УДК 51-77: 336.6

UDC 51-77: 336.6

МАТЕМАТИЧЕСКОЕ МОДЕЛИРОВАНИЕ ДЕЯТЕЛЬНОСТИ ФИНАНСОВОЙ ПИРАМИДОЙ. ЧАСТЬ 2. НЕПРЕРЫВНЫЕ МОДЕЛИ

MATHEMATICAL MODELING OF FINANCIAL PYRAMID SCHEME. PART 2. CONTINUOUS MODELS

Коваленко Анна Владимировна
к.э.н., доцент кафедры прикладной математики

Уртенов Махамет Хусеевич
д.ф.–м.н., профессор кафедры прикладной математики

Кубанский государственный университет, Краснодар, Россия

Чагаров Радмир Хамидбиевич
аспирант

Карачаево-Черкесский государственный университет, Карачаевск, Россия

Kovalenko Anna Vladimirovna
Cand.Econ.Sci., assistant professor

Urtenov Makhamet Khuseevich
Dr.Sci.Phys.-Math., professor

Kuban State University, Krasnodar, Russia

Chagarov Radmir Hamidbievich
graduate

Karachaevo-Circassian State University, Karachaevsk, Russia

Статья посвящена анализу различных случаев изменения количества клиентов финансовой пирамиды и установлению основных закономерностей деятельности финансовых пирамид на основе непрерывных моделей, и является продолжением работ [1, 2], где были выведены формулы, моделирующие суммы, собираемые финансовой пирамидой и рассмотрены дискретные модели

This article is devoted to the analysis of different cases of changing the number of customers of the financial pyramid and the establishment of the basic rules of the pyramid schemes on the basis of continuous models, and it is a continuation of works [1, 2], which had formulas to simulate the amount collected by the pyramid scheme and it considers the discrete models

Ключевые слова: МАТЕМАТИЧЕСКОЕ МОДЕЛИРОВАНИЕ, ФИНАНСОВАЯ ПИРАМИДА, МАКСИМАЛЬНО ВОЗМОЖНАЯ ПРИБЫЛЬ, РЕКЛАМНАЯ КАМПАНИЯ, ПИРАМИДАЛЬНАЯ СХЕМА ВЫПЛАТ, НЕПРЕРЫВНЫЕ МОДЕЛИ

Keywords: MATHEMATICAL MODELING, PYRAMID SCHEME, MAXIMUM POSSIBLE PROFIT, ADVERTISING CAMPAIGN, PYRAMID SCHEME OF PAYMENTS, CONTINUOUS MODELS

1. Постановка задачи

Обозначим через $N(t)$ – общее число клиентов финансовой пирамиды в текущий момент времени t и $t=0$ соответствует началу деятельности финансовой пирамиды, N_n – общее число потенциальных клиентов, $a(t)$ – интенсивность рекламной кампании, которую в первом приближении можно считать пропорциональной расходам на рекламу. Как правило, в качестве базового периода финансовые пирамиды использую месяц, однако имеются примеры финансовых пирамид, которые осуществляли ежедневные если не выплаты, то расчеты дивидендов. В этих случая удобно считать, что время непрерывно и для расчетов используются непрерывные проценты и естественно строить непрерывные модели деятельности финансовых пирамид. Через $a(0)$ обозначим сумму, потраченную финансовой пирамидой на рекламную компанию до начала деятельности. Обозначим через $S(t)$ сумму на «счетах» финансовой кампании, а $a(t)$, - расходы на рекламу в текущем момент времени t. Обозначим $N(0)=N_0$ количество клиентов в начальный момент времени. Казалось бы, естественным положить $N_0=0$, однако в некоторых случаях организаторы финансовых пирамид распространяли свои акции и др. финансовые инструменты среди своих близких, знакомых и «нужных» людей. Наряду с очевидной коррупционной составляющей, такая мера как мы увидим ниже, имеет и экономический смысл, поскольку эти клиенты, получив первые дивиденды, значительно превосходящие среднерыночные, начинают распространять об этом информацию в виде слухов, становясь фактически добровольными рекламными агентами. Поэтому в некоторых случаях нужно считать $N_0>0$, но естественно, что при этом $N_0 << N_n$.

Общая формула для собираемой финансовой пирамидой сумма, в непрерывном случае, имеет вид [1]:

$$S(t)=S_0-mN_0+mN(t)-\int_0^t a(t)dt-bm\int_0^t N(t)dt,\ t>0, \qquad (1)$$

Причем, как и в дискретном случае нужно рассматривать два разных варианта финансирования рекламной компании:

1) На рекламу расходуется постоянная сумма, т.е. $a(t)=const=R_0$, для любого $t>0$, тогда

$$S(t)=S_0-mN_0+mN(t)-bm\int_0^t N(t)dt-R_0t \qquad (2)$$

2) Пропорциональный расход на рекламу, когда на рекламу уходит некоторый процент g $(0<g<1)$ от вновь поступающих средств, т.е. $a(t)=gm\frac{dN}{dt}$, для любого $t>0$, тогда из (1) следует, что:

$$S(t)=S_0-(1-g)mN_0+(1-g)mN(t)-bm\int_0^t N(t)dt \qquad (3)$$

Для того чтобы проанализировать функции $S(t)$ и установить основные закономерности деятельности финансовых пирамид необходимо теперь определить динамику изменения количества клиентов $N(t)$ финансовой пирамиды.

2. Модель с постоянным количеством клиентов

Предположим, что в какой-то момент времени t^* число клиентов финансовой пирамиды стабилизируется, т.е. прекращается приток новых клиентов: $N(t)=N^*=const$ при $t>t^*$.

Это может, происходит, например, из-за прекращения рекламной компании $(a(t)=0,\ t>t^*)$ или из-за ее неэффективности, насыщенности рынка финансовых услуг и т.д. Рассмотрим, как изменяется в этом случае сумма $S(t)$ при $t>t^*$. Для этого воспользуемся формулой (1):

$$S(t)=S_0-mN_0+mN(t)-\int_0^t a(t)dt-bm\int_0^t N(t)dt\,,\ t>0$$

Полагая $t>t^*$, перепишем эту формулу в виде:

$$S(t)=S_0-mN_0+mN(t)-\int_0^{t^*} a(t)dt-\int_{t^*}^{t} a(t)dt-bm\int_0^{t^*} N(t)dt-$$

$$-bm\int_{t^*}^{t} N(t)dt\,,\ t>0$$

Обозначим

$$S^* = S_0 - mN_0 + mN^* - \int_0^{t^*} a(t)dt - bm\int_0^{t^*} N(t)dt, t > 0,$$

тогда с учетом, что $a_i(t) = 0, t \ge t^*$, $N(t) = N^* = const$ при $t > t^*$,получаем

$$S(t) = S^* - bmN^*(t - t^*), t > t^*, \tag{4}$$

из которого следует, что собираемая финансовой пирамидой сумма денег $S(t)$ линейно уменьшается с момента t^* и в некоторый момент времени t_b (время банкротства) обращается в ноль, т.е. финансовая пирамида не может больше выполнит свои обязательства и терпит банкротство (разоряется). Из (4) следует, что время банкротства обратно пропорционально процентной ставке:

$$t_b = t^* + \frac{1}{b}k, \text{ где } k = \frac{S^*}{mN^*}. \tag{5}$$

Таким образом, чем больше процентная ставка b, тем скорее наступит банкротство, при прочих равных условиях.

Кроме того, время банкротства прямо пропорционально собранной к моменту t^* сумме S^* и обратно пропорционально к количеству клиентов N^*, которым необходимо платить дивиденды.

Из анализа этой модели следует, что финансовая пирамида либо прекратит свою деятельность в некоторый момент времени близкий к t^*, либо должна обеспечивать за счет рекламы и др. мероприятий приток новых клиентов.

3. Модель с постоянным приростом клиентов

Предположим, что финансовой пирамиде удается обеспечить постоянный приток новых клиентов, это означает, что $\frac{dN}{dt} = q$, следовательно

$$N(t) = N_0 + qt\,. \tag{6}$$

Используя формулу (2), в случае постоянных расходов на рекламу, после приведения подобных, получаем:

$$S(t) = -\frac{1}{2}bmqt^2 + m(q - bN_0 - \frac{R_0}{m})t + S_0\,. \tag{7}$$

Аналогично, используя формулу (3), в случае процентных расходов на рекламу, после приведения подобных, получаем:

$$S(t) = -\frac{1}{2}bmqt^2 + m((1-g)q - bN_0)t + S_0 \tag{8}$$

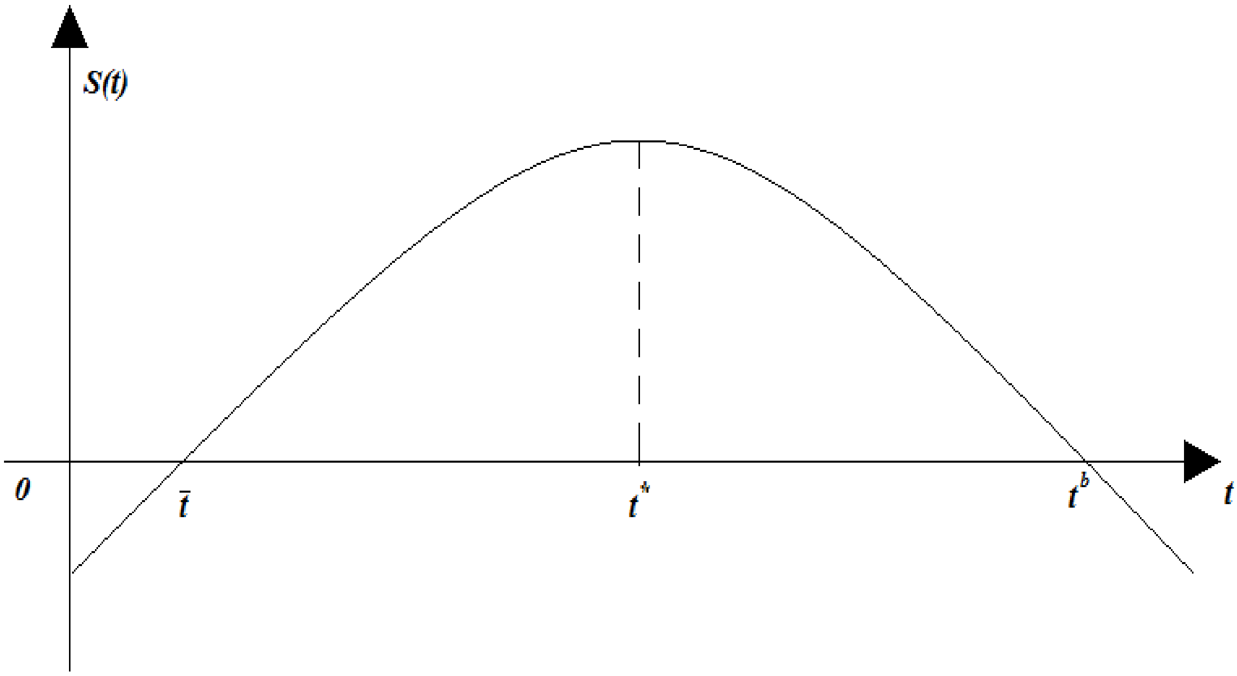

Рисунок 1. График функции $S(t)$. Здесь $\bar{t}$ - начало безубыточной деятельности финансовой пирамиды, t^* точка максимума функции $S(t)$, t_b - времени банкротства

В обоих случаях (7) или (8) графиком функции $S(t)$ является парабола (рис.1.) ветви, которой направлены вниз и поэтому банкротство финансовой пирамиды неизбежно. Для конкретности в дальнейшем рассматриваем функцию $S(t)$ заданную формулой (8)

Рассмотрим уравнение $S(t)=0$. Это уравнение имеет два решения. Первое решение $\bar{t}$ соответствует началу безубыточной деятельности, а второе t_b времени банкротства. В частном случае $S_0 = 0, g = 0$ получаем $\bar{t}=0$, $t_b = 1+\frac{2}{b}$. В общем случае начало безубыточной деятельности и время банкротства финансовой пирамиды, вычисляются по формулам:

$$\bar{t} = \frac{1-g}{b} - \frac{N_0}{q} - \sqrt{\left(\frac{1-g}{b} - \frac{N_0}{q}\right)^2 + \frac{2S_0}{mbq}} \text{ и}$$

$$t_b = \frac{1-g}{b} - \frac{N_0}{q} - \sqrt{\left(\frac{1-g}{b} - \frac{N_0}{q}\right)^2 + \frac{2S_0}{mbq}}.$$

Из формулы (8) следует, что оптимальное для организатора финансовой пирамиды время t^*, когда финансовая пирамида собирает максимальную сумму, приходится на вершину параболы

$$S(t) = -\frac{bqm}{2}t^2 + mq(1+\frac{b}{2}-g)t - a(0).$$

В частном случае $a(0)=0, g=0$ получаем $t^* = \frac{1}{2}t_b = \frac{1}{2}+\frac{1}{b}$.

Заметим, что t^* не зависит от величины вклад, а зависит, от величин процентной ставки по вкладам и процентной ставки направляемой на рекламу и потребление. Чем меньше процентная ставка b, тем больше t^* и тем больше времени до банкротства. Обратим внимание, что и здесь время банкротства обратно пропорционально процентной ставке.

Максимально собираемая финансовой пирамидой сумма S^* линейно растет с увеличением величины вклада. Зависимость S^* от процентной ставки более сложна. S^* принимает минимальное значение при $b = 2$ и кроме того:

$$S_{min}^{*} \approx \frac{1}{b}, \text{ при малом } b > 0$$

$$S_{min}^{*} \approx 1 + \frac{b}{4}, \text{ при больших } b > 0.$$

Так как $b = 2$, т.е. $b = 200\%$ в месяц является нереальной процентной ставкой, то получаем, собираемая сумма тем больше, чем меньше процентная ставка, т.к. $S_{min}^{*} \approx \frac{1}{b}$, при малом $b > 0$.

4.Модель с линейным приростом клиентов

Предположим, что финансовой пирамиде удается обеспечить линейный приток новых клиентов, это означает, что $\frac{dN}{dt} = q_0 + qt$, следовательно

$$N(t) = N_0 + q_0 t + \frac{1}{2} q t^2. \tag{9}$$

Используя формулу (2), в случае постоянных расходов на рекламу, после приведения подобных, получаем:

$$S(t) = -\frac{1}{6} bmqt^3 + \frac{1}{2} m(q - bq_0)t^2 + m(q - bN_0 - \frac{R_0}{m})t + S_0 \tag{10}$$

Аналогично, используя формулу (3), в случае процентных расходов на рекламу, после приведения подобных, получаем:

$$S(t) = S_0 - (1-g)mN_0 + (1-g)mN(t) - bm\int_0^t N(t)dt$$

$$S(t) = -\frac{1}{6} bmqt^3 + \frac{1}{2} m((1-g)q - bq_0)t^2 + m((1-g)q - bN_0)t + S_0 \tag{11}$$

5. Модель со сверхлинейным приростом клиентов

Предположим, что финансовой пирамиде удалась создать ажиотажный спрос, при котором прирост клиентов растет с экспоненциальной скоростью, т.е.

$$\frac{dN}{dt} = q_0 q^t \tag{12}$$

Как отмечалось в [2] такой рост числа клиентов пытаются также добиться финансовые пирамиды, использующие сетевые технологии.

С учетом начального условия, $N(0) = N_0$, получаем, что

$$N(t) = N_0 + q_0 q^t \ln q, \quad t > 0 \tag{13}$$

Воспользовавшись формулой (2) в случае, когда на рекламу выделяется ежемесячно постоянная сумма, получаем:

$$S(t) = S_0 - mN_0 + mN(t) - bm\int_0^t N(t)dt - R_0 t$$

$$S(t) = m(q_0 \ln q - b(N_0 + q_0))q^t - R_0 t + S_0 \tag{14}$$

Воспользовавшись формулой (3) в случае, когда на рекламу выделяется ежемесячно постоянный процент.

6. Модель с приростом клиентов за счет рекламной компании

Из приведенных выше математических моделей финансовых пирамид следует, что ключевое значение имеет прирост количества клиентов финансовой пирамиды. Очевидно, что это происходит за счет активной рекламной компании, на которую тратятся значительные средства.

В связи с этим моделирование рекламной кампании должно быть составной частью математической модели финансовой пирамиды.

Анализ деятельности финансовых пирамид показывает, что нужно учитывать два разных механизма рекламы:

а) Прямую рекламную компанию, которую проводить сама финансовая пирамида;

б) Общеизвестно, что значительная часть новых клиентов финансовой пирамиды приходят под воздействием информации и слухов, передаваемых в основном старыми клиентами, которые выступают как бы дополнительными рекламными агентами финансовой пирамиды.

В связи с этим, при моделировании рекламной кампании финансовые пирамиды будем основываться на следующих предположениях:

1) Скорость изменения со временем числа клиентов пропорционально эффективности рекламной компании и числу потенциальных клиентов, не знающих о существовании финансовой пирамиды.

Эффективность рекламной кампании в первом приближении можно считать пропорциональной расходам на рекламу $a_1(t)$, тогда:

$$\frac{dN}{dt} \sim a_1(t)(N_n - N(t)) \qquad (16)$$

2) Будем предполагать, что вклад информации и слухов, передаваемых старыми клиентами в увеличение скорости появления новых клиентов пропорциональна их количеству, общительности $a_2(t)$ и числу потенциальных клиентов, не знающих о существовании финансовой пирамиды. Таким образом:

$$\frac{dN}{dt} \sim a_2(t)N(t)(N_n - N(t) \qquad (17)$$

Суммируя (16) и (17) получаем уравнение:

$$\frac{dN}{dt} = (k_1 a_1(t) + k_2 a_2(t)N(t))(N_n - N(t)), t > 0, \qquad (18)$$

к этому уравнению добавляем начальное условие

$$N(0) = N_0, \qquad (19)$$

и для нахождения текущего числа клиентов финансовой пирамиды получаем задачу Коши (18), (19).

Задачу Коши (18), (19) необходимо исследовать численными методами, так как, в общем случае она не имеет точного аналитического решения. Исключение составляет случай $a_1(t) = a_1 = const$, $a_2(t) = a_2 = const$. В связи с этим исследованию модели финансовой пирамиды с задачей Коши будет посвящена наша следующая статья.

По проведенному выше исследованию можно сделать ряд выводов:

1. Деятельность любой финансовой пирамиды заканчивается банкротством, причиной которой является пирамидальная схема выплаты дивидендов.
2. Постоянный или линейный рост числа клиентов финансовой пирамиды не может покрыть ее расходы, что приводит финансовую пирамиду к банкротству.
3. Если финансовой пирамиде удается обеспечить ажиотажный спрос и, соответственно, экспоненциальный рост числа клиентов, то это достаточно быстро исчерпывает потенциальное множество клиентов финансовой пирамиды и закат деятельности финансовой пирамиды начинается с момента стабилизации числа клиентов, т.е. с момента, когда останавливается приток новых клиентов.

Литература:

1. Коваленко А.В. Математическое моделирование деятельности финансовой пирамидой. Часть 1. Основные понятия / А.В. Коваленко, М.Х. Уртенов, Р.Х. Чагаров // Политематический сетевой электронный научный журнал Кубанского государственного аграрного университета (Научный журнал КубГАУ) [Электронный ресурс]. – Краснодар: КубГАУ, 2012. – №08(82). – Режим доступа: http://ej.kubagro.ru/2012/08/pdf/29.pdf, 0,688 у.п.л.

2. Коваленко А.В. Математическое моделирование деятельности финансовой пирамидой. Часть 2. Дискретные модели / А.В. Коваленко, М.Х. Уртенов, Р.Х. Чагаров // Политематический сетевой электронный научный журнал Кубанского государственного аграрного университета (Научный журнал КубГАУ) [Электронный ресурс]. – Краснодар: КубГАУ, 2012. – №08(82). – Режим доступа: http://ej.kubagro.ru/2012/08/pdf/30.pdf, 0,813 у.п.л.