2(0,2)K_{31}^2(1,1)C_4^2=3\cdot 3\cdot 4=54$

$K_{42}(3,6)=2K_{41}(0,2)K_{41}(1,1)K_{31}^2(1,1)C_4^2=108$,

$K_{42}(4,5)=K_{41}^2(1,1)K_{31}^2(1,1)C_4^2=54.$

3) $K_{42}(c,p)=\sum\limits_{\substack{\sum g_i+a+1=c\\ \sum d_i+b+1=p}}C_4^3K_{31}(1,1)\prod\limits_{i=1}^{3}K_{41}^{*}(g_i,d_i)K_{41}(a,b)$

$K_{42}(4,6)=C_4^3K_{31}(1,1)K_{41}(0,2)K_{31}^3(1,1)=12,$

$K_{42}(5,5)=C_4^3K_{31}(1,1)K_{41}(1,1)K_{31}^3(1,1)=12$.

4) $K_{42}(c,p)=\sum\limits_{\substack{a+\sum g_i=c\\ b+\sum d_i=p}}K_{41}(a,b)\prod\limits_{i=1}^{4}K_{41}^{*}(g_i,d_i)$

$K_{42}(4,6)=K_{41}(0,2)K_{31}^4(1,1)=3$,

$K_{42}(5,5)=K_{41}(1,1)K_{31}^4(1,1)=3.$

Таким образом,

$K_{42}(0,8)=81,\quad K_{42}(1,7)=324,\quad K_{42}(2,6)=486,\quad K_{42}(3,5)=324,\quad K_{42}(4,4)=81,\quad K_{42}(2,7)=54,$

$K_{42}(3,6)=108,\ K_{42}(4,5)=54,\ K_{42}(4,6)=15,\ K_{42}(5,5)=15.$

Следовательно,

$$|A_{42}|=(-1)^{16}(81(-1)^8 2^0+324(-1)^7 2^1+486(-1)^6 2^2+324(-1)^5 2^3+81(-1)^4 2^4+$$
$$+54(-1)^7 2^2+108(-1)^6 2^3+54(-1)^5 2^4+15(-1)^6 2^4+15(-1)^5 2^5=-375.$$

Задача вычисления определителей матриц смежности предфрактальных графов рассматривается впервые. Получен алгоритм вычисления определителей предфрактальных графов с полными затравками, сохраняющих смежность старых ребер в траектории. Для вычисления определителей таких предфрактальных графов использован способ (лемма [1]), основанный на рассмотрении структуры графа. Полученный алгоритм упрощает процесс вычисления, поскольку при его использовании нет необходимости рассматривать ни матрицу смежности предфрактального графа, ни его структуру, и сводит к работе с множеством чисел базисных фигур предыдущего этапа траектории.

Список литературы:

1. Цветкович Д., Дуб М., Захс Х. Спектры графов: теория и применение. Наукова Думка. Киев.1984. 384 с.
2. Кочкаров А.А., Сенникова Л.И. Количественные оценки некоторых связностных характеристик предфрактальных графов. // Прикладная дискретная математика. - 2011.№ 4(14) –С. 56-61.
3. Кочкаров А.А. Структурная динамика: свойства и количественные характеристики предфрактальных графов. - М.: Вега-Инфо, 2012.- 120 с.
4. Кочкаров А.А. Новые теоретико-графические подходы в моделировании сложных систем: Автореф. дис. … канд. физ.-матем. наук . М.: ИПМатем. им. М.В. Келдыша. РАН, 2005. 24с.
5. Кузнецов Ю.Н., Кузубов В.И., Волощенко А.Б. Математическое программирование.- М.: Высшая школа,1980. 302 с.
6. Малыхин В.И. Математика в экономике.-М.: ИНФРА-М.2000. 356 с.
7. Емеличев В.А., Мельников О.И., Сарванов В.И., Тышкевич Р.И. Лекции по теории графов. -М.:Наука,1990. 384 с.
8. Ашманов С.А. Линейное программирование. - М.: Наука,1981. 340 с.
9. Кочкаров А. М. Распознавание фрактальных графов. Алгоритмический подход.- Нижний Архыз: РАН САО.1998. 170 с.

10. Байрамукова З.Х., Кочкаров А.М. Спектры предфрактальных графов с затравками – циклами, сохраняющих смежность старых ребер.// Научный журнал КубГАУ. №81(07). 2012 года. 10 с.
11. Кочкаров А.А., Кочкаров Р.А. Параллельный алгоритм поиска кратчайшего пути на предфрактальном графе. // Журнал вычислительной математики и математической физики. – Т. 44. № 6.-С. 1147 - 1152.