

УДК 338.436.33

UDC 338.436.33

08.00.13 - Математические и инструментальные методы экономики (экономические науки)

08.00.13-Mathematical and instrumental methods of economics (Economic sciences)

ПОВЫШЕНИЕ ЭКОНОМИЧЕСКОЙ И ЭКСПЛУАТАЦИОННОЙ НАДЕЖНОСТИ ТРУБОПРОВОДНЫХ СООРУЖЕНИЙ СОВЕРШЕНСТВОВАНИЕМ МЕТОДОВ ОБНАРУЖЕНИЯ МИКРОДЕФЕКТОВ¹**INCREASING THE ECONOMIC AND OPERATIONAL RELIABILITY OF PIPELINE STRUCTURES BY IMPROVING METHODS FOR DETECTING MICRODEFECTS**Аршинов Георгий Александрович
д.т.н., профессорArshinov Georgiy Aleksandrovich
Dr.Sci.Tech., Professor*Кубанский государственный аграрный университет, Краснодар, Россия**Kuban State Agrarian University, Krasnodar, Russia*

Исследование направлено на повышение экономической и эксплуатационной надежности трубопроводных сооружений за счет совершенствования акустической фиксации микродефектов в материале конструкций. Трубопроводы различного назначения должны обладать надежностью для обеспечения безаварийной работы в период эксплуатации, поскольку от этого зависит их экономическая и эксплуатационная надежность. Очевидно, присутствие микродефектов в материале трубопроводов ведет к снижению их прочности. В окрестности микродефектов возможен процесс разрушения материала, приводящий к потере прочности, что сопровождается разрушением сооружений и, как следствие, экономическим ущербом, ухудшением экологии. Совершенствование акустических способов выявления микродефектов в вязкоупругих материалах трубопроводов можно осуществить путем разработки математически уточненных моделей деформационных волн в цилиндрических оболочках на основе учета реальных физико-механических параметров, приводящих к более точным характеристикам деформационных волн. Такие модели являются нелинейными и строятся с учетом реальных наследственных свойств материала, возможности развития в материале больших деформаций

The study is aimed at increasing the economic and operational reliability of pipeline facilities by improving the acoustic fixation of microdefects in the material of structures. Pipelines for various purposes must be reliable to ensure trouble-free operation during operation, since their economic and operational reliability depends on this. Obviously, the presence of microdefects in the material of pipelines leads to a decrease in their strength. In the vicinity of microdefects, the process of destruction of the material is possible, leading to a loss of strength, which is accompanied by the destruction of structures and, as a result, economic damage, deterioration of the environment. Improvement of acoustic methods for detecting microdefects in viscoelastic materials of pipelines can be carried out by developing mathematically refined models of deformation waves in cylindrical shells based on taking into account real physical and mechanical parameters leading to more accurate characteristics of deformation waves. Such models are nonlinear and are built taking into account the real hereditary properties of the material, the possibility of developing large deformations in the material

Ключевые слова: ТРУБОПРОВОДЫ, НАДЕЖНОСТЬ, ЦИЛИНДРИЧЕСКИЕ ОБОЛОЧКИ, МИКРОДЕФЕКТЫ, АКУСТИЧЕСКАЯ ДИАГНОСТИКА, НЕЛИНЕЙНЫЕ ВОЛНЫ, ВОЛНОВЫЕ ХАРАКТЕРИСТИКИ. НАСЛЕДСТВЕННОСТЬ, УРАВНЕНИЯ ДВИЖЕНИЯ

Keywords: PIPELINES, RELIABILITY, CYLINDRICAL SHELLS, MICRODEFECTS, ACOUSTIC DIAGNOSTICS, NONLINEAR WAVES, WAVE CHARACTERISTICS. HERITAGE, EQUATIONS OF MOTION

DOI: <http://dx.doi.org/10.21515/1990-4665-170-023>

¹ Статья выполнена по гранту РФФИ 19-010-00385 А «Повышение экономической и эксплуатационной надежности строительных и водо-, нефте-, газопроводных сооружений путем совершенствования неразрушающих акустических методов диагностики»

Трубопроводы, моделируемые цилиндрическими оболочками, изготавливаются из материала, который может обладать наследственными нелинейными физико-механическими свойствами.

Безаварийная работа трубопроводов под нагрузкой зависит от прочности материала и определяет надежность сооружений. Повышение эксплуатационной надежности таких конструкций – актуальная научная проблема.

Один из вариантов ее решения – совершенствование неразрушающих акустических методов диагностики микродефектов путем математического моделирования возникновения деформационных волн в цилиндрических оболочках, учитывая реальные свойства материалов и применяя для анализа строгие методы исследования.

Необходимо теоретически найти точные значения волновых параметров материалов оболочек. Экспериментально измеряя скорость деформационной волны в цилиндрической оболочке, моделирующей трубопровод, методами нелинейной акустики и сравнивая результат измерения с теоретически вычисленными значениями скоростей с помощью математических моделей, учитывающих ползучесть материалов, можно точнее выявлять существование микродефектов, в окрестности которых может развиваться разрушение трубопровода под воздействием силовых нагрузок.

Поэтому задача определения более точных значений скорости волны деформаций в цилиндрической оболочке с привлечением моделей деформирования, учитывающих свойства ползучести материала, является актуальной.

Экономическая и эксплуатационная надежность трубопроводных сооружений зависит от их прочности, которая может снижаться за счет существования микродефектов в конструкции. Уменьшение прочности может вызвать потерю несущей способности, разрушение сооружения,

сопровождающееся экономическим ущербом, ухудшением экологии.

В основу повышения надежности трубопроводов положено совершенствование акустического обнаружения микродефектов материала по уточненным волновым характеристикам, полученным путем математического моделирования нелинейных вязкоупругих деформационных волн в цилиндрических оболочках.

Исследуем продольные деформационные волны в бесконечных цилиндрических оболочках, имеющих толщину h и радиус R . Выберем цилиндрическую систему координат, в которой ось x - образующая срединной поверхности, ось y - касательная к осевому сечению оболочки, z - нормаль. Пусть на оболочку не действуют внешние силы (рис.1). Воспользуемся гипотезой Кирхгофа - Лява, пренебрегая инерцией вращения.

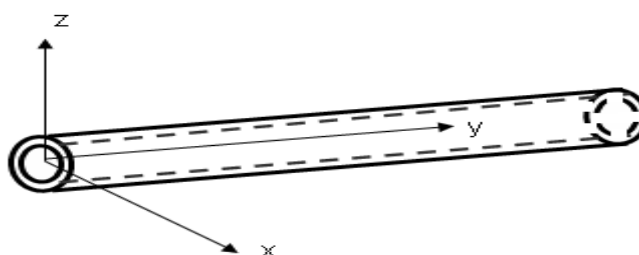


Рис. 1. Система координат для цилиндрической оболочки

Компоненты конечных деформаций определим с помощью формул:

$$\begin{aligned} \varepsilon_x^z &= U_x + \frac{1}{2}[(U_x - zW_{xx})^2 + (V_x - zW_{yy})^2 + W_x^2] - zW_{xx}; \\ \varepsilon_y^z &= V_y - K_y W + \frac{1}{2}[(U_y - zW_{xy})^2 + (V_y - zW_{yy})^2 + W_y^2] - zW_{yy}; \\ \gamma^z &= U_y + V_x + (U_x - zW_{xx})(U_y - zW_{xy}) + (V_x - zW_{xy}) \times \\ &\quad \times (V_y - zW_{yy}) + W_x W_y - 2zW_{xy}, \end{aligned} \tag{1}$$

где U, V, W - компоненты вектора перемещений точек срединной поверхности в соответствии с координатными осями x, y, z . Индекс z

соответствует деформации в слое оболочки, расположенном на расстоянии z от срединной поверхности; кривизна оболочки определяется параметром $K_y = \frac{1}{R}$.

В основу описания физических свойств материала оболочки положим уравнения линейной теории вязкоупругости при линейно-упругих объемных деформациях:

$$\begin{aligned} \sigma_x^z &= \frac{E}{1-\nu^2}(\epsilon_x + \nu\epsilon_y) - 2\mu\alpha \int_{-\infty}^t e^{-\beta(t-\tau)} e_x d\tau; \\ \sigma_y^z &= \frac{E}{1-\nu^2}(\epsilon_y + \nu\epsilon_x) - 2\mu\alpha \int_{-\infty}^t e^{-\beta(t-\tau)} e_y d\tau; \end{aligned} \quad (2)$$

$$\sigma_{xy}^z = \mu[\gamma - \alpha \int_{-\infty}^t e^{-\beta(t-\tau)} \gamma d\tau],$$

в которых $e_x = \epsilon_x - \frac{1}{3}(\epsilon_x + \epsilon_y)$; $e_y = \epsilon_y - \frac{1}{3}(\epsilon_x + \epsilon_y)$ – компоненты дивергента деформаций.

Заменим интегральные операторы в (2) дифференциальными, используя разложение функций e_x ; e_y ; γ в ряды Тейлора со степенями $(t-\tau)$. Положим, что $\beta t \gg 1$, т.е. память материала оболочки быстро затухающая.

Сохраним в рядах Тейлора два слагаемых, опустим индекс z , получим следующие выражения связи между напряжениями и деформациями:

$$\begin{aligned} \sigma_x &\approx \frac{E}{1-\nu^2}(\epsilon_x + \nu\epsilon_y) + p[\frac{2}{3}\epsilon_x - \frac{1}{3}\epsilon_y]; \\ \sigma_y &\approx \frac{E}{1-\nu^2}(\epsilon_y + \nu\epsilon_x) + p[\frac{2}{3}\epsilon_y - \frac{1}{3}\epsilon_x]; \end{aligned} \quad (3)$$

$$\sigma_{xy} = \frac{p}{2}\gamma + \mu\gamma,$$

где $p = 2\mu\left(\frac{\alpha}{\beta^2}\frac{\partial}{\partial t} - \frac{\alpha}{\beta}\right)$.

Учитывая (1) в формуле (3), имеем:

$$\begin{aligned} \sigma_x = & N[U_x + \frac{1}{2}(U_x^2 - 2zU_x W_{xx} + z^2W_{xx}^2 + V_x^2 - 2zV_x W_{xy} + z^2W_{xy}^2 + W_x^2) - \\ & - zW_{xx}] + L[V_y + \frac{1}{2}(U_y^2 - 2zU_y W_{xy} + z^2W_{xy}^2 + V_y^2 - 2zV_y W_{yy} + z^2W_{yy}^2 + \\ & + W_y^2) - zW_{yy}]; \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \sigma_y = & N[V_y - K_y W + \frac{1}{2}(U_y^2 - 2zU_y W_{xy} + z^2W_{xy}^2 + V_y^2 - 2zV_y W_{yy} + z^2W_{yy}^2 + \\ & + W_y^2) - zW_{yy}] + L[U_x + \frac{1}{2}(U_x^2 - 2zU_x W_{xx} + z^2W_{xx}^2 + V_x^2 - 2zV_x W_{xy} + \\ & + z^2W_{xy}^2 + W_x^2) - zW_{xx}]; \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \sigma_{xy} = & K[U_y + V_x - 2zW_{xy} + U_x U_y - z(U_x W_{xy} + U_y W_{xx}) + z^2W_{xx} W_{xy} + V_x V_y - \\ & - z(V_x W_{yy} + V_y W_{xy}) + z^2W_{xy} W_{yy} + W_x W_y], \end{aligned}$$

где

$$N = \frac{E}{1-\nu^2} + \frac{2p}{3}; \quad L = \frac{\nu E}{1-\nu^2} - \frac{p}{3}; \quad K = \frac{E}{2(1+\nu)} + p$$

Воспользуемся формулами для вычисления усилий и моментов в элементе цилиндрической оболочки:

$$\begin{aligned} N_x = \int_{-h/2}^{h/2} \sigma_x dz; & \quad N_y = \int_{-h/2}^{h/2} \sigma_y dz; & \quad T = \int_{-h/2}^{h/2} \tau dz; \\ M_x = \int_{-h/2}^{h/2} \sigma_x z dz; & \quad M_y = \int_{-h/2}^{h/2} \sigma_y z dz; & \quad H = \int_{-h/2}^{h/2} \tau z dz. \end{aligned}$$

В итоге получим усилия

$$\begin{aligned} N_x = & N\left\{hd + \frac{h^3}{24}(W_{xx}^2 + W_{xy}^2)\right\} + L\left\{hb + \frac{h^3}{24}(W_{xy}^2 + W_{yy}^2)\right\}; \\ N_y = & N\left\{hb + \frac{h^3}{24}(W_{xy}^2 + W_{yy}^2)\right\} + L\left\{hd + \frac{h^3}{24}(W_{xx}^2 + W_{xy}^2)\right\}; \end{aligned}$$

$$T = K\{hc + \frac{h^3}{12}(W_{xx}W_{xy} + W_{xy}W_{yy})\}$$

и моменты сил

$$M_x = -\frac{h^3}{12}\{Nm + Ln\}; \quad M_y = -\frac{h^3}{12}\{Nn + Lm\}; \quad H = -\frac{h^3}{12}Kl,$$

здесь

$$d = U_x + \frac{1}{2}(U_x^2 + V_x^2 + W_x^2); \quad b = V_y + \frac{1}{2}(U_y^2 + V_y^2 + W_y^2);$$

$$c = U_y + V_x + U_x U_y + V_x V_y + W_x W_y;$$

$$m = 2U_x U_{xx} + 2V_x W_{xy} + W_{xx};$$

$$n = 2U_y W_{xy} + 2V_y W_{yy} + W_{yy};$$

$$q = 2W_{xy} + U_x W_{xy} + U_y W_{xx} + V_x W_{yy} + V_y W_{xy},$$

Подставим определенные усилия и моменты в формулы для уравнений движения оболочки:

$$\frac{\partial N_x}{\partial x} + \frac{\partial T}{\partial y} - \rho h \frac{\partial^2 U}{\partial t^2} = 0; \quad \frac{\partial T}{\partial x} + \frac{\partial N_y}{\partial y} - \rho h \frac{\partial^2 V}{\partial t^2} = 0;$$

$$\frac{\partial^2 M_x}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 M_y}{\partial y^2} + 2 \frac{\partial^2 H}{\partial x \partial y} + K_y N_y + \frac{\partial}{\partial x} (N_x \frac{\partial W}{\partial x} + T \frac{\partial W}{\partial y})$$

+

$$+ \frac{\partial}{\partial y} (T \frac{\partial W}{\partial x} + N_y \frac{\partial W}{\partial y}) - \rho h \frac{\partial^2 W}{\partial t^2} = 0.$$

В результате из первого уравнения движения имеем

$$N\{\frac{\partial}{\partial x}[U_x + \frac{1}{2}(U_x^2 + V_x^2 + W_x^2) + \frac{h^2}{24}(W_{xx}^2 + W_{xy}^2)]\} +$$

$$+ L\{\frac{\partial}{\partial x}[V_y + \frac{1}{2}(U_y^2 + V_y^2 + W_y^2) + \frac{h^2}{24}(W_{xy}^2 + W_{yy}^2)]\} +$$

$$+ \frac{h^2}{12}(W_{xx}W_{xy} + W_{xy}W_{yy})\} - \rho \frac{\partial^2 U}{\partial t^2} = 0,$$

а второе уравнение получим из первого путем замены U на V, x на y, V

на U , уна x .

Третье уравнение после подстановки примет вид

$$\begin{aligned} & \frac{\partial^2}{\partial x^2} \left\{ -\frac{h^2}{12} [N(2U_x U_{xx} + 2V_x W_{xy} + W_{xx}) + L(2U_y W_{xy} + 2V_y W_{yy} + W_{yy})] \right\} + \\ & + \frac{\partial^2}{\partial y^2} \left\{ -\frac{h^3}{12} [N(2U_y W_{xy} + 2V_y W_{yy} + W_{yy}) + L(2U_x U_{xx} + 2V_x W_{xy} + W_{xx})] \right\} + \\ & + 2 \frac{\partial^2}{\partial x \partial y} \left\{ -\frac{h^2}{12} K(2W_{xy} + U_x W_{xy} + U_y W_{xx} + V_x W_{yy} + V_y W_{xy}) \right\} + \\ & + \frac{1}{R} \left\{ N[V_y + \frac{1}{2}(U_y^2 + V_y^2 + W_y^2)] + \frac{h^3}{24} (W_{xy}^2 + W_{yy}^2) \right\} + \\ & + L[U_x + \frac{1}{2}(U_x^2 + V_x^2 + W_x^2)] + \frac{h^3}{24} (W_{xx}^2 + W_{xy}^2) \} = 0. \end{aligned}$$

Сохраним слагаемые первого и второго порядка малости, получим систему уравнений движения оболочки:

$$\begin{aligned} & \frac{\partial}{\partial x} \left\{ N[d + \frac{h^2}{24} (W_{xx}^2 + W_{xy}^2)] + L[b + \frac{h^2}{24} (W_{xy}^2 + W_{yy}^2)] \right\} + \\ & + \frac{\partial}{\partial y} \left\{ K[c + \frac{h^2}{12} (W_{xx} W_{xy} + W_{xy} W_{yy})] \right\} - \rho \frac{\partial^2 U}{\partial t^2} = 0; \end{aligned} \tag{4}$$

$$\begin{aligned} & \frac{\partial}{\partial x} \left\{ K[c + \frac{h^2}{12} (W_{xx} W_{xy} + W_{xy} W_{yy})] \right\} + \frac{\partial}{\partial y} \left\{ N[b + \frac{h^2}{24} (W_{xy}^2 + W_{yy}^2)] + L[d + \frac{h^2}{24} (W_{xx}^2 + W_{xy}^2)] \right\} - \rho \frac{\partial^2 V}{\partial t^2} = 0; \end{aligned} \tag{5}$$

$$\begin{aligned} & \frac{\partial^2}{\partial x^2} \left\{ -\frac{h^2}{12} (Nm + Ln) \right\} + \frac{\partial^2}{\partial y^2} \left\{ -\frac{h^3}{12} (Nn + Lm) \right\} + \\ & + 2 \frac{\partial^2}{\partial x \partial y} \left\{ -\frac{h^2}{12} Kq \right\} + \frac{1}{R} \left\{ N[b + \frac{h^2}{24} (W_{xy}^2 + W_{yy}^2)] + L[d + \frac{h^2}{24} (W_{xx}^2 + W_{xy}^2)] \right\} + \\ & + \frac{\partial}{\partial x} \left\{ [N[d + \frac{h^2}{24} (W_{xx}^2 + W_{xy}^2)] + L[b + \frac{h^2}{24} (W_{xy}^2 + W_{yy}^2)]] \right\} + \frac{\partial}{\partial y} \left\{ [K[c + \frac{h^2}{12} (W_{xx} W_{xy} + W_{xy} W_{yy})]] \right\} - \rho \frac{\partial^2 W}{\partial t^2} = 0; \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
 & + \frac{h^2}{24} (W_{xy}^2 + W_{yy}^2)]] W_x + [K[c + \frac{h^2}{12} (W_{xx} W_{xy} + W_{xy} W_{yy})]] W_y \} + \\
 & + \frac{\partial}{\partial y} \{ [K[c + \frac{h^2}{12} (W_{xx} W_{xy} + W_{xy} W_{yy})]] W_x +
 \end{aligned}$$

(6)

$$+ [N[b + \frac{h^2}{24} (W_{xy}^2 + W_{yy}^2)] + L[d + \frac{h^2}{24} (W_{xx}^2 + W_{xy}^2)]] \} - \rho \frac{\partial^2 W}{\partial t^2} = 0.$$

Система нелинейных (4) – (6) описывает продольные деформационные волны в геометрически нелинейной вязкоупругой цилиндрической оболочке.

Упростим систему асимптотическими методами, сводя ее исследование к анализу эволюционных уравнений. Приведем (4) – (6) к безразмерным переменным

$$U = AU^*; \quad V = AV^*; \quad W = hW^*; \quad x = Lx^*; \quad y = Ry^*,$$

где A – амплитудная характеристика волны, R – радиус кривизны оболочки, L – длина волны.

Пусть толщина оболочки h мала по сравнению с R . Введем малые безразмерные параметры:

$$\epsilon = \frac{A}{L}; \quad \delta_1 = \frac{\sqrt{hR}}{L}; \quad \delta_2 = \frac{h}{R}; \quad \delta_3 = \frac{A}{R}.$$

Положим δ_1, δ_2 эквивалентными малому параметру ϵ , тогда параметр δ_3 будет эквивалентен $\sqrt{\epsilon}$. Воспользуемся заменой переменных

$$\xi = x^* - \frac{c_1}{L} t; \quad \eta = \epsilon y^*; \quad \tau = \epsilon \frac{c_1}{L} t,$$

считая c_1 неизвестной величиной.

Используем асимптотическое разложение для функций U^*, V^*, W^* , отбрасывая звездочки:

$$U = U_0 + \varepsilon U_1 + \dots; \quad V = \sqrt{\varepsilon}(V_0 + \varepsilon V_1 + \dots);$$

$$W = W_0 + \varepsilon W_1 + \dots .$$

Пусть параметр $\frac{\alpha c_1}{\beta^2 L}$ эквивалентен ε , тогда в нулевом приближении имеем систему уравнений:

$$E\left(\frac{\alpha_1}{6} - v\right) \frac{h}{R\varepsilon} W_{0\xi} = 0;$$

(7)

$$\left[\frac{1}{2}E(1-v-\alpha_1) - \rho(1-v^2)c_1^2\right]V_{0\xi\xi} + E\left[\frac{A}{\sqrt{\varepsilon}R}\left(\frac{1+v}{2} - \frac{\alpha_1}{3}\right)U_{0\xi\eta} + \frac{hL}{R^2\sqrt{\varepsilon}}\left(\frac{\alpha_1}{3} - 1\right)W_{0\eta}\right] = 0;$$

(8)

$$\frac{h}{R\varepsilon} W_0 = v_1 U_{0\xi},$$

(9)

где

$$\alpha_1 = \frac{\alpha}{\beta(1+v)}; \quad v_1 = \frac{3}{2} \frac{2v - \alpha_1}{3 - \alpha_1}.$$

С учетом (9) из (7) определяем скорость волны:

$$c_1 = \sqrt{\frac{E}{\rho} \frac{\alpha_2}{(1-v^2)}},$$

(10)

здесь
$$\alpha_2 = 1 - \frac{\alpha_1}{3} + \frac{3}{2} \left(\frac{\alpha_1}{6} - v\right) \frac{2v - \alpha_1}{3 - \alpha_1}.$$

Скорость c_1 действительна при $\alpha_2 > 0$, т. е. должно выполняться неравенство. Оно имеет место, если $\alpha_1 > 12(1-v) + 6\sqrt{(1-v)(3-5v)}$, что определяется выбором физических параметров α, β, v .

Их первого приближения следует:

$$v_1\left(v - \frac{\alpha_1}{6}\right)U_{1\xi\xi} - \frac{h}{R\varepsilon}\left(v - \frac{\alpha_1}{6}\right)W_{1\xi\xi} + \frac{LA}{2R^2}\left(1 - v - \frac{\alpha_1}{2}\right)U_{0\eta\eta} + \frac{A}{2R\sqrt{\varepsilon}}\left(1 + v - \right.$$

$$-\frac{\alpha_1}{3}V_{0\xi\eta} + (1-\frac{\alpha_1}{3})U_{0\xi}U_{0\xi\xi} + \frac{\alpha_1c_1}{2\beta L\epsilon}(\frac{2}{3}-\frac{hv_1}{3R\epsilon})U_{0\xi\xi\xi} +$$

$$+\frac{2\rho(1-v^2)c_1^2}{E}U_{0\xi\tau} = 0;$$

(11)

$$\frac{Al}{R^2}(1-\frac{\alpha_1}{3})V_{0\eta\eta} + \frac{1}{2}(1-v-\alpha_1-\alpha_2)V_{1\xi\xi} + \frac{A}{\sqrt{\epsilon}R}(\frac{1+v}{2}-\frac{\alpha_1}{3})U_{1\xi\eta} +$$

$$+\frac{hl}{R^2\sqrt{\epsilon}}(\frac{\alpha_1}{3}-1)W_{1\eta} + \frac{\alpha_1c_1}{2\beta\epsilon L}(V_{0\xi\xi\xi} + \frac{2A}{3R\sqrt{\epsilon}}U_{0\xi\xi\eta} - \frac{2}{3}\frac{hl}{R^2\sqrt{\epsilon}}W_{0\xi\eta}) -$$

$$-\frac{\rho(1-v^2)}{E}V_{1\xi\xi} + \frac{2\rho(1-v^2)}{E}V_{0\xi\tau} = 0;$$

(12)

$$v_1U_{1\xi} - \frac{h}{R\epsilon}W_1 + (1 + \frac{2}{3}\frac{A}{R\sqrt{\epsilon}}\frac{\alpha_1}{2})V_{0\eta} + (\frac{v}{2} - \frac{\alpha_1}{12})U_{0\xi}^2 + \frac{\rho(1-v^2)c_1^2Rh}{EL^2\epsilon^2}W_{0\xi\xi} +$$

$$+\frac{\alpha_1c_1}{2\beta\epsilon L}(\frac{2}{3}\frac{h}{R\epsilon}W_{0\xi} + \frac{1}{3}U_{0\xi\xi}) = 0.$$

(13)

Умножим (11) на $(v - \frac{\alpha_1}{6})$, затем дифференцируем его по ξ , учитывая

равенство $V_{0\xi} = \frac{U_{0\eta}}{A_2}$, в котором

$$A_2 = \frac{\alpha_2 - \frac{1}{2}(1-v-\alpha_1)}{\frac{A}{\sqrt{\epsilon}R}(\frac{1+v}{2}-\frac{\alpha_1}{3}) + \frac{l\sqrt{\epsilon}v_1}{R}(\frac{\alpha_1}{3}-1)}.$$

Вычтем из полученного выражения равенство (9) и обозначим $U_{0\xi} = \psi$, получим эволюционное уравнение волн деформации в оболочке:

$$[\psi_\tau + b_1\psi\psi_\xi + b_2\psi_{\xi\xi\xi} + b_3\psi_{\xi\xi}]_\xi = -b_4\psi_{\eta\eta},$$

(14)

здесь

$$b_1 = \frac{1}{2\alpha_2}[1 - \frac{\alpha_1}{3} - (v - \frac{\alpha_1}{6})^2]; \quad b_2 = \frac{Rhv_1}{2L^2\epsilon^2}(\frac{\alpha_1}{6} - v);$$

$$b_3 = \frac{\alpha_1 c_1}{4\alpha_2 \beta \epsilon L} \left[\left(\frac{\alpha_1}{6} - v \right) \left(\frac{2hv_1}{3R\epsilon} + \frac{1}{3} \right) + \frac{2}{3} - \frac{hv_1}{3R\epsilon} \right];$$

$$b_4 = \frac{1}{A_2} \left(v - \frac{\alpha_1}{6} \right) \left(1 + \frac{A\alpha_1}{3R\sqrt{\epsilon}} \right) - \frac{LA}{2R^2} \left(1 - v - \frac{\alpha_1}{2} \right) - \frac{A(1+v-\frac{\alpha_1}{3})}{4R\alpha_2 A_2 \sqrt{\epsilon}}.$$

Построим точное решение уравнения (14), используя представление

$$\psi = \frac{\Psi_0}{F} + \psi_1,$$

(15)

где Ψ_0, ψ_1, F – неизвестные функции.

Учитывая (15) в уравнении (14), получим точное решение

$$\psi = 12 \frac{b_2}{b_1} \frac{\partial^2}{\partial x^2} (\ln F) + \frac{12 b_3}{5 b_1} \frac{\partial}{\partial x} (\ln F) + \psi_1.$$

(16)

Функцию ψ_1 , удовлетворяющая уравнению (14), задается формулой:

$$\psi_1 = -4 \frac{b_2}{b_1} \frac{F_{xxx}}{F_x} + 3 \frac{b_2}{b_1} \frac{F_{xx}^2}{F_x^2} - \frac{6 b_3}{5 b_1} \frac{F_{xx}}{F_x} + \frac{1}{25} \frac{b_3^2}{b_1 b_2} - \frac{F}{b_1 F_x}.$$

(17)

Подстановка в (16) функции $F = 1 + e^{\frac{2(k_1 \xi + k_2 \eta - \omega \tau)}{n}}$ приводит точное решение уравнения (14) к виду

$$\psi = \frac{48b_2}{b_1} \frac{k_1^2}{n^2} \left[1 - \text{th}^2 \left(\frac{k_1 \xi + k_2 \eta - \omega \tau}{n} \right) \right] + \frac{12 b_3}{5 b_1} \frac{k_1}{n} \left[1 + \text{th} \left(\frac{k_1 \xi + k_2 \eta - \omega \tau}{n} \right) \right]$$

(18)

где k_2 – произвольный параметр и выполняются равенства

$$100k_1^2 = \frac{b_3^2}{b_2^2} n^2; \quad n \in \mathbb{Z}; \quad \omega = \frac{4}{n^2} b_2 k_1^3 + \frac{12}{5} \frac{b_3}{n} k_1^2 - \frac{1}{25} \cdot \frac{b_3^2}{b_2} k_1 + b_4 \frac{k_2^2}{k_1}.$$

Преобразуем точное решение к виду

$$\psi = -\frac{48b_2}{b_1} \frac{k_1^2}{n^2} \operatorname{th}^2 \left[\frac{(k_1 \xi + k_2 \eta - \omega \tau)}{n} \right] + \frac{12}{5} \frac{b_3}{b_1} \frac{k_1}{n} \operatorname{th} \left[\frac{(k_1 \xi + k_2 \eta - \omega \tau)}{n} \right] + \frac{48b_2 k_1^2}{b_1 n^2} + \frac{12b_3 k_1}{5b_1 n},$$

где

$$k_1 = \pm \frac{n}{2} \cdot \frac{b_3}{5b_2}; \quad \omega = \frac{3nb_3^3}{125b_2^2} \pm \frac{10b_4 b_2 k_2^2}{nb_3}.$$

(10)

Установим, при каких условиях точное решение является волной растяжения $\psi > 0$.

1) При разных знаках b_2, b_3 в формуле (19) необходимо сохранить знак

«+», тогда $k_1 = \frac{n}{2} \cdot \frac{b_3}{5b_2} < 0$.

Из условия $\psi > 0$ получаем $\frac{b_3 k_1}{b_1 n} > 0$, отсюда вытекает, что b_1, b_3

имеют разные знаки. Из неравенства $\frac{b_3}{b_1 n} \left(\frac{n}{2} \frac{b_3}{5b_2} \right) = \frac{1}{25} \frac{b_3^2}{b_1 b_2} > 0$ следует,

что

$b_1, b_2 > 0$, т.е. b_1, b_2 имеют одинаковый знак.

Если параметры α, β, ν таковы, что b_1, b_2 – одного знака, а b_1, b_3 – разных, то при знаке «+» ($k_1 < 0$) в (19) точное решение эволюционного уравнения имеет вид ударно-волновой структуры.

2) Выберем знак «-» у коэффициентов b_2, b_3 в (19), тогда

$k_1 = -\frac{n}{2} \cdot \frac{b_3}{5b_2} < 0$. Согласно $\psi > 0$ имеем $\frac{b_3 k_1}{b_1 n} > 0$, т.е. величины b_1, b_3

имеют разные знаки. Из неравенства $\frac{b_3}{b_1 n} \left(-\frac{n}{2} \frac{b_3}{5b_2}\right) = -\frac{1}{2} \frac{b_3^2}{5b_1 b_2} > 0$

следует, что $b_1, b_2 < 0$, тогда параметры b_1, b_2 имеют разные знаки.

А итоге точное решение уравнения (14) задает ударно-волновую структуру, если параметры b_1, b_2 – разные по знаку, а b_2, b_3 – одного знака, а в (19) сохранен знак « \leftarrow » ($k_1 < 0$).

Ударная волна деформации растяжения возникает в цилиндрической оболочке с реологическими свойствами, когда $b_1 > 0, b_2 > 0, b_3 < 0$. В соответствии с последним неравенством имеем

$$\left(\frac{\alpha_1}{6} - \nu\right) \left(\frac{2h\nu_1}{3R\varepsilon} + \frac{1}{3}\right) + \frac{2}{3} - \frac{h\nu_1}{3R\varepsilon} < 0.$$

(20)

Обозначая в (20) $N = \frac{h}{3R\varepsilon}$ и выполняя преобразования получаем

неравенство

$$(3N + 1)\alpha_1^2 - (24N\nu + 9n + 6\nu - 9)\alpha_1 - 18[2 - \nu - N\nu(2\nu + 1)] > 0.$$

(21)

Вычислим дискриминант (21) относительно переменной α_1 :

$$D = (144\nu^2 + 216\nu + 81)N^2 + (144\nu^2 - 612\nu + 270)N + (36\nu^2 - 180\nu + 225).$$

Он будет положительным при выполнении неравенства

$$(144\nu^2 + 216\nu + 81)N^2 + (144\nu^2 - 612\nu + 270)N + (36\nu^2 - 180\nu + 225) > 0$$

.

Дискриминант предыдущего неравенства по N

$$D_1 = -80v(4v^2 - 18v + 18)$$

В итоге $D_1 < 0$ для любых величин коэффициента Пуассона $v \in (0, \frac{1}{2})$.

Значит дискриминант D левой части неравенства относительно переменной α_1 положителен при любых значениях v в пределах $0 < v < \frac{1}{2}$.

Если параметры α , β , v таковы, что имеет место одно из неравенств $\alpha_1 < c_1$ или $\alpha_2 > c_2$, а c_1, c_2 – корни квадратного трехчлена в (21), то выполняется соотношение (20), при котором решение уравнения (14) описывается ударной волной растяжения.

В размерных переменных

$$\varphi = k_1\xi + k_2\eta - \omega\tau = \frac{k_1}{L} \left(x + \frac{k_2 y}{k_1} \sqrt{\varepsilon} - ct - \frac{\omega}{k_1} \varepsilon ct \right),$$

тогда $\frac{\omega}{k_1} \varepsilon$ является поправкой к скорости волны.

Для повышения надежности проектируемых трубопроводных сооружений совершенствованием акустических методов диагностики микродефектов материала построены новые математические модели нелинейной волновой динамики вязкоупругих цилиндрических оболочек.

Получены уточненные зависимости между геометрическими, физическими и волновыми параметрами процесса деформирования. На их основе определены более строгие значения скорости продольной волны деформации в оболочке, которые позволяют повысить точность выявления невидимых микродефектов материала. В итоге не допускается использование в практике строительства дефектных изделий, т.е. повышается надежность сооружаемых трубопроводов.

Установлено, что компенсация эффектов нелинейности, дисперсии и

диссипации формирует в оболочках продольные уединенные волны деформаций, скорость которых растет с увеличением амплитуды волны, т. е. нелинейность волнового процесса имеет существенное влияние, пренебрежение которым влечет значительные ошибки. Линейные модели не дают возможности даже качественно выявить этот эффект.

Список литературы

1. Аршинов Г. А. Продольные нелинейные волны в вязкоупругих стержнях, пластинах и цилиндрических оболочках / Г. А. Аршинов // Политематический сетевой электронный научный журнал Кубанского государственного аграрного университета (Научный журнал КубГАУ) [Электронный ресурс]. – Краснодар: КубГАУ, 2003. – №02(002). С. 1–15. – IDA [article ID]: 0020302001. – Режим доступа: <http://ej.kubagro.ru/2003/02/pdf/01.pdf>, 0,938 у.п.л.

2. Аршинов Г. А. Нелинейные уединенные ударно-волновые структуры в вязкоупругих стержнях / Г. А. Аршинов, В. Н. Лаптев, Н.И. Елисеев // Политематический сетевой электронный научный журнал Кубанского государственного аграрного университета (Научный журнал КубГАУ) [Электронный ресурс]. – Краснодар: КубГАУ, 2003. – № 02(002). С. 42–51. – IDA [article ID]: 0020302006. – Режим доступа: <http://ej.kubagro.ru/2003/02/pdf/06.pdf>, 0,625 у.п.л.

3. Аршинов Г. А. Оценка экономической и эксплуатационной надежности строительных сооружений на основе исследования волновых характеристик нелинейных вязкоупругих стержневых элементов конструкций / Г. А. Аршинов, С. В. Лаптев // Политематический сетевой электронный научный журнал Кубанского государственного аграрного университета. – Краснодар : КубГАУ, 2019. – № 153. – С. 113–122.

4. Аршинов Г. А. Совершенствование акустических методов диагностики скрытых микродефектов и эксплуатационная надежность вязкоупругих элементов конструкций / Г. А. Аршинов, С. В. Лаптев // Политематический сетевой электронный научный журнал Кубанского государственного аграрного университета. – Краснодар : КубГАУ, 2019. – № 154. – С. 84–93.

References

1. Arshinov G. A. Prodol'nye nelinejnye volny v vjaskouprugih sterzhnjah, plastinah i cilindricheskikh obolochkah / G. A. Arshinov // Politematicheskij setevoj jelektronnyj nauchnyj zhurnal Kubanskogo gosudarstvennogo agrarnogo universiteta (Nauchnyj zhurnal KubGAU) [Jelektronnyj resurs]. – Krasnodar: KubGAU, 2003. – №02(002). S. 1–15. – IDA [article ID]: 0020302001. – Rezhim dostupa: <http://ej.kubagro.ru/2003/02/pdf/01.pdf>, 0,938 u.p.l.

2. Arshinov G. A. Nelinejnye uedinennye udarno-volnovye struktury v vjaskouprugih sterzhnjah / G. A. Arshinov, V. N. Laptev, N.I. Eliseev // Politematicheskij setevoj jelektronnyj nauchnyj zhurnal Kubanskogo gosudarstvennogo agrarnogo universiteta (Nauchnyj zhurnal KubGAU) [Jelektronnyj resurs]. – Krasnodar: KubGAU, 2003. – №

02(002). S. 42–51. – IDA [article ID]: 0020302006. – Rezhim dostupa: <http://ej.kubagro.ru/2003/02/pdf/06.pdf>, 0,625 u.p.l.

3. Arshinov G. A. Ocenka jekonomicheskoy i jekspluacionnoj nadezhnosti stroitel'nyh sooruzhenij na osnove issledovanija volnovyh harakteristik nelinejnyh vjazkouprugih sterzhnevyyh jelementov konstrukcij / G. A. Arshinov, S. V. Laptev // Politematicheskij setevoj jelektronnyj nauchnyj zhurnal Kubanskogo gosudarstvennogo agrarnogo universiteta. – Krasnodar : KubGAU, 2019. – № 153. – S. 113–122.

4. Arshinov G. A. Sovershenstvovanie akusticheskikh metodov diagnostiki skrytyh mikrodefektov i jekspluacionnaja nadezhnost' vjazkouprugih jelementov konstrukcij / G. A. Arshinov, S. V. Laptev // Politematicheskij setevoj jelektronnyj nauchnyj zhurnal Kubanskogo gosudarstvennogo agrarnogo universiteta. – Krasnodar : KubGAU, 2019. – № 154. – S. 84–93.