

УДК 537.2

UDC 537.2

01.00.00 Физико-математические науки

Physics and Math

МОДЕЛИРОВАНИЕ СТУПЕНЧАТОГО ЛИДЕРА МОЛНИИ**SIMULATION OF A STEPPED LIGHTNING LEADER**

Трунев Александр Петрович
к.ф.-м.н., Ph.D.
Директор, A&E Trounev IT Consulting, Торонто, Канада

Alexander Trunev
Cand.Phys.-Math.Sci., Ph.D.
Director, A&E Trounev IT Consulting, Toronto, Canada

В настоящей работе развита модель, описывающая формирование ступенчатого лидера молнии в проводящей среде. Для описания вклада токов проводимости мы модифицировали стандартное уравнение электростатики с учетом вихревой составляющей электрического поля. В результате такого обобщения сформулирована система нелинейных уравнений параболического типа, описывающая формирование стримеров и канала молнии. Численное моделирование распространения волн ионизации в области с отношением размеров 1/100, 1/200 позволяет выявить два типа ступенчатых лидеров в форме волн уплотнения и разрежения соответственно. Ранее было установлено, что существует три механизма ветвления стримера. Первый механизм связан с неустойчивостью фронта, что приводит к разделению головки стримера на две части. Второй механизм связан с неустойчивостью стримера в области основания, что приводит к ветвлению стримера с образованием большого числа боковых стримеров, замыкающих основной канал стримера на катод. В численных экспериментах обнаружен третий механизм ветвления, наблюдавшийся в опытах, связанный с замыканием объемного заряда на анод через систему стримеров. Указанные механизмы ветвления выявляются и при распространении лидера. Полученные результаты, а также данные численных экспериментов подтверждают гипотезу об универсальности минимальной модели стримера, а также ее расширения в форме, предложенной автором. Известные явления природы, связанные с электрическим разрядом – стример, плазмод, шаровая молния и ступенчатый лидер могут быть описаны в рамках минимальной модели

In this work, a model is developed that describes the formation of a stepped lightning leader in a conducting medium. To describe the contribution of the conductivity currents, we modified the standard electrostatic equation taking into account the vortex component of the electric field. As a result of this generalization, a system of parabolic-type nonlinear equations is formulated that describes the formation of streamers and the lightning channel. Numerical simulation of the propagation of ionization waves in a region with a ratio of 1/100, 1/200 allows us to identify two types of stepped streamers in the form of waves of compression and rarefaction, respectively. It was previously established that there are three streamer branching mechanisms. The first mechanism is related to the instability of the front, which leads to the separation of the head of the streamer into two parts. The second mechanism is associated with the instability of the streamer in the base region, which leads to the branching of the streamer with the formation of a large number of lateral streamers closing the main channel of the streamer to the cathode. In numerical experiments, the third branching mechanism observed in experiments connected with closing the space charge to the anode through the streamer system was observed. These branching mechanisms are also revealed when the leader is propagated. The obtained results, as well as the data of numerical experiments confirm the hypothesis of the universality of the minimal model of the streamer, as well as its expansion in the form proposed by the author. Known phenomena of nature associated with the electrical discharge - streamer, plasmoid, ball lightning and stepped leader can be described within the framework of the minimal model

Ключевые слова: ЭЛЕКТРИЧЕСКОЕ ПОЛЕ, СТРИМЕР, РАЗРЯД, ВЕТВЛЕНИЕ, ИОНИЗАЦИЯ, СТУПЕНЧАТЫЙ ЛИДЕР, МОЛНИЯ, ПЛАЗМОИД, МАТЕМАТИЧЕСКОЕ МОДЕЛИРОВАНИЕ

Keywords: ELECTRIC FIELD, STREAMER, PLASMOID, DISCHARGE, BRANCHING, IONIZATION, MATHEMATICAL MODELING, STEPPED LEADER

Doi: 10.21515/1990-4665-131-063

Введение

Развитие атмосферного разряда молнии облако-земля с образованием ступенчатого стримера исследовалось в работах [1-8] и других. Механизм и элементарная модель этого явления обсуждаются в [9-10]. Из общих соображений ясно, что стример [11-19] и лидер должны описываться однотипной моделью вытекающей из уравнений Максвелла. В работах [20-22] рассматривается общая модель шаровой молнии, плазмоида и стримера с учетом индуцированных вихревых полей, обусловленных токами проводимости. Плазмод в модели [21-22] рассматривается как долгоживущий стример, а шаровая молния как разновидность плазмоида. В численных расчетах было установлено три механизма ветвления стримера, один из которых связан с разделением головки стримера на две части, второй механизм связан с замыканием основного канала стримера на катод через систему боковых стримеров, третий механизм связан с ветвлением основания плазмоида и с замыканием боковых стримеров на анод.

В настоящей работе в рамках модели [20-22] численно исследована задача о формировании ступенчатого лидера молнии. Моделирование распространения волн ионизации в области с отношением размеров 1/100, 1/200 позволяет выявить два типа ступенчатых лидеров в форме волн уплотнения и разрежения соответственно.

Модель распространения и ветвления стримера в проводящей среде

Стримеры относятся к числу макроскопических наблюдаемых явлений, которые могут быть зарегистрированы в экспериментах с газовыми разрядами, включая атмосферные разряды [1-8]. Обычно наблюдаются стримеры, вызванные распространением электронов в нейтральной среде, которая подвержена ионизации. Типичные физические процессы,

описываемые в моделях стримеров – это ионизация, диффузия и движение зарядов в электрическом поле [11-22].

Предполагается, что высоковольтный разряд относится к электростатическим явлениям, следовательно, генерируемые электрические поля являются потенциальными [11-19]. В тоже время сам разряд является быстропротекающим процессом, что указывает на наличие вихревых полей [20-22]. Рассмотрим распространение стримера в газовой среде в однородном электрическом поле. Используем стандартную модель стримера в газовых разрядах [11-19], которую модифицируем с учетом диффузии электрического поля и ионов, имеем [20-22]

$$\begin{aligned}\frac{\partial \rho_e}{\partial t} &= D_e \nabla^2 \rho_e + \nabla \cdot (\rho_e \mathbf{E}) + \rho_e |\mathbf{E}| \exp(-1/|\mathbf{E}|) \\ \frac{\partial \rho_i}{\partial t} &= D_i \nabla^2 \rho_i + k_i \nabla \cdot (\rho_i \mathbf{E}) + \rho_e |\mathbf{E}| \exp(-1/|\mathbf{E}|) \\ \frac{\partial \mathbf{E}}{\partial t} &= D_E (\nabla^2 \mathbf{E} + \nabla \rho_e - \nabla \rho_i)\end{aligned}\quad (1)$$

Здесь обозначено $\rho_e, \rho_i, \mathbf{E}$ – плотность электронов, ионов и электрического поля соответственно, D_e, D_i, D_E – коэффициенты диффузии, k_i – параметр подвижности ионов. В качестве параметра длины в модели (1) используется длина свободного пробега электронов в азоте при нормальном давлении – $L_s \approx 2.3 \cdot 10^{-6} m$ (2.3 мкм). Масштаб времени составляет 3 пикосекунды, масштаб электрического поля – $E_s = 200 kV / cm$, характерный масштаб скорости $u_s = 0.76667 \cdot 10^3$ км/с [16].

Поясним происхождение третьего уравнения (3). Выражение в скобках в случае электростатического поля тождественно обращается в ноль. Однако при наличии вихревой составляющей поля в случае длинных волн, из

уравнений Максвелла и закона Ома $\mathbf{j} = \sigma \mathbf{E} = -\sigma \nabla \mathbf{A} / \partial t$ следует уравнение диффузии векторного потенциала

$$\sigma \mu \frac{\partial \mathbf{A}}{\partial t} = \nabla^2 \mathbf{A} \quad (2)$$

Сравнивая (2) с третьим уравнением (1), находим $D_E = 1 / \sigma \mu$.

Модель (1) тестировалась на плоских и трехмерных задачах моделирования стримеров Саффмана-Тейлора [16, 23] в однородном электрическом поле [20-22].

Задача для системы (1) решалась численно, в прямоугольной области $-L_x \leq x \leq L_x, -L_y \leq y \leq L_y, -L_z \leq z \leq L_z$, с нулевыми начальными данными и с граничными условиями:

$$\begin{aligned} E_x(t, -L_x, y, z) = E_x(t, L_x, y, z) = E_0(1 - e^{-at}), E_y(t, -L_x, y, z) = E_y(t, L_x, y, z) = 0, \\ E_z(t, -L_x, y, z) = E_z(t, L_x, y, z) = 0, E_x(t, x, -L_y, z) = E_x(t, x, L_y, z) = E_0(1 - e^{-at}), \\ E_y(t, x, -L_y, z) = E_y(t, x, L_y, z) = 0, E_z(t, x, -L_y, z) = E_z(t, x, L_y, z) = 0, \\ E_x(t, x, y, -L_z) = E_x(t, x, y, L_z) = E_0, E_y(t, x, y, -L_z) = E_y(t, x, y, L_z) = 0, \\ E_z(t, x, y, -L_z) = E_z(t, x, y, L_z) = 0, \rho_e(t, -L_x, y, z) = \rho_i(t, -L_x, y, z) = 0, \\ \rho_e(t, L_x, y, z) = \rho_i(t, L_x, y, z) = S \exp[-b(y^2 + z^2)](1 - e^{-at}), \\ \rho_e(t, x, \pm L_y, z) = \rho_i(t, x, \pm L_y, z) = 0, \rho_e(t, x, y, \pm L_z) = \rho_i(t, x, y, \pm L_z) = 0, \end{aligned} \quad (3)$$

В случае решения плоской задачи полагаем в условиях (3) $z = 0, E_z = 0$ и исключаем граничные условия при $z = \pm L_z$.

Основные результаты расчетов электронной плотности по модели (1), (3) были получены при следующих параметрах задачи:

$$\begin{aligned} a = 1, D_e = 0.1, D_i = 0.001, D_E = 1000, k_i = 0, L_y = L_z = 100, \\ E_0 = 0.1 \div 0.5, S = 10^{-4} \div 10^{-3}, b = 0.015 \div 0.15, L_x = 10^2 \div 10^3. \end{aligned} \quad (4)$$

Из полученных результатов [20-22] следует, что распределение плотности электронов в 2D и 3D моделях отличается несущественно, что объясняется специфической геометрией стримера Саффмана-Тейлора.

Линия раздела плотности в теории [23] описывается уравнением:

$$\frac{x + ut}{L_y} = \frac{1 - \lambda}{\pi} \ln \frac{1}{2} \left(1 + \cos \frac{\pi y}{\lambda L_y} \right) \quad (5)$$

Как было установлено в экспериментах [23], параметр $\lambda = 1/2$, хотя в теории стримеров этот параметр может принимать любое значение в зависимости от скорости $u = E_0 / \lambda$ [16, 20-22].

Геометрия стримера в модели (1) не совпадает в деталях с геометрией стримера Саффмана-Тейлора [23], хотя при некоторых значениях параметров наблюдается практически идеальное совпадение кривой (5) с линиями уровня плотности электронов – левый рис. 1.

Рассмотрим аналитическую модель распространения стримера в заданном внешнем поле. Положим в уравнениях (1) все величины зависящими от переменных $\xi = x + ut, y, z$, тогда система (1) приводится к виду

$$\begin{aligned} u \frac{\partial \rho_e}{\partial \xi} &= D_e \nabla^2 \rho_e + \nabla \cdot (\rho_e \mathbf{E}) + \rho_e |\mathbf{E}| \exp(-1/|\mathbf{E}|) \\ u \frac{\partial \rho_i}{\partial \xi} &= D_i \nabla^2 \rho_i + k_i \nabla \cdot (\rho_i \mathbf{E}) + \rho_i |\mathbf{E}| \exp(-1/|\mathbf{E}|) \\ u \frac{\partial \mathbf{E}}{\partial \xi} &= D_E (\nabla^2 \mathbf{E} + \nabla \rho_e - \nabla \rho_i) \end{aligned} \quad (6)$$

Здесь оператор $\nabla = (\partial/\partial \xi, \partial/\partial y, \partial/\partial z)$. Стример Саффмана-Тейлора это плоское линейное решение первого уравнения (6). Полагая в этом уравнении электрическое поле постоянным $\mathbf{E} = (E_0, 0, 0)$, ищем решение в виде

$$\rho_e = \rho_0 \exp(k_x \xi) \cos(k_y y) \quad (7)$$

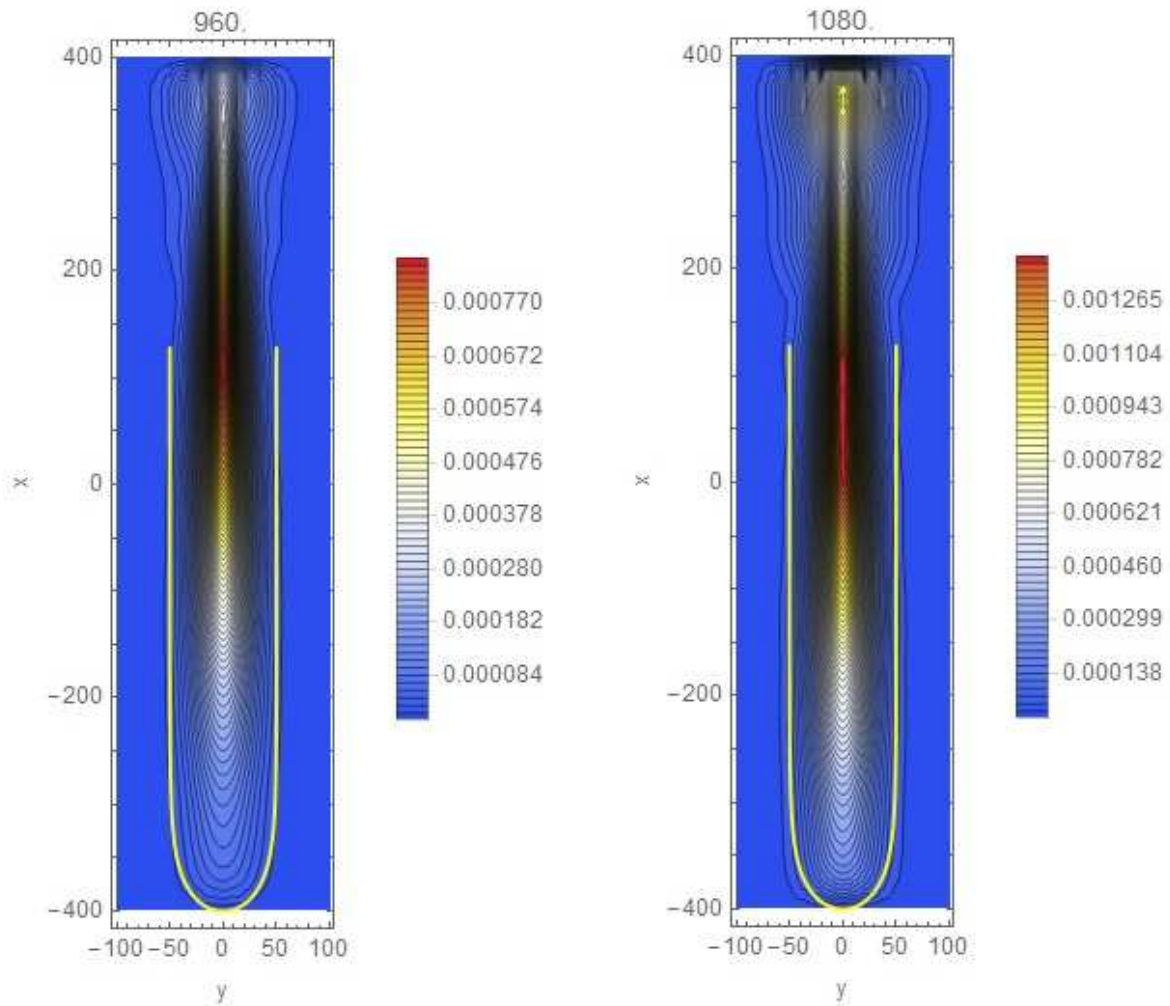


Рис. 1. Линии уровня плотности электронов при распространении стримера в длинном канале во внешнем поле $E_0 = 0.25$, вычисленные в 3D модели в моменты времени $t = 960; 1080$ – левый и правый рисунки соответственно. Желтая линия вычислена по уравнению (5) с параметром $\lambda = 0.5$.

Подставляя (7) в первое уравнение (6), находим дисперсионное соотношение

$$k_x u = D_e (k_y^2 + k_x^2) + k_x E_0 + |E_0| \exp(-1/|E_0|) \quad (8)$$

Предполагая, что линия раздела электронной плотности определяется из уравнения $\rho_e = \rho_0$, находим из первого уравнения путем логарифмирования уравнение линии раздела плотности

$$x + ut = -\frac{\ln \cos(k_y y)}{k_x} \quad (9)$$

Из уравнения (8) следует, что скорость стримера зависит от параметра диффузии и от скорости ионизации. Ранее аналогичные результаты были получены в работе [16], в которой модель стримера Саффмана-Тейлора [23] была использована для нахождения режимов движения с постоянной скоростью и ветвления в 2D. В работе [20] аналогичная задача была решена в трехмерном случае.

Рассмотрим стример как бегущую с постоянной скоростью волну. Положим в уравнениях (1) все величины зависящими от переменных $\xi = x + ut, y, z$, тогда справедлива система уравнений (6). Для решения системы уравнений (6) используем теорию пограничного слоя. Будем считать, что изменение параметров по сечению стримера значительно превосходит изменение параметров вдоль направления его распространения. Это условие заведомо не выполняется на головке стримера. В остальной же области для описания стримера имеем систему уравнений параболического типа

$$\begin{aligned} u \frac{\partial \rho_e}{\partial \xi} &= D_e \nabla_{\perp}^2 \rho_e + \nabla \cdot (\rho_e \mathbf{E}) + \rho_e |\mathbf{E}| \exp(-1/|\mathbf{E}|) \\ u \frac{\partial \rho_i}{\partial \xi} &= D_i \nabla_{\perp}^2 \rho_i + k_i \nabla \cdot (\rho_i \mathbf{E}) + \rho_e |\mathbf{E}| \exp(-1/|\mathbf{E}|) \\ u \frac{\partial \mathbf{E}}{\partial \xi} &= D_E (\nabla_{\perp}^2 \mathbf{E} + \nabla \rho_e - \nabla \rho_i) \end{aligned} \quad (10)$$

Здесь операторы $\nabla = (\partial/\partial \xi, \partial/\partial y, \partial/\partial z)$, $\nabla_{\perp}^2 = (\partial^2/\partial y^2, \partial^2/\partial z^2)$. В рамках модели (10) может быть поставлена и решена задача о ветвлении

стримера в трехмерном случае. Для этого предположим, что в плоскости $z = 0$ в интервале $0 \leq \xi \leq \xi_b$ задано распределение плотности электронов вида (7), а в плоскости $\xi = 0$ задано совместное с ним распределение, имеем

$$\begin{aligned} \xi = 0: \rho_e &= \rho_0 \cos(k_z z) \cos(k_y y), \quad |k_y y| \leq \pi/2, |k_z z| \leq \pi/2 \\ z = 0: \rho_e &= \rho_0 \exp(k_x \xi) \cos(k_y y), \quad 0 \leq \xi \leq \xi_b, |k_y y| \leq \pi/2 \end{aligned} \quad (11)$$

Во всей остальной области и на границах используем нулевые начальные данные. Тогда в области $\xi > \xi_b$ имеем отрыв стримера от плоскости $z = 0$ - рис. 2, что соответствует ветвлению, поскольку плоскость $z = 0$ является плоскостью симметрии. На рис. 2 представлены данные по распределению плотности электронов при ветвлении стримера, рассчитанные по модели (10)-(11) при следующих значениях параметров:

$$\begin{aligned} D_e &= 0.1, D_i = 0.001, D_E = 1000, k_i = 0, k_y = k_z = \pi/60, \\ E_0 &= 0.2; 0.27, u = 1; 1.2, S = 10^{-4}, L_y = L_z = 100, k_x = 0.00597 \end{aligned} \quad (12)$$

Отметим, что волновые числа, коэффициент диффузии электронов, напряженность электрического поля и скорость стримера связаны уравнение (8). Разрешая уравнение (8), находим продольный масштаб стримера в зависимости от параметров модели в виде

$$L_b = \frac{1}{k_x} = \frac{u - E_0}{D_e (k_y^2 + k_x^2) + |E_0| \exp(-1/|E_0|)} \quad (13)$$

Из уравнения (13) следует, что при уменьшении скорости точка ветвления смещается к началу координат. Тот же эффект наблюдается при увеличении коэффициента диффузии или напряженности электрического поля – рис. 2.

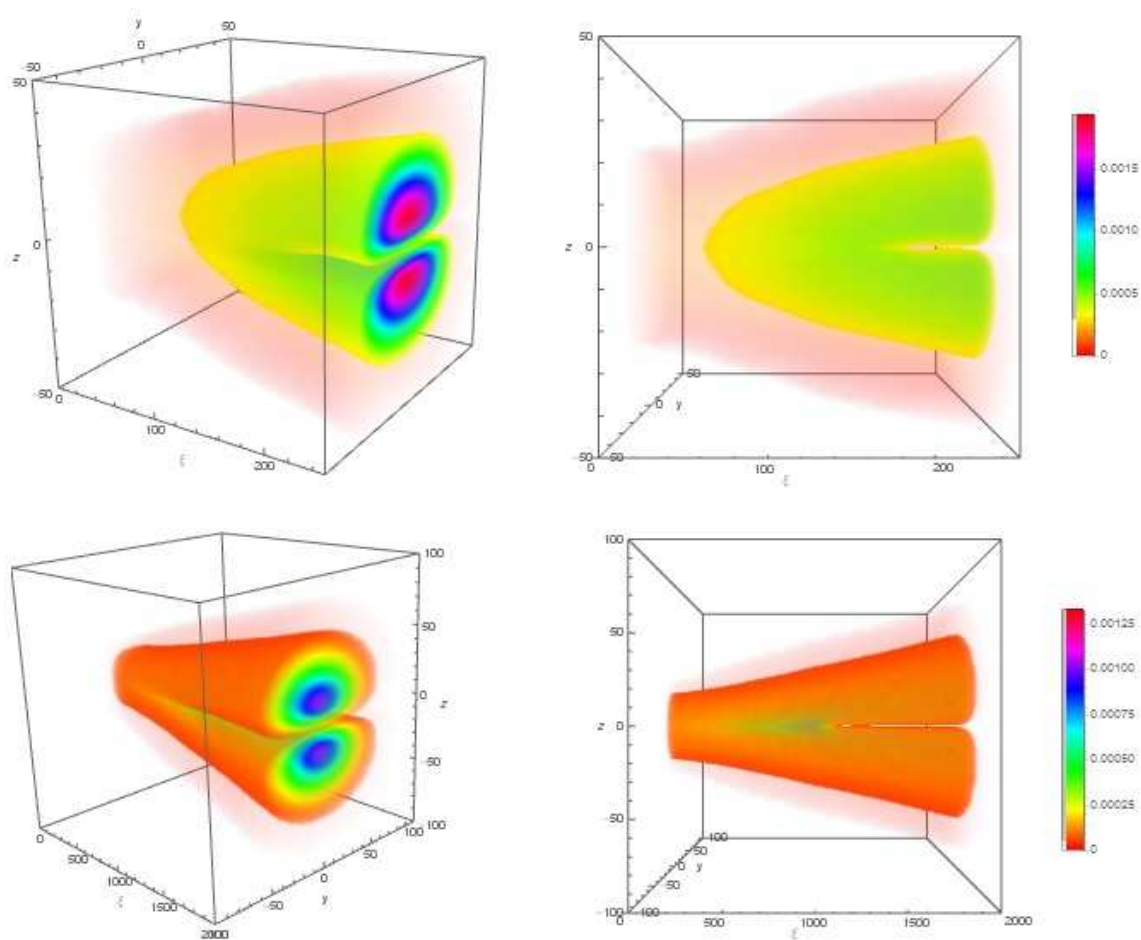


Рис. 2. Распределение плотности электронов при ветвлении стримера для двух значений скорости и напряженности внешнего поля: вверху $u = 1, E_0 = 0.27$, внизу $u = 1.2, E_0 = 0.2$.

Интересной особенностью данной постановки задачи является то, что рассматривается ветвление трехмерного стримера – рис. 2, а не плоского стримера или, что важно, не коническое раскрытие стримера, как в работах [14-16]. Рассмотрим вопрос о ветвлении стримера в рамках нестационарной модели (1). Такого типа ветвление стримера хорошо заметно в верхней части, примыкающей к катоду в момент соударения головки стримера с анодом – рис. 1, 3. Размер ветвей и положение точки ветвления зависит в этом случае

от времени, тогда как в модели (10), положение точки ветвления фиксировано в подвижных координатах. На рис. 3 представлены данные моделирования ветвления стримера для значений параметров

$$\begin{aligned} a = 1, D_e = 0.1, D_i = 0.001, D_E = 1000, k_i = 0 \\ S = 10^{-3}, b = 0.15, L_x = 200, L_y = L_z = 100, E_0 = 0.32 \end{aligned} \quad (14)$$

Из данных, приведенных на рис. 3 следует, что в области $50 < x < 150$ стример распадается на отдельные каналы, число которых зависит от напряженности электрического поля и моды возбуждения.

Эти боковые стримеры начинаются и заканчиваются на основном канале. Отметим, что в обсуждаемой модели с прямоугольными ячейками возбуждаются моды с 4, 6, 8 и т.д. боковыми каналами. При этом центральный канал сохраняется, как основа, на которой замыкаются ветви боковых каналов [20]. Время процесса ветвления стримеров в области катода существенно зависит от напряженности внешнего электрического поля. Так, при напряженности поля $E_0 = 0.32$, боковые стримеры возникают в интервале времени $370 < t < 430$. Тогда как при напряженности электрического поля $E_0 = 0.27$ боковые стримеры возникают в интервале $600 < t < 650$ [22]. Отметим, что при ветвлении стримера в области катода нарушается осевая симметрия, поперечное сечение стримера принимает характерный прямоугольный вид, что описывается первым уравнением (11) – рис. 3.

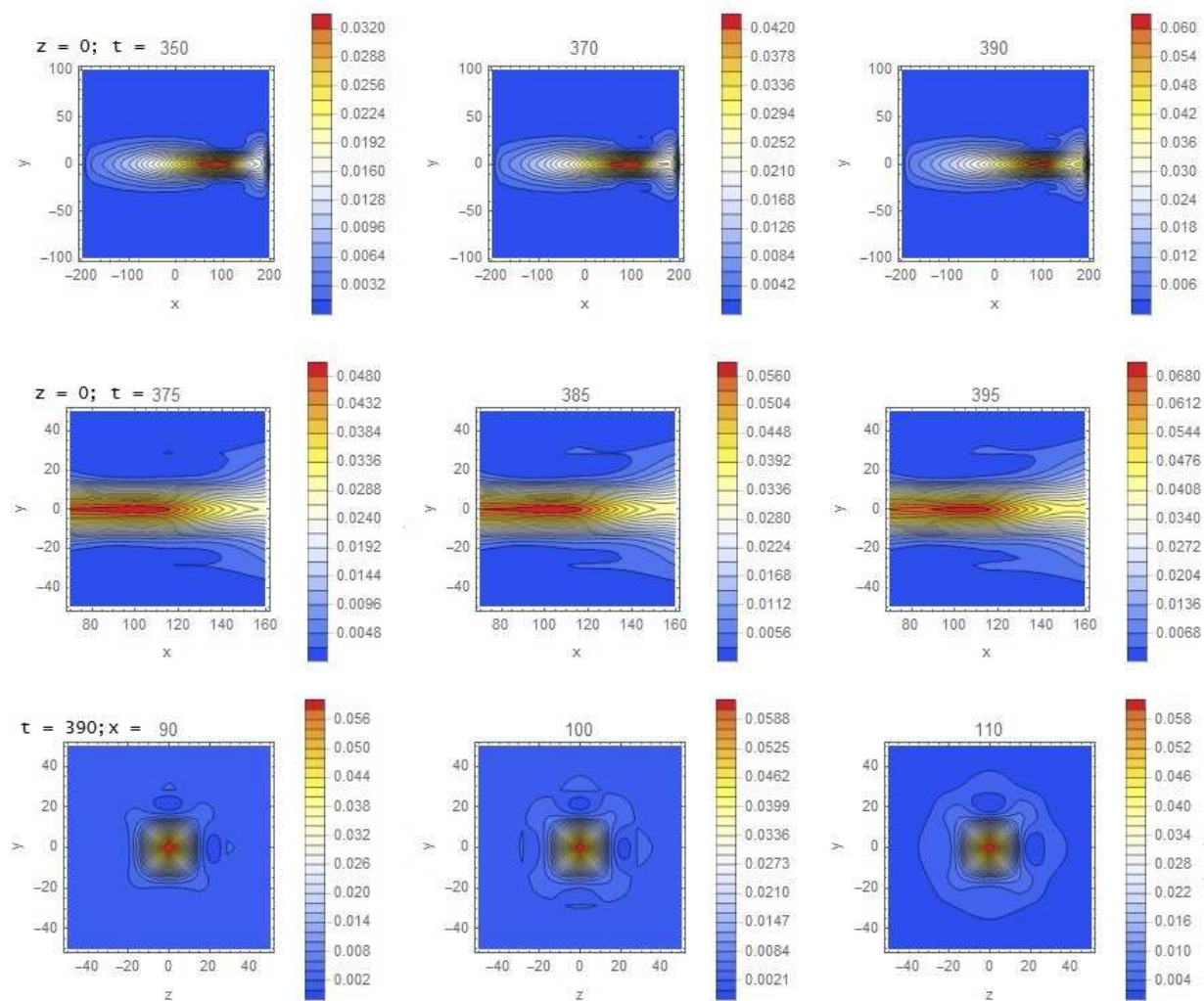


Рис. 3. Распределение плотности электронов в сечении $z=0$ при соударении стримера с анодом в моменты времени $t=350;370;390$ – вверху. Распределение плотности электронов в плоскости (x,y) в сечении $z=0$ (средние рисунки) и в плоскости (y,z) в сечениях $x=90;100;110$ (нижние рисунки) при ветвлении стримера в области катода во внешнем поле $E_0=0.32$.

Таким образом, в численных расчетах мы установили два механизма ветвления стримера, один из которых связан с разделением головки стримера на две части – рис. 2, а второй механизм связан с замыканием основного канала стримера на катод через систему боковых стримеров – рис. 3. Оба механизма ветвления наблюдаются в природе при разряде молнии [1-8].

В работе [24] обнаружен третий механизм ветвления, при котором основание плазмоида замыкается на анод через систему боковых стримеров. Этот механизм получил объяснение в [21-22]. Мы предполагаем, что плазмоид типа [24] - это разновидность стримера, возникающего в проводящей среде при электрическом разряде над водной поверхностью. Для его моделирования на основе системы уравнений (1) необходимо определить область параметров, в которой плазмоид может сформироваться. Прежде всего, это большое время формирования плазмоида, по сравнению с характерным временем модели (1) – 3 пикосекунды. Рассмотрим начальную стадию формирования плазмоида, в которой наблюдается ветвление плазмоида в катодной области с образованием многочисленных стримеров. Длительность этой стадии составляет 17-33 мс [24], следовательно, в этом случае характерное время задачи $t_0 \approx 10^{10}$, а масштаб области моделирования составляет $L_x = L_y = L_z \approx 5 \cdot 10^3$.

Согласно данным [25], плазмоид достигает размера в диаметре 20 см через 150 мс, после чего начинается автономная стадия. Следовательно, характерное время задачи $t_p \approx 0.5 \cdot 10^{11}$. Сравнивая диаметр плазмоида 10-20 см с характерной длиной пробега электронов в азоте при атмосферном давлении - 2.3 мкм, находим, что масштаб области моделирования $L_x = L_y = L_z \approx 5 \cdot 10^4$. Скорость стримера типа плазмоида относительно мала в

сравнении с характерной скоростью распространения стримера $u_s = 0.76667 \cdot 10^3$ км/с.

Действительно, полагая $u_p \approx 2L_x / t_p$, находим, что скорость плазмоида составляет около $2 \cdot 10^{-6} u_s \approx 1.54$ м/с. Отметим, что в экспериментах [24-25] скорость плазмоида в момент отрыва составляла 1.5-2 м/с.

Сделаем замену переменных

$$t = \lambda^2 t', (x, y, z) = \lambda(x', y', z'), \mathbf{E}' = \lambda \mathbf{E}, \rho'_e = \lambda^2 \rho_e, \rho'_i = \lambda^2 \rho_i \quad (15)$$

Опуская штрихи, приведем систему уравнений (1) к виду

$$\begin{aligned} \frac{\partial \rho_e}{\partial t} &= D_e \nabla^2 \rho_e + \nabla \cdot (\rho_e \mathbf{E}) + \lambda \rho_e |\mathbf{E}| \exp(-\lambda/|\mathbf{E}|) \\ \frac{\partial \rho_i}{\partial t} &= D_i \nabla^2 \rho_i + k_i \nabla \cdot (\rho_i \mathbf{E}) + \lambda \rho_e |\mathbf{E}| \exp(-\lambda/|\mathbf{E}|) \\ \frac{\partial \mathbf{E}}{\partial t} &= D_E (\nabla^2 \mathbf{E} + \nabla \rho_e - \nabla \rho_i) \end{aligned} \quad (16)$$

Следовательно, изменение масштаба области формирования стримера не меняет вида системы уравнений (1) с точностью до слагаемого, описывающего скорость ионизации. Отметим, что для данных приведенных в [20-21], а также выше на рис. 1-3, вклад объемной ионизации сравнительно мал, а процесс формирования стримера обусловлен наличием нейтральной плазмы на катоде. В случае плазмоида при расширении с параметрами $E_0 \leq 1, \lambda \gg 1$ вклад объемной ионизации микроскопически мал, поэтому им можно пренебречь.

Из выражений (15) следует, что напряженность поля и плотность электронов в области плазмоида меньше таковой для стримера в λ, λ^2 соответственно. Так, для $\lambda = 500$ характерная напряженность электрического поля составит в заданном масштабе электрического поля $E_s / \lambda = 400$ В/см.

С другой стороны, по данным [24-25] находим типичное значение напряженности поля – 300-350 В/см.

Вольтамперная характеристика разряда над поверхностью электролита (воды) с образованием плазмоида приведена в [24-25]. Используя эти данные, сформулируем задачу для системы уравнений (16), имеем

$$\begin{aligned}
 E_x(t, \pm Lx, y, z) &= F_x(t, \pm Lx, y, z); E_y(t, \pm Lx, y, z) = F_y(t, \pm Lx, y, z); \\
 E_z(t, \pm Lx, y, z) &= F_z(t, \pm Lx, y, z); E_x(t, x, \pm Ly, z) = F_x(t, x, \pm Ly, z); \\
 E_y(t, x, \pm Ly, z) &= F_y(t, x, \pm Ly, z); E_z(t, x, \pm Ly, z) = F_z(t, x, \pm Ly, z); \\
 E_x(t, x, y, \pm Lz) &= F_x(t, x, y, \pm Lz); E_y(t, x, y, \pm Lz) = F_y(t, x, y, \pm Lz); \\
 E_z(t, x, y, \pm Lz) &= F_z(t, x, y, \pm Lz) = 0; \rho_e(t, -Lx, y, z) = \rho_i(t, -Lx, y, z) = 0; \\
 \rho_e(t, Lx, y, z) &= \rho_i(t, Lx, y, z) = S \exp[-b(y^2 + z^2)]ate^{-at}; \\
 \rho_e(t, x, \pm Ly, z) &= \rho_i(t, x, \pm Ly, z) = 0; \rho_e(t, x, y, \pm Lz) = \rho_i(t, x, y, \pm Lz) = 0.
 \end{aligned}
 \tag{17}$$

Здесь $\mathbf{F}(t, x, y, z)$ – внешнее поле, которое в этой задаче является нестационарным. Изменение внешнего поля во времени обусловлено разрядом конденсатора, поэтому может быть представлено в форме произведения статического поля и функции, зависящей от времени, $\mathbf{F}(t, x, y, z) = \mathbf{F}_0(x, y, z)f(t)$. Без ограничения общности положим $f(t) = at \exp(-at)$. Статическое поле определяется путем решения задачи о распределении потенциала в системе с заданной геометрией [21-22].

Рассмотрим механизм ветвления плазмоида путем замыкания его основания через систему стримеров на анод. Эти стримеры хорошо просматриваются на фотографиях, приведенных в работах [24-25]. Для моделирования эффекта используем систему уравнений (16) с граничными условиями (17), которые теперь включают область анода. Следовательно, предполагаем, что в области анода существует источник нейтральной плазмы с плотностью $S \exp[-b(y^2 + z^2)]ate^{-at}$. Второй объемный источник плазмы с интенсивностью $S_1 \exp[-b_2(x - L_c)^2 - b_1(y^2 + z^2)]ate^{-at}$ помещаем в области катода,

т.е. добавляем это слагаемое в правые части первого и второго уравнений (16). Здесь L_c - координата катода. При соответствующем подборе параметров в основании плазмоида возникает система боковых стримеров, замыкающих объемный заряд на анод – рис. 4. Для получения данных мы использовали следующие параметры

$$\begin{aligned} \lambda = 500, t_p = 10^{11} / \lambda^2, a/t_p = 0.1, b = 10^{-4}, b_1 = 1/6, b_2 = 1/2, L_0 = 80, \\ D_e = 0.1, D_i = 0.001, k_i = 0, D_E = 10^4, S = 10^{-5}, S_1 = 2 \cdot 10^{-4}, L_x = L_y = 120. \end{aligned} \quad (20)$$

Кроме того, считаем, что в области электролита $D_E = 50$. Электрическое поле по амплитуде задаем в 10 раз меньше, чем для данных на рис. 1. В результате в области над катодом возникает плазмоид, объемный заряд которого соединен стримерами с анодом – рис. 4.

Согласно приведенным в [21] расчетам плазмоид в форме электронного облака формируется при любых условиях даже в сухом воздухе. Однако для визуализации плазмоида необходимо над катодом создать область, насыщенную ионами, что достигается путем испарения воды с центрального электрода [24-25].

Таким образом, плазмоид типа [24-25] можно описать системой уравнений (1) при соответствующем выборе параметров. В данной модели плазмоид рассматривается как долгоживущий стример. В работе [21] указана область параметров, в которой формируется плазмоид сферической формы. Имеется сходство шаровой молнии и плазмоида. Если это сходство подтвердится, то число теоретических гипотез относительно природы шаровой молнии может резко сократиться [22].

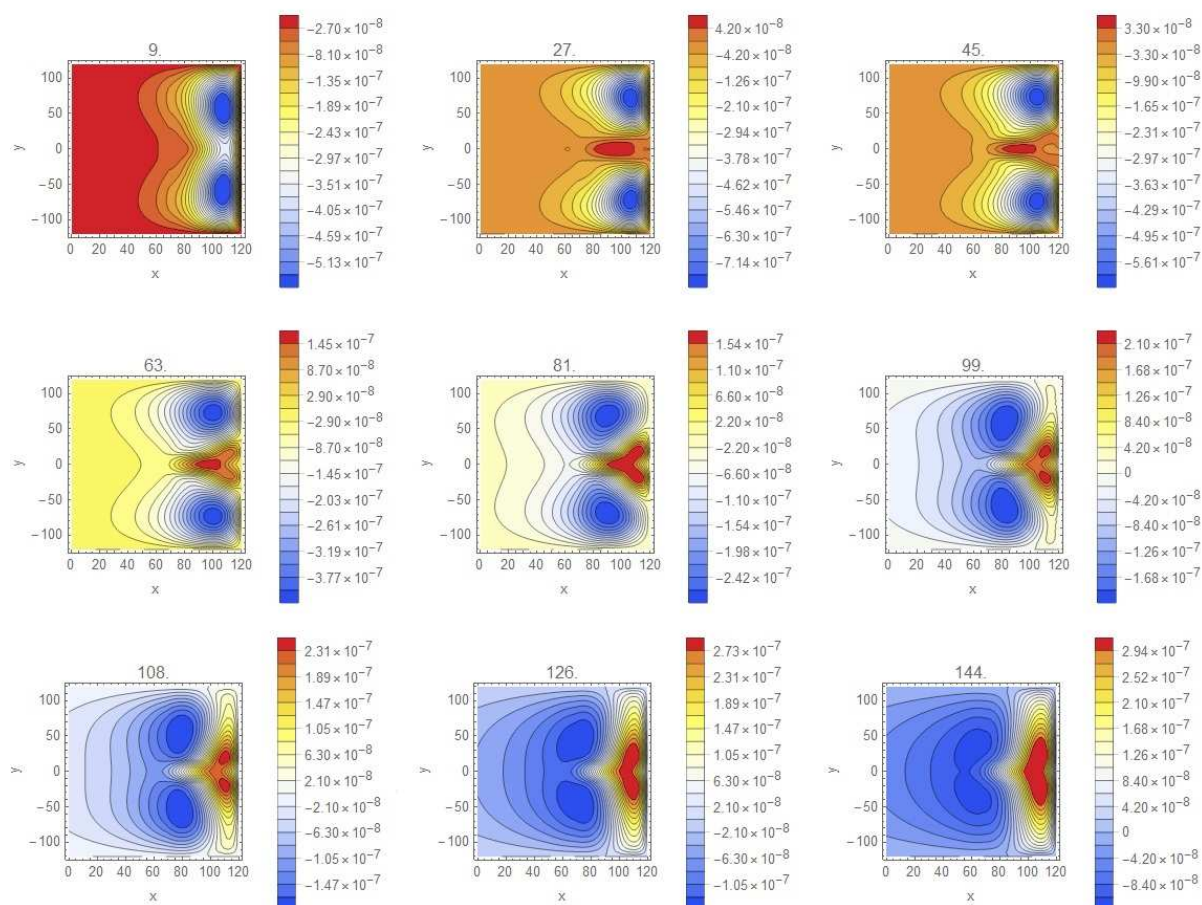


Рис. 4. Распределения плотности заряда $\rho_i - \rho_e$ в плоскости (x, y) в различные моменты реального времени в миллисекундах (указаны над рисунками). Анод находится справа в сечении $x = 120$, плоскость катода находится в сечении $x = 80$. В области между катодом и анодом видны боковые стримеры, замыкающие объемный заряд плазмоида на анод.

В отличие от шаровой молнии и плазмоида, разряд молнии облако-земля характеризуется большим различием поперечного и продольного масштабов порядка см/км. Для одной ступени лидера отношение поперечного масштаба к продольному изменяется от 1/1000 до 1/100. При этом скорость распространения лидера на каждой ступени имеет порядок скорости стримера

в модели (1). Это означает, что для моделирования лидера можно использовать систему уравнений (1) при соответствующем выборе параметров [11].

Рассмотрим решение задачи (1), (3) с параметрами (4) в области с отношением размеров $1/100$ – рис. 5. Из приведенных данных следует, что за время $t=800$ в расчетной области сформировался лидер с большой плотностью электронов, превосходящую плотность на правой границе области (источник электронов) в 60 раз. Скорость лидера изменяется от 700 м/с до 350 м/с, т.е. лидер замедляется в процессе его формирования. Следом за первой ступенью формируется вторая, менее интенсивная ступень лидера – рис. 5.

Изменяя параметры модели (1), находим режим с образованием многоступенчатого лидера – рис. 6. В этом случае мы положили в данных (4) коэффициент диффузии ионов равным коэффициенту диффузии электронов и понизили на порядок плотность электронов источника. Основанием для такого выбора параметров диффузии может служить турбулентность атмосферы. В результате имеем лидер с четырьмя-пятью ступенями рис. 6. В этом случае лидирующая ступень является менее интенсивной, чем замыкающая. Скорость распространения первой ступени составляет около 800 м/с.

Сравним динамику двух типов лидера в плоскости (x, t) – рис. 7. На этом рисунке представлена плотность электронов, вычисленная для данных рис. 5 (слева) и рис. 6 (справа). Отметим, что лидер первого типа по форме похож на волну уплотнения, а лидер второго типа – на волну разрежения в двухфазной среде [26-27]. В природе, видимо, наблюдаются оба типа лидеров, однако имеющиеся данные [1-8] не позволяют ответить на этот вопрос.

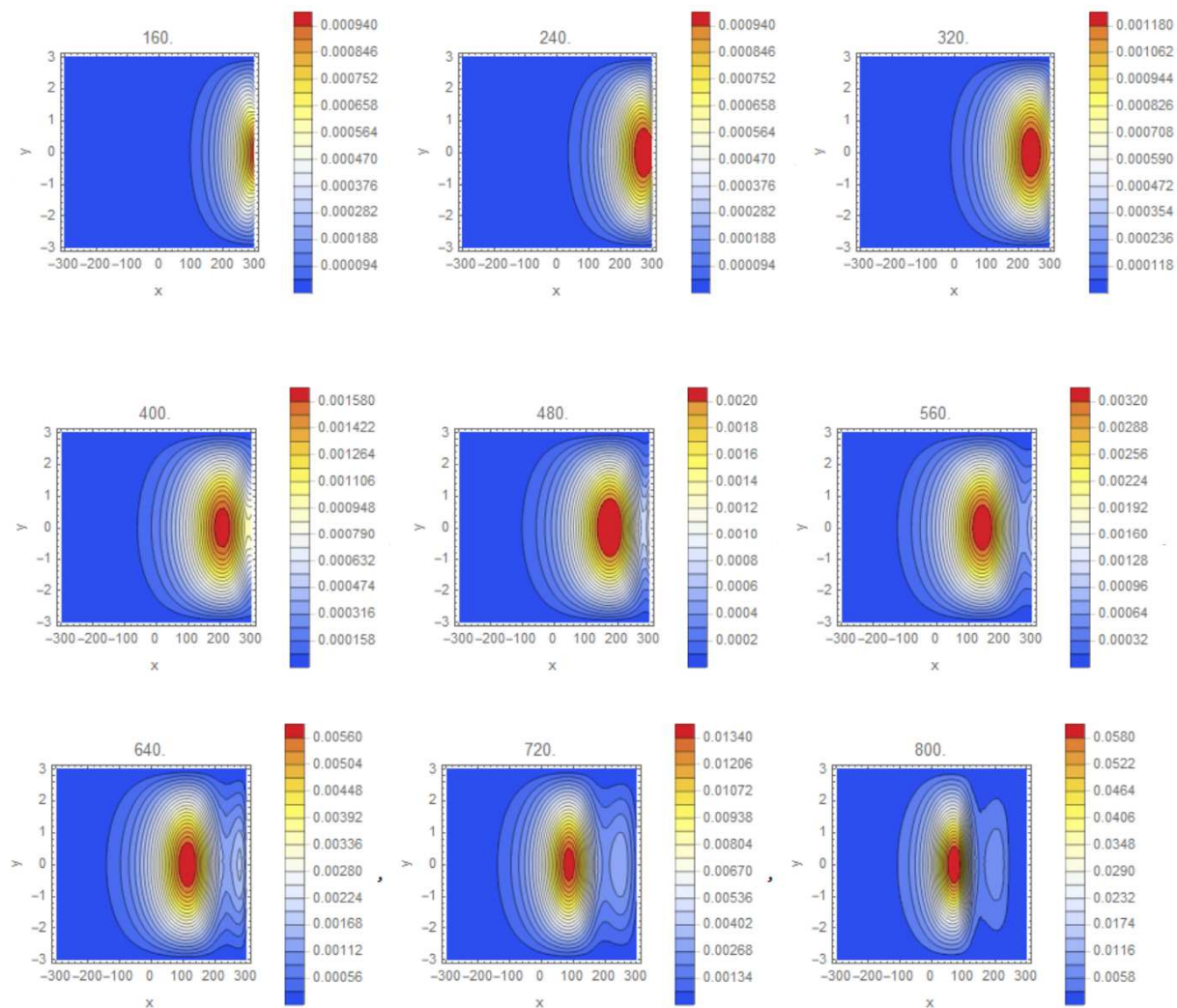


Рис. 5. Линии уровня плотности электронов при распространении лидера в длинном канале с отношением сторон 1/100 во внешнем поле $E_0 = 0.5$, вычисленные в 3D модели в различные моменты времени (указаны над рисунками).

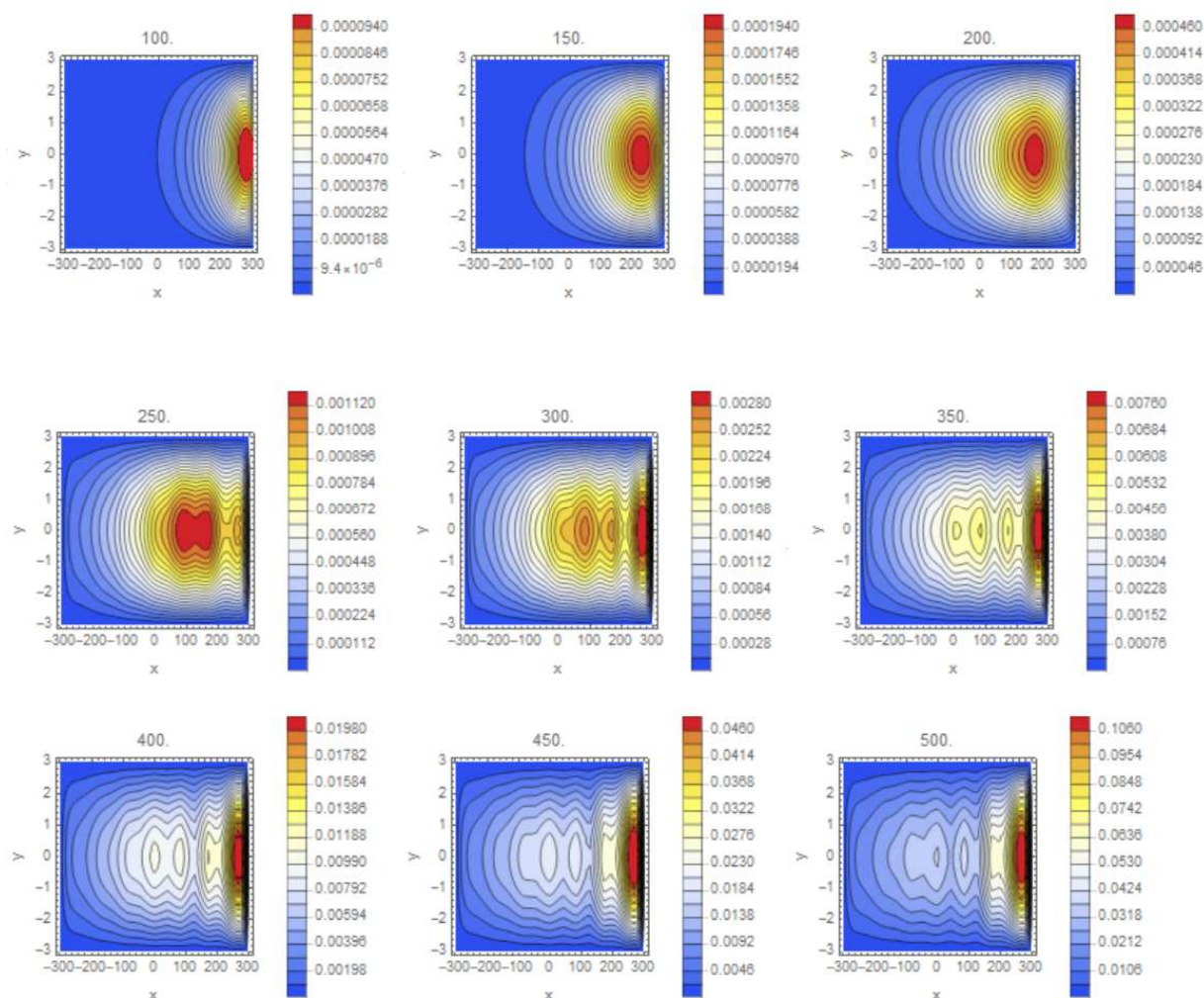


Рис. 6. Линии уровня плотности электронов при распространении лидера в длинном канале с отношением сторон 1/100 во внешнем поле $E_0 = 0.5$, вычисленные в 3D модели в различные моменты времени (указаны над рисунками). Коэффициент диффузии ионов на три порядка больше, чем для данных на рис. 5.

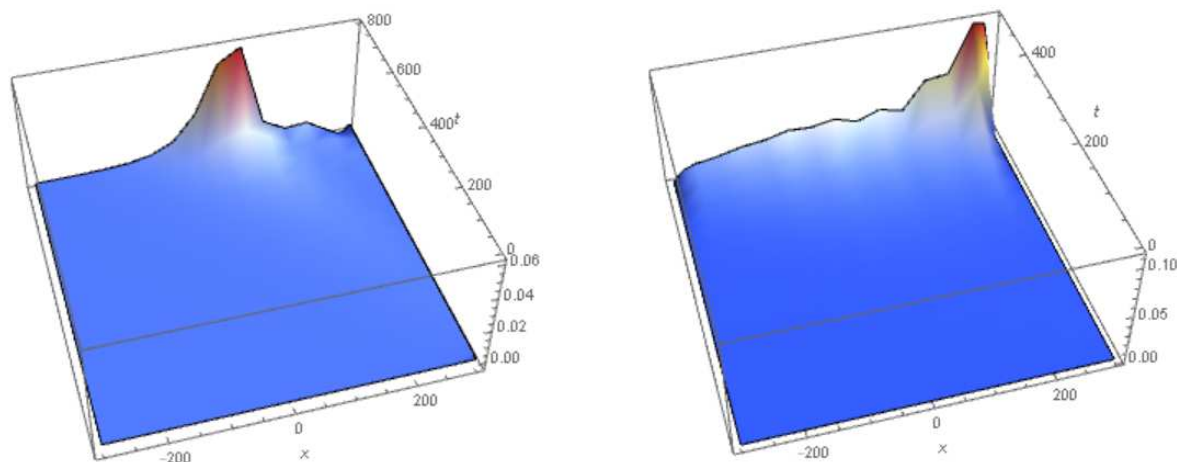


Рис. 7. Плотность электронов в плоскости (x, t) для данных рис. 5 (слева) и рис. 6 (справа).

Таким образом, численное моделирование распространения волн ионизации в области с отношением размеров $1/100$ позволяет выявить два типа ступенчатых лидеров в форме волн уплотнения и разрежения соответственно. Полученные выше результаты, а также данные численных экспериментов [20-22] подтверждают гипотезу [11] об универсальности минимальной модели стримера, а также ее расширения в форме (1). Известные явления природы, связанные с электрическим разрядом – стример [11-20], плазмоид [21-22, 24-25], шаровая молния [22, 28-33] и ступенчатый лидер [4-10, 34] могут быть описаны в рамках модели (1), предложенной автором [20-22].

Наконец, заметим, что рассмотренные выше механизмы ветвления стримера переносятся на случай лидера, в силу идентичности их математических моделей. Это позволяет моделировать процесс разряда молнии с учетом ветвления вплоть до возникновения возвратных ударов. Увеличение длины канала не приводит к существенному изменению

качественной картины распространения лидера в режиме волн разрежения – рис. 8.

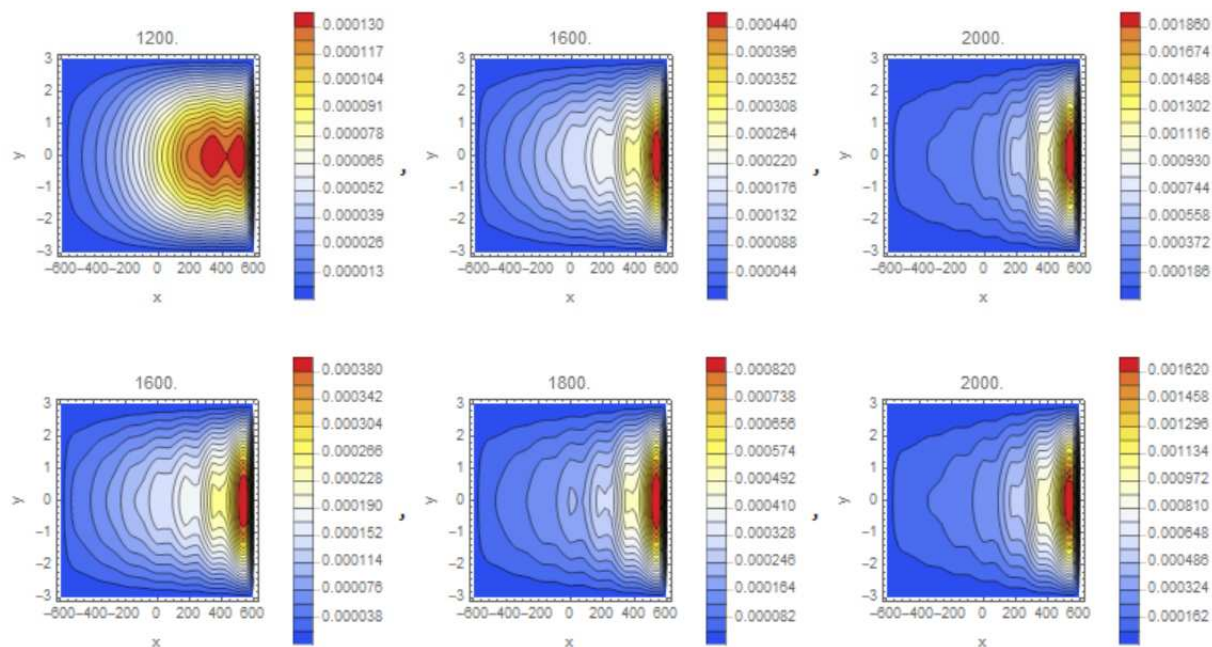


Рис. 8. Линии уровня плотности ионов (вверху) и электронов (внизу) при распространении лидера в длинном канале с отношением сторон 1/200 во внешнем поле $E_0 = 0.497$, вычисленные в 3D модели в различные моменты времени (указаны над рисунками).

На рис. 8 представлены данные моделирования распространения лидера в канале с отношением сторон 1:200. Сравнивая данные на рис. 6 и 8, находим их качественное совпадение, что подтверждает высказанную выше гипотезу.

Библиографический список

1. Uman M. A. Lighting. - McGraw-Hill Book Company, 1969.
2. Бекряев В.И. Молнии, спрайты и джеты. — СПб., РГГМУ, 2009. — 96 с. — ISBN 978-5-86813-248-3.

3. Базелян Э.М., Райзер Ю.П. Физика молнии и молниезащиты. – М.: Физматлит. 2001. 320 с.
4. Krider E. P., C. D. Weidman, and R. C. Noggle. The electric field produced by lightning stepped leaders// *J. Geophys. Res.*, 82, 951–960, 1977, doi:10.1029/JC082i006p00951.
5. Rakov V. A., and M. A. Uman. *Lightning: Physics and Effects*. - Cambridge Univ. Press, New York. 2003
6. J. D. Hill, M. A. Uman, and D. M. Jordan. High-speed video observations of a lightning stepped leader// *J. Geophys. Res.*, 116, D16117, doi:10.1029/2011JD015818, 2011.
7. Buguet M., P. Lalande, P. Blanchet, S. Pédeboy, P. Barneoud, P. Laroche. Observation of Cloud-to-Ground Lightning Channels with High-Speed Video Camera// XV International Conference on Atmospheric Electricity, 15-20 June 2014, Norman, Oklahoma, U.S.A.
8. Biagi C. J., M. A. Uman, J. D. Hill, D. M. Jordan, V. A. Rakov, and J. Dwyer. Observations of stepping mechanisms in a rocket-and-wire triggered lightning flash// *J. Geophys. Res.*, 115, D23215, 2010, doi:10.1029/2010JD014616.
9. Hidetsugu Sakaguchi and Sahim M. Kourkouss. Branching Patterns and Stepped Leaders in an Electric-Circuit Model for Creeping Discharge// *J. Phys. Soc. Jpn.* 79, 064802, 2010.
10. Hidetsugu Sakaguchi and Sahim M. Kourkouss. Mechanism of Stepped Leaders in a Simple Discharge Model// *J. Phys. Soc. Jpn.* 80, 094003, 2011.
11. U Ebert, C Montijn, T M P Briels, W Hundsdorfer, B Meulenbroek, A Rocco, E M van Veldhuizen. The multiscale nature of streamers// arXiv:physics/0604023 [physics.plasm-ph].
12. P. A. Vitello, B. M. Penetrante, and J. N. Bardsley. Simulation of negative-streamer dynamics in nitrogen// *Phys. Rev. E*, 5574–5598, 1994.
13. Wu C., Kunhardt E. E. Formation and propagation of streamers in N₂ and N₂-SF₆ mixtures// *Physical Review A (General Physics)*, Volume 37, Issue 11, June 1, 1988, pp.4396-4406.
14. Pasko V.P., Inan U.S., Bell T.F. Spatial structure of sprites// *Geophysical Research Letter*, V. 25. No.12. pp. 2123-2126. 1998.
15. Montijn C., Ebert U.M., Hansdorfer W. Numerical convergence of the branching time of negative streamers// *Phys. Rev. E.*, 73(6), 65401-1/4. 2006.
16. Alejandro Luque, Fabian Brau, Ute Ebert. Saffman-Taylor streamers: mutual finger interaction in an electric breakdown// *Phys. Rev. E* 78, 016206, 2008.
17. Chao Li, Ute Ebert, Willem Hansdorfer. 3D hybrid computations for streamer discharges and production of run-away electrons// arXiv:0907.0555v2, 14 Jul, 2009.
18. Papageorgiou L., Metaxas A.C., Georghiou G.E. Three-dimensional numerical modeling of gas discharges at atmospheric pressure incorporating photo ionization phenomena// *J. App. Phys.* 44, 2011, 045203.
19. Lipeng Liu and Marley Becerra. On the transition from stable positive glow corona to streamers// *J. Phys. D: Appl. Phys.* 49, 225202 (13pp), 2016.
20. Трунев А.П. Распространение и ветвление стримеров в проводящих средах / А.П. Трунев // Политематический сетевой электронный научный журнал Кубанского государственного аграрного университета (Научный журнал КубГАУ) [Электронный ресурс]. – Краснодар: КубГАУ, 2017. – №04(128). С. 1149 – 1170. – IDA [article ID]: 1281704080. – Режим доступа: <http://ej.kubagro.ru/2017/04/pdf/80.pdf>, 1,375 у.п.л.
21. Трунев А.П. Моделирование плазмоида и стримеров в проводящей среде / А.П. Трунев // Политематический сетевой электронный научный журнал Кубанского государственного аграрного университета (Научный журнал КубГАУ) [Электронный

ресурс]. – Краснодар: КубГАУ, 2017. – №05(129). С. 482 – 508. – IDA [article ID]: 1291705041. – Режим доступа: <http://ej.kubagro.ru/2017/05/pdf/41.pdf>, 1,688 у.п.л.

22. Трунев А.П. Моделирование шаровой молнии в проводящей среде / А.П. Трунев // Политематический сетевой электронный научный журнал Кубанского государственного аграрного университета (Научный журнал КубГАУ) [Электронный ресурс]. – Краснодар: КубГАУ, 2017. – №06(130). С. 348 – 378. – IDA [article ID]: 1301706027. – Режим доступа: <http://ej.kubagro.ru/2017/06/pdf/27.pdf>, 1,938 у.п.

23. Saffman P. G., Geoffrey Taylor. The Penetration of a Fluid into a Porous Medium or Hele-Shaw Cell Containing a More Viscous Liquid//Proc. R. Soc. Lond. A, 245, 1958.

24. Fantz U., Kalafat S., Friedl R., Briefi S. Generation of an atmospheric plasmoid from a water discharge: An analysis of the dissipated energy// J. Appl. Phys. 114, 043302, 2013; doi: 10.1063/1.4816311

25. Ursel Fantz, Stefan Briefi, Roland Friedl, Martin Kammerloher, Johannes Kolbinger, and Alexander Oswald. Initial Phase of a Large Atmospheric Plasmoid Generated Above a Water Surface//IEEE TRANSACTIONS ON PLASMA SCIENCE, VOL. 42, NO. 10, 2014.

26. Antipin V. A., Borisov A. A., Trunev A. P. Dynamic processes in free bulk charges under conditions of gas filtering and abrupt depressurization//PMTF - Zhurnal Prikladnoi Mekhaniki i Tekhnicheskoi Fiziki, Nov.-Dec. 1990, p. 80-89.

27. Kiselev, S.P., Ruev, G.A., Trunev, A.P., Fomin, V.M. & Schavaliev, M.S. Shook-wave phenomena in two-component and two-phase flows. - Nauka, Novosibirsk, 261 p., 1992 (in Russian).

28. Singer S. The nature of ball lightning. - Plenum, NY, 1971.

29. Стаханов И.П. О физической природе шаровой молнии. – М., Энергоатомиздат, 1985, 208 с.

30. Григорьев А.И. Шаровая молния. – Ярославль: ЯрГУ, 2006. – 200 с.

31. Egorov A. E., Stepanov S. I., Shabanov G. D. Laboratory demonstration of ball lightning// Phys. Uspekhi, vol. 47, no. 1, pp. 99–101, 2004.

32. Oreshko A.G. Generation of Laboratory Ball Lightning//J. of Physics, 44, 2006, pp. 127-132.

33. Шабанов Г.Д. Гипотезы и эксперименты по созданию шаровой молнии//УФН, 180, 2, 2010.

34. В.Е. Carlson, C. Liang, P. Bitzer, and H. Christian. Time domain simulations of preliminary breakdown pulses in natural lightning// arXiv:1605.09119v1 [physics.space-ph] 30 May 2016.

References

1. Uman M. A. Lighting. - McGraw-Hill Book Company, 1969.
2. Bekrjaev V.I. Molnii, sprajty i dzhety. — SPb., RGGMU, 2009. — 96 s. — ISBN 978-5-86813-248-3.
3. Bazeljan Je.M., Rajzer Ju.P. Fizika molnii i molniezashhity. – М.: Fizmatlit. 2001. 320 s.
4. Krider E. P., C. D. Weidman, and R. C. Noggle. The electric field produced by lightning stepped leaders// J. Geophys. Res., 82, 951 –960, 1977, doi:10.1029/JC082i006p00951.
5. Rakov V. A., and M. A. Uman. Lightning: Physics and Effects. - Cambridge Univ. Press, New York. 2003

6. J. D. Hill, M. A. Uman, and D. M. Jordan. High-speed video observations of a lightning stepped leader// *J. Geophys. Res.*, 116, D16117, doi:10.1029/2011JD015818, 2011.
7. Buguet M., P. Lalande, P. Blanchet, S. Pédeboy, P. Barneoud, P. Laroche. Observation of Cloud-to-Ground Lightning Channels with High-Speed Video Camera//XV International Conference on Atmospheric Electricity, 15-20 June 2014, Norman, Oklahoma, U.S.A.
8. Biagi C. J., M. A. Uman, J. D. Hill, D. M. Jordan, V. A. Rakov, and J. Dwyer. Observations of stepping mechanisms in a rocket-and-wire triggered lightning flash// *J. Geophys. Res.*, 115, D23215, 2010, doi:10.1029/2010JD014616.
9. Hidetsugu Sakaguchi and Sahim M. Kourkouss. Branching Patterns and Stepped Leaders in an Electric-Circuit Model for Creeping Discharge// *J. Phys. Soc. Jpn.* 79, 064802, 2010.
10. Hidetsugu Sakaguchi and Sahim M. Kourkouss. Mechanism of Stepped Leaders in a Simple Discharge Model//*J. Phys. Soc. Jpn.* 80, 094003, 2011.
11. U Ebert, C Montijn, T M P Briels, W Hundsdorfer, B Meulenbroek, A Rocco, E M van Veldhuizen. The multiscale nature of streamers//arXiv:physics/0604023 [physics.plasm-ph].
12. P. A. Vitello, B. M. Penetrante, and J. N. Bardsley. Simulation of negative-streamer dynamics in nitrogen// *Phys. Rev. E*, 5574–5598, 1994.
13. Wu C., Kunhardt E. E. Formation and propagation of streamers in N₂ and N₂-SF₆ mixtures//*Physical Review A (General Physics)*, Volume 37, Issue 11, June 1, 1988, pp.4396-4406.
14. Pasko V.P., Inan U.S., Bell T.F. Spatial structure of sprites// *Geophysical Research Letter*, V. 25. No.12. pp. 2123-2126. 1998.
15. Montijn C., Ebert U.M., Hansdorfer W. Numerical convergence of the branching time of negative streamers//*Phys. Rev. E.*, 73(6), 65401-1/4. 2006.
16. Alejandro Luque, Fabian Brau, Ute Ebert. Saffman-Taylor streamers: mutual finger interaction in an electric breakdown//*Phys. Rev. E* 78, 016206, 2008.
17. Chao Li, Ute Ebert, Willem Hansdorfer. 3D hybrid computations for streamer discharges and production of run-away electrons// arXiv:0907.0555v2, 14 Jul, 2009.
18. Papageorgiou L., Metaxas A.C., Georghiou G.E. Three-dimensional numerical modeling of gas discharges at atmospheric pressure incorporating photo ionization phenomena// *J. App. Phys.* 44, 2011, 045203.
19. Lipeng Liu and Marley Becerra. On the transition from stable positive glow corona to streamers//*J. Phys. D: Appl. Phys.* 49, 225202 (13pp), 2016.
20. Trunev A.P. Rasprostranenie i vetvlenie strimerov v provodjashhij sredah / A.P. Trunev // *Politematicheskij setevoj jelektronnyj nauchnyj zhurnal Kubanskogo gosudarstvennogo agrarnogo universiteta (Nauchnyj zhurnal KubGAU) [Jelektronnyj resurs]*. – Krasnodar: KubGAU, 2017. – №04(128). S. 1149 – 1170. – IDA [article ID]: 1281704080. – Rezhim dostupa: <http://ej.kubagro.ru/2017/04/pdf/80.pdf>, 1,375 u.p.l.
21. Trunev A.P. Modelirovanie plazmoida i strimerov v provodjashhej srede / A.P. Trunev // *Politematicheskij setevoj jelektronnyj nauchnyj zhurnal Kubanskogo gosudarstvennogo agrarnogo universiteta (Nauchnyj zhurnal KubGAU) [Jelektronnyj resurs]*. – Krasnodar: KubGAU, 2017. – №05(129). S. 482 – 508. – IDA [article ID]: 1291705041. – Rezhim dostupa: <http://ej.kubagro.ru/2017/05/pdf/41.pdf>, 1,688 u.p.l.
22. Trunev A.P. Modelirovanie sharovoj molnii v provodjashhej srede / A.P. Trunev // *Politematicheskij setevoj jelektronnyj nauchnyj zhurnal Kubanskogo gosudarstvennogo agrarnogo universiteta (Nauchnyj zhurnal KubGAU) [Jelektronnyj resurs]*. – Krasnodar:

KubGAU, 2017. – №06(130). S. 348 – 378. – IDA [article ID]: 1301706027. – Rezhim dostupa: <http://ej.kubagro.ru/2017/06/pdf/27.pdf>, 1,938 u.p.

23. Saffman P. G., Geoffrey Taylor. The Penetration of a Fluid into a Porous Medium or Hele-Shaw Cell Containing a More Viscous Liquid//Proc. R. Soc. Lond. A, 245, 1958.

24. Fantz U., Kalafat S., Friedl R., Briefi S. Generation of an atmospheric plasmoid from a water discharge: An analysis of the dissipated energy// J. Appl. Phys. 114, 043302, 2013; doi: 10.1063/1.4816311

25. Ursel Fantz, Stefan Briefi, Roland Friedl, Martin Kammerloher, Johannes Kolbinger, and Alexander Oswald. Initial Phase of a Large Atmospheric Plasmoid Generated Above a Water Surface//IEEE TRANSACTIONS ON PLASMA SCIENCE, VOL. 42, NO. 10, 2014.

26. Antipin V. A., Borisov A. A., Trunев A. P. Dynamic processes in free bulk charges under conditions of gas filtering and abrupt depressurization//PMTF - Zhurnal Prikladnoi Mekhaniki i Tekhnicheskoi Fiziki, Nov.-Dec. 1990, p. 80-89.

27. Kiselev, S.P., Ruev, G.A., Trunев, A.P., Fomin, V.M. & Schavaliev, M.S. Shook-wave phenomena in two-component and two-phase flows. - Nauka, Novosibirsk, 261 p., 1992 (in Russian).

28. Singer S. The nature of ball lightning. - Plenum, NY, 1971.

29. Stahanov I.P. O fizicheskoy prirode sharovoy molnii. – M., Jenergoatomizdat, 1985, 208 s.

30. Grigor'ev A.I. Sharovaja molnija. – Jaroslavl': JarGU, 2006. – 200 s.

31. Egorov A. E., Stepanov S. I., Shabanov G. D. Laboratory demonstration of ball lightning// Phys. Uspekhi, vol. 47, no. 1, pp. 99–101, 2004.

32. Oreshko A.G. Generation of Laboratory Ball Lightning//J. of Physics, 44, 2006, pp. 127-132.

33. Shabanov G.D. Gipotezy i jeksperimenty po sozdaniju sharovoj molnii//UFN, 180, 2, 2010.

34. B.E. Carlson, C. Liang, P. Bitzer, and H. Christian. Time domain simulations of preliminary breakdown pulses in natural lightning// arXiv:1605.09119v1 [physics.space-ph] 30 May 2016.