

УДК 621.81:539.3

UDC 621.81:539.3

ПРИВЕДЕНИЕ КРАЕВОЙ ЗАДАЧИ ДЛЯ ПЛОСКОГО УПРУГОГО ТЕЛА К ОДНОМУ ОСОБОМУ ИНТЕГРАЛЬНОМУ УРАВНЕНИЮ

REDUCTION OF BOUNDARY-VALUE PROBLEM FOR A PLANE ELASTIC BODY TO A SINGULAR INTEGRAL EQUATION

Дородов Павел Владимирович
к.т.н., доцент

Dorodov Pavel Vladimirovich
Cand.Tech.Sci., associate professor

ФГБОУ ВПО Ижевская государственная сельскохозяйственная академия, Ижевск, Россия

FSBEI HPE Izhevsk State Agricultural Academy, Izhevsk, Russia

В статье представлено аналитическое решение краевой задачи для плоского упругого тела с внешними и внутренними концентраторами напряжений посредством использования одного особого сингулярного интегрального уравнения. Приведен его вывод, а также решения в общем виде и в частных случаях

The boundary-value problem for a plane elastic body with external and internal stress concentrators has been analytically solved in this article by means of a singular integral equation. Derivation of this equation and general and particular solutions of the equation are represented

Ключевые слова: КОНЦЕНТРАТОР НАПРЯЖЕНИЙ, ПЛОСКОЕ УПРУГОЕ ТЕЛО, СОПРЯЖЕНИЕ, КРАЕВАЯ ЗАДАЧА, ОСОБОЕ ИНТЕГРАЛЬНОЕ УРАВНЕНИЕ

Keywords: STRESS CONCENTRATOR, PLANE ELASTIC BODY, CONJUGATION, BOUNDARY-VALUE PROBLEM, SINGULAR INTEGRAL EQUATION

Введение

В современных сельскохозяйственных машинах широко применяются рабочие органы и детали, ослабленные различными внутренними и внешними концентраторами напряжений. К внутренним концентраторам, например, относятся вырезы, выступы, отверстия, резкие переходы от одного сечения к другому. К внешним – твердые тела в зоне контакта (опоры, подшипники, пальцы, втулки и т.д.). При загрузке деталей вблизи границ концентраторов возникают значительные местные напряжения, которые могут неблагоприятно сказаться на прочности деталей.

Проблемам определения напряжений возле внутренних и внешних концентраторов посвящена обширная область теории упругости и механики разрушения. Однако способы исследования, как правило, не связаны между собой, поэтому отыскание единого подхода в исследовании

обеих проблем одними и теми же аналитическими методами остается актуальной краевой задачей механики деформируемого твердого тела.

Постановка задачи

Рассмотрим упругое тело единичной толщины произвольной формы, изображенное на рисунке 1, на которое действуют внешние нагрузки P_n и находящееся в состоянии равновесия.

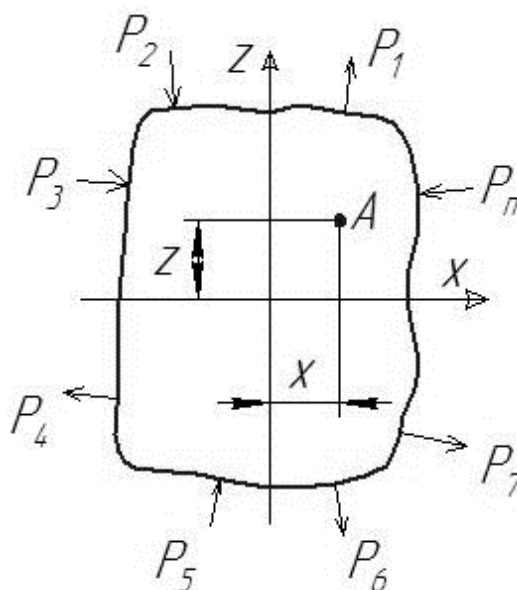


Рисунок 1 – Расчетная схема плоского тела

Оси x , z проведем через центр тяжести тела. Рассмотрим произвольную точку A .

Для исследования напряженно-деформированного состояния воспользуемся уравнениями Ламе без учета массовых сил [1]:

$$\left. \begin{aligned} (1-2\nu)\Delta u + \frac{\partial \Psi}{\partial x} &= 0, \\ (1-2\nu)\Delta w + \frac{\partial \Psi}{\partial z} &= 0, \end{aligned} \right\} \quad (1)$$

где ν – коэффициент Пуассона; u и w – перемещения в декартовой системе координат x , z ; $\Delta = \frac{\partial^2}{\partial x^2} + \frac{\partial^2}{\partial z^2}$, $\Psi = \frac{\partial u}{\partial x} + \frac{\partial w}{\partial z}$.

Известно, для решения такой задачи может быть использовано интегральное преобразование Фурье [2], а именно, решение уравнений (1) ищем в виде:

$$\left. \begin{aligned} u &= \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{+\infty} U(\alpha, z) \cdot e^{-i\alpha x} d\alpha, \\ w &= \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{+\infty} W(\alpha, z) \cdot e^{-i\alpha x} d\alpha. \end{aligned} \right\} \quad (2)$$

После подстановки (2) в (1) имеем систему уравнений, решение которой может быть представлено в форме

$$\left. \begin{aligned} U &= (A_1 + \alpha z A_2) ch(\alpha z) + (B_1 + \alpha z B_2) sh(\alpha z), \\ W &= i[(B_1 - kA_2 + \alpha z B_2) ch(\alpha z) + (A_1 - kB_2 + \alpha z A_2) sh(\alpha z)], \end{aligned} \right\}$$

где $k = 3 - 4\nu$; A_n, B_n ($n = 1, 2$) – постоянные, подлежащие определению из граничных условий.

Таким образом, перемещения u и w имеют вид:

$$\left. \begin{aligned} u &= \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{+\infty} [(A_1 + \alpha z A_2) ch(\alpha z) + (B_1 + \alpha z B_2) sh(\alpha z)] e^{-i\alpha x} d\alpha, \\ w &= \frac{i}{2\pi} \int_{-\infty}^{+\infty} [(B_1 - kA_2 + \alpha z B_2) ch(\alpha z) + (A_1 - kB_2 + \alpha z A_2) sh(\alpha z)] e^{-i\alpha x} d\alpha. \end{aligned} \right\} \quad (3)$$

Далее по известным формулам могут быть найдены деформации:

$$\varepsilon_x = \frac{\partial u}{\partial x} = -\frac{i}{2\pi} \int_{-\infty}^{+\infty} [(A_1 + \alpha z A_2) ch(\alpha z) + (B_1 + \alpha z B_2) sh(\alpha z)] \alpha e^{-i\alpha x} d\alpha,$$

$$\varepsilon_z = \frac{\partial w}{\partial z} = \frac{i}{2\pi} \int_{-\infty}^{+\infty} [(B_1 - kA_2 + \alpha z B_2) \alpha \cdot sh(\alpha z) + \alpha B_2 ch(\alpha z) + (A_1 - kB_2 + \alpha z A_2) \alpha \cdot ch(\alpha z) + \alpha A_2 sh(\alpha z)] e^{-i\alpha x} d\alpha = \frac{i}{2\pi} \int_{-\infty}^{+\infty} [(B_1 + (1-k)A_2 + \alpha z B_2) sh(\alpha z) + (A_1 + (1-k)B_2 + \alpha z A_2) ch(\alpha z)] \alpha e^{-i\alpha x} d\alpha,$$

$$\begin{aligned} \gamma &= \frac{\partial u}{\partial z} + \frac{\partial w}{\partial x} = \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{+\infty} [(A_1 + B_2 + \alpha z A_2) sh(\alpha z) + (B_1 + A_2 + \alpha z B_2) ch(\alpha z) + \\ & (B_1 - kA_2 + \alpha z B_2) ch(\alpha z) + (A_1 - kB_2 + \alpha z A_2) sh(\alpha z)] \alpha e^{-i\alpha x} d\alpha = \\ & \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{+\infty} [(2A_1 + (1-k)B_2 + 2\alpha z A_2) sh(\alpha z) + (2B_1 + (1-k)A_2 + 2\alpha z B_2) ch(\alpha z)] \alpha e^{-i\alpha x} d\alpha. \end{aligned}$$

а по закону Гука – напряжения

$$\left. \begin{aligned}
 \sigma_x &= \frac{2G}{1-2\nu} \frac{i}{2\pi} \int_{-\infty}^{+\infty} \left\{ -(1-\nu) [(A_1 + \alpha z A_2) ch(\alpha z) + (B_1 + \alpha z B_2) sh(\alpha z)] + \right. \\
 &\quad \left. \nu [(B_1 + \alpha z B_2 + (1-k)A_2) sh(\alpha z) + (A_1 + \alpha z A_2 + (1-k)B_2) ch(\alpha z)] \right\} \alpha e^{-i\alpha x} d\alpha = \\
 &= -\frac{iG}{\pi} \int_{-\infty}^{+\infty} [(A_1 + \alpha z A_2 + 2\nu B_2) ch(\alpha z) + (B_1 + \alpha z B_2 + 2\nu A_2) sh(\alpha z)] \alpha e^{-i\alpha x} d\alpha, \\
 \sigma_z &= \frac{2G}{1-2\nu} \frac{i}{2\pi} \int_{-\infty}^{+\infty} \left\{ (1-\nu) [(B_1 + \alpha z B_2 + (1-k)A_2) sh(\alpha z) + (A_1 + \alpha z A_2 + (1-k)B_2) ch(\alpha z)] - \right. \\
 &\quad \left. \nu [(A_1 + \alpha z A_2) ch(\alpha z) + (B_1 + \alpha z B_2) sh(\alpha z)] \right\} \alpha e^{-i\alpha x} d\alpha = \\
 &= \frac{iG}{\pi} \int_{-\infty}^{+\infty} [(2B_1 - (1+k)A_2 + 2\alpha z B_2) sh(\alpha z) + (2A_1 - (1+k)B_2 + 2\alpha z A_2) ch(\alpha z)] \alpha e^{-i\alpha x} d\alpha, \\
 \tau &= \frac{G}{2\pi} \int_{-\infty}^{+\infty} [(2A_1 + (1-k)B_2 + 2\alpha z A_2) sh(\alpha z) + (2B_1 + (1-k)A_2 + 2\alpha z B_2) ch(\alpha z)] \alpha e^{-i\alpha x} d\alpha.
 \end{aligned} \right\}$$

где G – модуль сдвига.

Граничные условия

Рассмотрим произвольный элемент плоского тела, показанный на рисунке 2, с горизонтальным сечением, в котором действуют напряжения σ_{z0}, τ_0 .

Зададимся следующими граничными условиями:

1) Из условий симметрии и при отсутствии жесткого перемещения тела

$$u(0;0) = w(0;0) = 0;$$

$$2) \sigma_z(x; z_0) = \sigma_{z0}, \quad |x| \leq l_{z0};$$

$$3) \tau(x; z_0) = \tau_0, \quad |x| \leq l_{z0}.$$

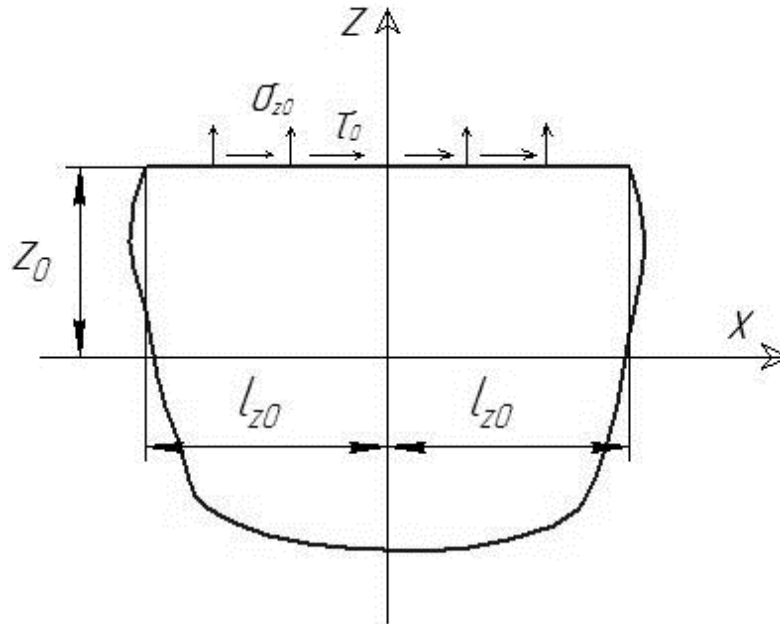


Рис. 2 Произвольное горизонтальное сечение плоского тела

Из первого граничного условия с учетом (3) получаем

$$A_1=0; B_1=kA_2.$$

Пусть на интервале $-l_{z_0} \leq x \leq l_{z_0}$ функции σ_{z_0} и τ_0 непрерывны и абсолютно интегрируемы. В этом случае имеют место преобразования и соответствующие обращения Фурье

$$\left. \begin{aligned} P(\alpha) &= \int_{-l_{z_0}}^{l_{z_0}} \sigma_{z_0}(\xi) e^{i\alpha\xi} d\xi; & \sigma_{z_0} &= \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} P(\alpha) e^{-i\alpha x} dx, \\ Q(\alpha) &= \int_{-l_{z_0}}^{l_{z_0}} \tau_0(\xi) e^{i\alpha\xi} d\xi; & \tau_0 &= \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} Q(\alpha) e^{-i\alpha x} dx, \end{aligned} \right\}$$

тогда из второго и третьего условия получим

$$A_2 = \frac{P(\alpha) \left((1-k)sh(\alpha z_0) + 2\alpha z_0 ch(\alpha z_0) \right)}{i\alpha G \left(2kch(2\alpha z_0) + k^2 + 1 + 4(\alpha z_0)^2 \right)} - \frac{Q(\alpha) \left(2\alpha z_0 sh(\alpha z_0) - (1+k)ch(\alpha z_0) \right)}{\alpha G \left(2kch(2\alpha z_0) + k^2 + 1 + 4(\alpha z_0)^2 \right)},$$

$$B_2 = -\frac{P(\alpha) \left(2\alpha z_0 sh(\alpha z_0) + (1+k)ch(\alpha z_0) \right)}{i\alpha G \left(2kch(2\alpha z_0) + k^2 + 1 + 4(\alpha z_0)^2 \right)} + \frac{Q(\alpha) \left(-(1-k)sh(\alpha z_0) + 2\alpha z_0 ch(\alpha z_0) \right)}{\alpha G \left(2kch(2\alpha z_0) + k^2 + 1 + 4(\alpha z_0)^2 \right)}.$$

После ряда преобразований выражения (3) примут вид:

$$u = \frac{1}{\pi\theta} \left(\int_{-l_{z_0}}^{+l_{z_0}} \tau_0(\xi) \int_0^{+\infty} \frac{J_{11}(\alpha z_0)}{\alpha J(\alpha z_0)} \cos \alpha(\xi - x) d\alpha d\xi - \varepsilon \int_{-l_{z_0}}^{+l_{z_0}} \sigma_{z_0}(\xi) \int_0^{+\infty} \frac{J_{12}(\alpha z_0)}{\alpha J(\alpha z_0)} \sin \alpha(\xi - x) d\alpha d\xi \right),$$

$$w = \frac{1}{\pi\theta} \left(\int_{-l_{z_0}}^{+l_{z_0}} \sigma_{z_0}(\xi) \int_0^{+\infty} \frac{J_{22}(\alpha z_0)}{\alpha J(\alpha z_0)} \cos \alpha(\xi - x) d\alpha d\xi + \varepsilon \int_{-l_{z_0}}^{+l_{z_0}} \tau_0(\xi) \int_0^{+\infty} \frac{J_{21}(\alpha z_0)}{\alpha J(\alpha z_0)} \sin \alpha(\xi - x) d\alpha d\xi \right),$$

где

$$J(\alpha z_0) = (2kch(2\alpha z_0) + k^2 + 1 + 4(\alpha z_0)^2),$$

$$J_{11}(\alpha z_0) = 2ksh(2\alpha z_0) + 4\alpha z_0,$$

$$J_{22}(\alpha z_0) = 2ksh(2\alpha z_0) - 4\alpha z_0,$$

$$J_{12}(\alpha z_0) = J_{21}(\alpha z_0) = 2k(ch(2\alpha z_0) - 1) - \frac{8(\alpha z_0)^2}{(k-1)},$$

$$\theta = \frac{G}{(1-\nu)},$$

$$\varepsilon = \frac{1-2\nu}{2(1-\nu)}.$$

Краевая задача

Если рассматривать σ_{z_0} , τ_0 в качестве местных напряжений, то, очевидно, они в основном должны зависеть от значения перемещений u и w на линии интегрирования $-l_{z_0} \leq x \leq l_{z_0}$ (линии контакта тел или сопряжения частей упругого тела) и мало зависеть от высоты z_0 .

Для того чтобы «избавиться» от z_0 устремим ее к бесконечности, при этом, считая интервал $-l_{z_0} \leq x \leq l_{z_0}$ конечным и учитывая, что

$$\lim_{z_0 \rightarrow \infty} \frac{J_{11}(\alpha z_0)}{J(\alpha z_0)} = 1, \quad \lim_{z_0 \rightarrow \infty} \frac{J_{12}(\alpha z_0)}{J(\alpha z_0)} = 1, \quad \lim_{z_0 \rightarrow \infty} \frac{J_{22}(\alpha z_0)}{J(\alpha z_0)} = 1,$$

имеем

$$u_1 = \frac{1}{\pi\theta} \left(\int_{-l}^{+l} \tau_1(\xi) \int_0^{+\infty} \frac{\cos \alpha(\xi - x)}{\alpha} d\alpha d\xi - \varepsilon \int_{-l}^{+l} \sigma_{1z}(\xi) \int_0^{+\infty} \frac{\sin \alpha(\xi - x)}{\alpha} d\alpha d\xi \right),$$

$$w_1 = \frac{1}{\pi\theta} \left(\int_{-l}^{+l} \sigma_{1z}(\xi) \int_0^{+\infty} \frac{\cos \alpha(\xi - x)}{\alpha} d\alpha d\xi + \varepsilon \int_{-l}^{+l} \tau_1(\xi) \int_0^{+\infty} \frac{\sin \alpha(\xi - x)}{\alpha} d\alpha d\xi \right),$$

здесь $u_l, w_l, \tau_l, \sigma_{1z}$ – местные перемещения и напряжения, а через l обозначено l_{z0} при $z_0 \rightarrow \infty$.

Составляющие компоненты деформаций примут вид:

$$u'_1 = \frac{du_1}{dx} = \frac{1}{\pi\theta} \left(\int_{-l}^{+l} \tau_1(\xi) \int_0^{+\infty} \sin \alpha(\xi - x) d\alpha d\xi + \varepsilon \int_{-l}^{+l} \sigma_{1z}(\xi) \int_0^{+\infty} \cos \alpha(\xi - x) d\alpha d\xi \right), \quad (4)$$

$$w'_1 = \frac{dw_1}{dx} = \frac{1}{\pi\theta} \left(\int_{-l}^{+l} \sigma_1(\xi) \int_0^{+\infty} \sin \alpha(\xi - x) d\alpha d\xi - \varepsilon \int_{-l}^{+l} \tau_1(\xi) \int_0^{+\infty} \cos \alpha(\xi - x) d\alpha d\xi \right). \quad (5)$$

Внутренние интегралы, согласно [2], можно записать

$$\int_0^{\infty} \sin \alpha(\xi - x) d\alpha = \frac{1}{\xi - x},$$

$$\int_0^{\infty} \cos \alpha(\xi - x) d\alpha = \pi \delta(\xi - x),$$

где $\delta(\xi-x)$ – дельта-функция Дирака, обладающая свойством

$$\int_{-\infty}^{\infty} \delta(\xi - x) d(\xi - x) = 1.$$

Тогда при $-l < x < l$ [3]

$$\left. \begin{aligned} \int_{-l}^l \sigma_{1z}(\xi) \delta(\xi - x) d\xi &= \sigma_{1z}(x), \\ \int_{-l}^l \tau_1(\xi) \delta(\xi - x) d\xi &= \tau_1(x). \end{aligned} \right\}$$

Таким образом, выражения (4) и (5), можно переписать

$$u'_1 = \frac{du_1}{dx} = \frac{1}{\pi\theta} \left(\int_{-l}^{+l} \frac{\tau_1(\xi)}{\xi - x} d\xi + \pi\varepsilon\sigma_{1z}(x) \right), \quad (6)$$

$$w'_1 = \frac{dw_1}{dx} = \frac{1}{\pi\theta} \left(\int_{-l}^{+l} \frac{\sigma_{1z}(\xi)}{\xi - x} d\xi - \pi\varepsilon\tau_1(x) \right). \quad (7)$$

Умножим уравнение (6) на i и сложим с (7):

$$w'_1(x) + iu'_1(x) = \frac{1}{\pi\theta} \int_{-l}^{+l} \frac{\sigma_{1z}(\xi) + i\tau_1(\xi)}{\xi - x} d\xi + \frac{\varepsilon}{\theta} (i\sigma_{1z}(x) - \tau_1(x))$$

ИЛИ

$$a\varphi(x) + \frac{b}{\pi i} \int_{-l}^{+l} \frac{\varphi(\zeta)}{\zeta - x} d\zeta = f(x), \quad (8)$$

где

$$f(x) = u_1'(x) - iw_1'(x),$$

$$\varphi(x) = \sigma_{1z}(x) + i\tau_1(x),$$

$$a = \frac{\varepsilon}{\theta},$$

$$b = \frac{1}{\theta}.$$

Выражение (8) представляет собой характеристическую часть особого (сингулярного) интегрального уравнения с постоянными коэффициентами a и b на отрезке $[-l;l]$, решение которого сводится к краевой задаче Коши-Римана [4, 5]. В общем виде его можно представить

$$j(x) = a^* f(x) - \frac{b^* Z(x)}{\pi i} \int_{-l}^{+l} \frac{f(x)}{Z(x)(x-x)} dx + b^* Z(x) P_{c-1}(x), \quad (9)$$

где $Z(x) = \omega(x) \prod_{j=1}^n (x - c_j)^{g_j}$ – каноническое решение класса h ; h – класс

решений, ограниченных в узлах $(c_1, \tilde{n}_2 \dots c_q)$; $\omega(x)$ – функция, удовлетворяющая условию Гёльдера; c_j – узлы линии интегрирования; $0 < \text{Re } g_j < 1$ при $j = 1, 2, \dots, q$; $-1 < \text{Re } g_j < 0$ при $j = q+1, \dots, m$; $\text{Re } g_j = 0$ при $j = m+1, \dots, n$; q – количество неособенных узлов, в которых решение ограничено; m – число всех неособенных узлов, в которых решение неограниченно; n – количество особенных узлов; $P_{c-1}(x)$ – произвольный многочлен, степени не выше $\chi-1$; χ – индекс класса h .

Например, при наличии двух узлов на концах линии интегрирования, решение (9) примет вид:

- в случае неограниченного решения на обоих концах отрезка $[-l;l]$

$$\varphi(x) = a^* f(x) - \frac{b^*}{\pi i} \frac{1}{\sqrt{l^2 - x^2}} \int_{-l}^{+l} \frac{\sqrt{l^2 - \zeta^2} f(\zeta)}{\zeta - x} d\zeta + \frac{C}{\pi \sqrt{l^2 - x^2}},$$

где a^* , b^* - действительные числа, определяемые по формулам

$$a^* = \frac{a}{a^2 - b^2} = \frac{\varepsilon\theta}{\varepsilon^2 - 1},$$

$$b^* = \frac{b}{a^2 - b^2} = \frac{\theta}{\varepsilon^2 - 1},$$

C – произвольная постоянная;

- в случае ограниченного решения при $x=-l$ и неограниченного при $x=l$

$$\varphi(x) = a^* f(x) - \frac{b^*}{\pi i} \sqrt{\frac{l+x}{l-x}} \int_{-l}^{+l} \sqrt{\frac{l-\zeta}{l+\zeta}} \frac{f(\zeta)}{\zeta-x} d\zeta;$$

- в случае неограниченного решения при $x=-l$ и ограниченного при $x=l$

$$\varphi(x) = a^* f(x) - \frac{b^*}{\pi i} \sqrt{\frac{l-x}{l+x}} \int_{-l}^{+l} \sqrt{\frac{l+\zeta}{l-\zeta}} \frac{f(\zeta)}{\zeta-x} d\zeta;$$

- в случае ограниченного решения на обоих концах отрезка $[-l;l]$

$$\varphi(x) = a^* f(x) - \frac{b^*}{\pi i} \sqrt{l^2 - x^2} \int_{-l}^{+l} \frac{f(\zeta)}{\sqrt{l^2 - \zeta^2} (\zeta - x)} d\zeta,$$

причем в последнем случае решение существует тогда и только тогда, когда

$$\int_{-l}^{+l} \frac{f(\zeta)}{\sqrt{l^2 - \zeta^2}} d\zeta = 0.$$

Заключение

Особое интегральное уравнение (8) может быть использовано для решения краевых задач теории упругости возле различных концентраторов напряжений на каком-либо отрезке интегрирования, в качестве которого может служить как внешний контур тела, так и какая-либо линия сопряжения внутри плоского тела. После определения напряжений на границе области можно переходить к решению плоской задачи с последующей оптимизацией (обратная задача).

Литература

1. Демидов С.П. Теория упругости: Учебник для вузов.- М.: Высш. школа, 1979. – 432 с.
2. Александров В.М. Введение в механику контактных взаимодействий / В.М. Александров, М.И. Чебаков. – Ростов-на-Дону: Изд-во ООО «ЦВВР», 2007. – 114 с.
3. Корн Г., Корн Т. Справочник по математике для научных работников и инженеров. – М.: Наука, 1968. – 720 с.
4. Мусхелишвили Н.И. Сингулярные интегральные уравнения. – М.: Изд-во «Наука», 1968. – 512 с.
5. Гахов Ф.Д. Краевые задачи. – М.: Наука, 1977. – 640 с.