

УДК 537.2

UDC 537.2

01.00.00 Физико-математические науки

Physics and Math

МОДЕЛИРОВАНИЕ ШАРОВОЙ МОЛНИИ В ПРОВОДЯЩЕЙ СРЕДЕ**SIMULATION OF BALL LIGHTNING IN CONDUCTING ENVIRONMENT**Трунев Александр Петрович
к.ф.-м.н., Ph.D.*Директор, A&E Trounev IT Consulting, Торонто, Канада*Alexander Trunev
Cand.Phys.-Math.Sci., Ph.D.*Director, A&E Trounev IT Consulting, Toronto, Canada*

В настоящей работе развита модель, описывающая формирование стримеров, плазмоида и шаровой молнии в проводящей среде. Для описания вклада токов проводимости мы модифицировали стандартное уравнение электростатики с учетом вихревой составляющей электрического поля. В результате такого обобщения сформулирована система нелинейных уравнений параболического типа, описывающая формирование стримеров, плазменных долгоживущих образований и шаровых молний. Как известно, в лабораториях удается создавать плазмоид со временем жизни 300-500 мс и диаметром 10-20 см, что интерпретируется как шаровая молния. При скоростной фотосъемке выявляется сложная структура, состоящая из плазмоида и окружающих его стримеров. В рамках предложенной модели поставлены задачи о формировании плазмоида и распространении стримеров во внешнем электрическом поле. В данной модели плазмоид рассматривается как долгоживущий стример. Указана область параметров, в которой формируется плазмоид сферической формы. Установлено, что существует три механизма ветвления стримера. Первый механизм связан с неустойчивостью фронта, что приводит к разделению головки стримера на две части. Второй механизм связан с неустойчивостью стримера в области основания, что приводит к ветвлению стримера с образованием большого числа боковых стримеров, замыкающих основной канал стримера на катод. В численных экспериментах обнаружен третий механизм ветвления, наблюдавшийся в опытах, связанный с ветвлением плазмоида в области катода с замыканием объемного заряда на анод через систему стримеров. Даны результаты моделирования эволюции шаровых скоплений в масштабе сотен миллисекунд. Обнаружены режимы перезарядки плазмоида ведущие к образованию положительного или отрицательного заряда системы

In this work, a model is developed to describe the formation of streamers, plasmoid, and ball lightning in a conducting medium. To describe the contribution of the conductivity currents, we modified the standard electrostatic equation taking into account the vortex component of the electric field. As a result of this generalization, a system of parabolic-type nonlinear equations is formulated that describes the formation of streamers, plasma long-lived formations and ball lightning. As is known, in laboratories it is possible to create a plasmoid with a lifetime of 300-500 ms and a diameter of 10-20 cm, which is interpreted as a ball lightning. With high-speed photography, a complex structure is detected, consisting of a plasmoid and surrounding streamers. Within the framework of the proposed model, problems are posed about the formation of a plasmoid and the propagation of streamers in an external electric field. In this model, the plasmoid is considered to be a long-lived streamer. The range of parameters in which a plasmoid of spherical shape is formed is indicated. It is established that there are three streamer branching mechanisms. The first mechanism is related to the instability of the front, which leads to the separation of the head of the streamer into two parts. The second mechanism is associated with the instability of the streamer in the base region, which leads to the branching of the streamer with the formation of a large number of lateral streamers closing the main channel of the streamer to the cathode. In numerical experiments, the third branching mechanism observed in experiments connected with the branching of the plasmoid in the cathode region with the closure of the space charge to the anode through the streamer system was observed. The results of modeling the evolution of globular clusters in a scale of hundreds of milliseconds are given. Plasma exchange recharge modes leading to the formation of a positive or negative charge of the system are found

Ключевые слова: ЭЛЕКТРИЧЕСКОЕ ПОЛЕ, СТРИМЕР, РАЗРЯД, ВЕТВЛЕНИЕ, ИОНИЗАЦИЯ, ПЛАЗМОИД, ШАРОВАЯ МОЛНИЯ,

Keywords: ELECTRIC FIELD, STREAMER, PLASMOID, DISCHARGE, BRANCHING, IONIZATION, MATHEMATICAL MODELING,

Введение

Французский астроном и физик Франсуа Араго собрал большое число данных о грозном электричестве, производящем гром и молнию, по свидетельствам очевидцев, начиная с античных времен [1]. Араго выделял три вида молний, включая огненные шары или шаровую молнию, которую он считал самым необъяснимым явлением природы. В феврале 1838 года Фарадей написал следующее замечание об огненных шарах [2]: «Время от времени описывались электрические разряды в атмосфере в форме огненных шаров. Такие явления представляются мне несовместимыми со всем тем, что нам известно об электричестве и способах его разряда. Поскольку это явление включает элемент времени (1418, 1436), то, пожалуй, и возможно, что электрический разряд действительно переходит с места на место в виде шара; однако все указывает на то, что скорость его должна быть почти бесконечна, а продолжительность чрезвычайно мала, а потому невозможно, чтобы глаз ощущал его иначе, как в виде светлой линии. Я не хочу отрицать, что огненные шары могут появляться в атмосфере, но чтобы они имели что-либо общее с разрядом обыкновенного электричества или были вообще связаны с молнией или атмосферным электричеством, — это более чем сомнительно».

Столь удивительно противоречивые точки зрения на природу шаровой молнии существуют и в наше время [3-5]. С одной стороны, считается, что шаровая молния является природным феноменом, который был воспроизведен в лабораториях в форме плазмоида диаметром 10-20 см и временем жизни 300-500 мс [6-12].

С другой стороны, существуют теории шаровой молнии, в которых используются гипотезы двухтемпературной среды [13], релятивистских электронов [14], ударной волны в среде с аномальной дисперсией [15], замкнутых циркулирующих токов [16], равновесной конфигурации зарядов разного знака - ионов и электронов [17] и т.д. Общее число моделей шаровой молнии в настоящее время превышает две сотни [7]. Таким образом, подтверждается замечание Араго о шаровой молнии, как о самом необъяснимом явлении природы.

Из общих соображений ясно, что электрический разряд [2], стример [20-31], плазмоид [9-12, 32] и шаровая молния [3-8, 33], должны описываться однотипной моделью вытекающей из уравнений Максвелла. В работах [18-19] рассматривается общая модель шаровой молнии, плазмоида и стримера с учетом индуцированных вихревых полей, обусловленных токами проводимости. Плазмоид в модели [19] рассматривается как долгоживущий стример, а шаровая молния как разновидность плазмоида. В численных расчетах было установлено три механизма ветвления стримера, один из которых связан с разделением головки стримера на две части, второй механизм связан с замыканием основного канала стримера на катод через систему боковых стримеров, третий механизм связан с ветвлением основания плазмоида и с замыканием боковых стримеров на анод.

В настоящей работе в рамках модели [18-19] поставлены задачи об устойчивости шаровой молнии. Рассматривается применение полученных результатов к проблеме удержания плазмы электрическим полем [17, 34].

Модель распространения и ветвления стримера в проводящей среде

Как известно, стримеры относятся к числу макроскопических наблюдаемых явлений, которые легко могут быть зарегистрированы в экспериментах с газовыми разрядами, включая атмосферные разряды [20-31].

Обычно наблюдаются стримеры, вызванные распространением электронов в нейтральной среде, которая подвержена ионизации. Стандартный набор физических процессов, используемых в моделях стримеров – это ионизация, диффузия и движение зарядов в электрическом поле [20-31].

Предполагается, что высоковольтный разряд относится к электростатическим явлениям, следовательно, генерируемые электрические поля являются потенциальными [20-29]. В тоже время сам разряд является быстропротекающим процессом, что указывает на наличие вихревых полей [18-19]. Рассмотрим распространение стримера в газовой среде в однородном электрическом поле. Используем стандартную модель стримера в газовых разрядах [20-24], которую модифицируем с учетом диффузии электрического поля и ионов, имеем [18-19]

$$\begin{aligned} \frac{\partial \rho_e}{\partial t} &= D_e \nabla^2 \rho_e + \nabla \cdot (\rho_e \mathbf{E}) + \rho_e |\mathbf{E}| \exp(-1/|\mathbf{E}|) \\ \frac{\partial \rho_i}{\partial t} &= D_i \nabla^2 \rho_i + k_i \nabla \cdot (\rho_i \mathbf{E}) + \rho_e |\mathbf{E}| \exp(-1/|\mathbf{E}|) \\ \frac{\partial \mathbf{E}}{\partial t} &= D_E (\nabla^2 \mathbf{E} + \nabla \rho_e - \nabla \rho_i) \end{aligned} \quad (1)$$

Здесь обозначено $\rho_e, \rho_i, \mathbf{E}$ – плотность электронов, ионов и электрического поля соответственно, D_e, D_i, D_E - коэффициенты диффузии, k_i - параметр подвижности ионов. В качестве параметра длины в модели (1) используется длина свободного пробега электронов в азоте при нормальном давлении – $L_s \approx 2.3 \cdot 10^{-6} m$ (2.3 мкм). Масштаб времени составляет 3 пикосекунды, а масштаб электрического поля – $E_s = 200 kV / cm$ [14]. Характерный масштаб плотности электронов составляет в таком случае

$$\rho_s = \frac{\epsilon_0 E_s}{e L_s} \approx 4.806 \cdot 10^{22} m^{-3}, \text{ масштаб скорости } u_s = 0.76667 \cdot 10^3 \text{ км/с.}$$

Поясним происхождение третьего уравнения (3). Выражение в скобках в случае электростатического поля тождественно обращается в ноль. Однако при наличии вихревой составляющей поля в случае длинных волн, из уравнений Максвелла и закона Ома $\mathbf{j} = \sigma \mathbf{E} = -\sigma \nabla \mathbf{A} / \partial t$ следует уравнение диффузии векторного потенциала

$$\sigma \mu \frac{\partial \mathbf{A}}{\partial t} = \nabla^2 \mathbf{A} \quad (2)$$

Сравнивая (2) с третьим уравнением (1), находим $D_E = 1 / \sigma \mu$.

Модель (1) тестировалась на плоских и трехмерных задачах моделирования стримеров Саффмана-Тейлора [23, 35] в однородном электрическом поле [18-19].

Задача для системы (1) решалась численно, в прямоугольной области $-L_x \leq x \leq L_x, -L_y \leq y \leq L_y, -L_z \leq z \leq L_z$, с нулевыми начальными данными и с граничными условиями:

$$\begin{aligned} E_x(t, -L_x, y, z) &= E_x(t, L_x, y, z) = E_0(1 - e^{-at}), E_y(t, -L_x, y, z) = E_y(t, L_x, y, z) = 0, \\ E_z(t, -L_x, y, z) &= E_z(t, L_x, y, z) = 0, E_x(t, x, -L_y, z) = E_x(t, x, L_y, z) = E_0(1 - e^{-at}), \\ E_y(t, x, -L_y, z) &= E_y(t, x, L_y, z) = 0, E_z(t, x, -L_y, z) = E_z(t, x, L_y, z) = 0, \\ E_x(t, x, y, -L_z) &= E_x(t, x, y, L_z) = E_0, E_y(t, x, y, -L_z) = E_y(t, x, y, L_z) = 0, \\ E_z(t, x, y, -L_z) &= E_z(t, x, y, L_z) = 0, \rho_e(t, -L_x, y, z) = \rho_i(t, -L_x, y, z) = 0, \\ \rho_e(t, L_x, y, z) &= \rho_i(t, L_x, y, z) = S \exp[-b(y^2 + z^2)](1 - e^{-at}), \\ \rho_e(t, x, \pm L_y, z) &= \rho_i(t, x, \pm L_y, z) = 0, \rho_e(t, x, y, \pm L_z) = \rho_i(t, x, y, \pm L_z) = 0, \end{aligned} \quad (3)$$

В случае решения плоской задачи полагаем в условиях (3) $z = 0, E_z = 0$ и исключаем граничные условия при $z = \pm L_z$.

Основные результаты расчетов электронной плотности по модели (1), (3) были получены при следующих параметрах задачи:

$$\begin{aligned} a &= 1, D_e = 0.1, D_i = 0.001, D_E = 1000, k_i = 0, L_y = L_z = 100, \\ E_0 &= 0.1 \div 0.5, S = 10^{-4} \div 10^{-3}, b = 0.015 \div 0.15, L_x = 10^2 \div 10^3. \end{aligned} \quad (4)$$

Из полученных результатов [18-19] следует, что распределение плотности электронов в 2D и 3D моделях отличается несущественно, что объясняется специфической геометрией стримера Саффмана-Тейлора.

Линия раздела плотности в теории [35] описывается уравнением:

$$\frac{x + ut}{L_y} = \frac{1 - \lambda}{\pi} \ln \frac{1}{2} \left(1 + \cos \frac{\pi y}{\lambda L_y} \right) \quad (5)$$

Как было установлено в экспериментах [35], параметр $\lambda = 1/2$, хотя в теории стримеров этот параметр может принимать любое значение в зависимости от скорости $u = E_0 / \lambda$ [18-19, 23].

Геометрия стримера в модели (1) не совпадает в деталях с геометрией стримера Саффмана-Тейлора [35], хотя при некоторых значениях параметров наблюдается практически идеальное совпадение кривой (5) с линиями уровня плотности электронов – левый рис. 1.

Рассмотрим аналитическую модель распространения стримера в заданном внешнем поле. Положим в уравнениях (1) все величины зависящими от переменных $\xi = x + ut, y, z$, тогда система (1) приводится к виду

$$\begin{aligned} u \frac{\partial \rho_e}{\partial \xi} &= D_e \nabla^2 \rho_e + \nabla \cdot (\rho_e \mathbf{E}) + \rho_e |\mathbf{E}| \exp(-1/|\mathbf{E}|) \\ u \frac{\partial \rho_i}{\partial \xi} &= D_i \nabla^2 \rho_i + k_i \nabla \cdot (\rho_i \mathbf{E}) + \rho_e |\mathbf{E}| \exp(-1/|\mathbf{E}|) \\ u \frac{\partial \mathbf{E}}{\partial \xi} &= D_E (\nabla^2 \mathbf{E} + \nabla \rho_e - \nabla \rho_i) \end{aligned} \quad (6)$$

Здесь оператор $\nabla = (\partial/\partial \xi, \partial/\partial y, \partial/\partial z)$. Стример Саффмана-Тейлора это плоское линейное решение первого уравнения (6). Полагая в этом уравнении электрическое поле постоянным $\mathbf{E} = (E_0, 0, 0)$, ищем решение в виде

$$\rho_e = \rho_0 \exp(k_x \xi) \cos(k_y y) \quad (7)$$

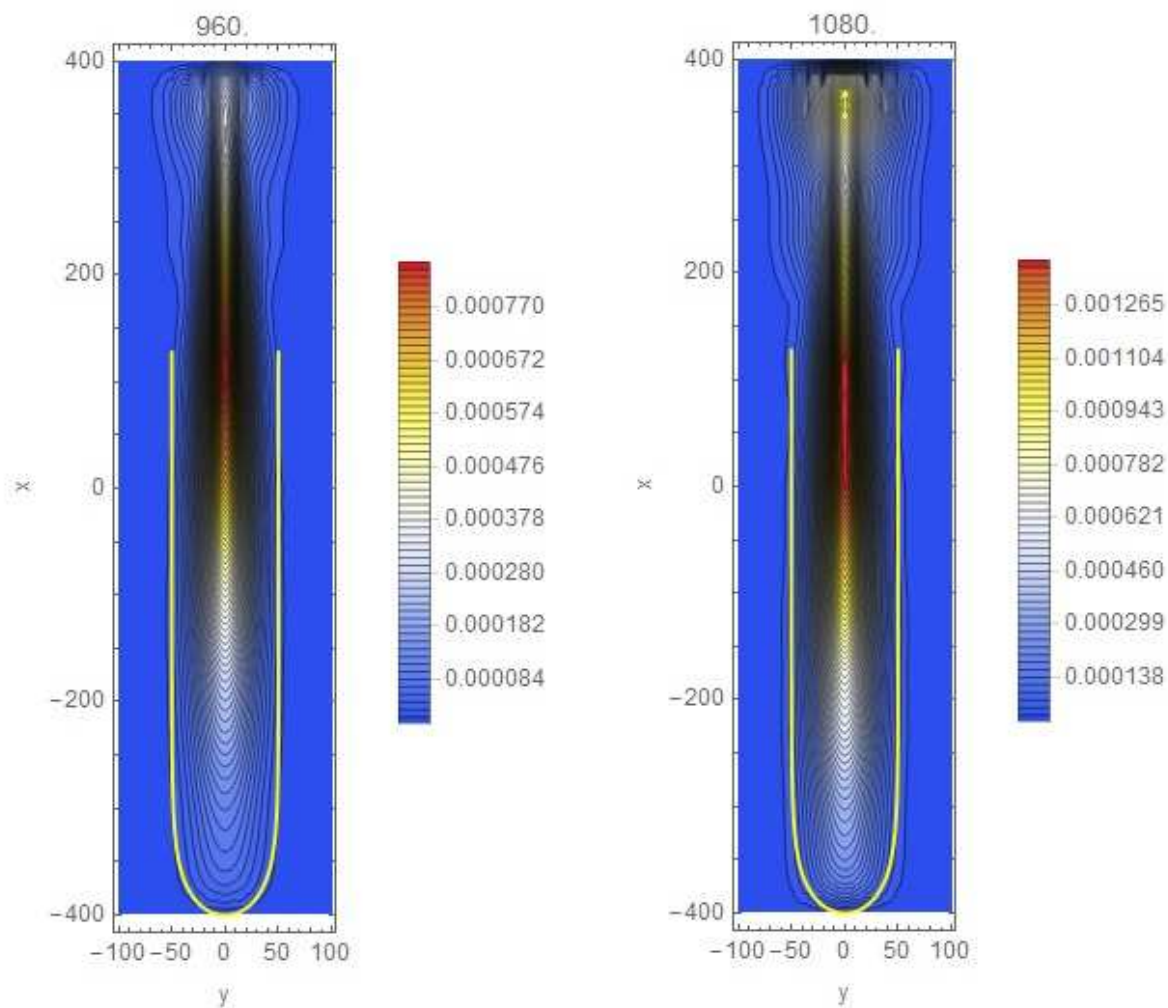


Рис. 1. Линии уровня плотности электронов при распространении стримера в длинном канале во внешнем поле $E_0 = 0.25$, вычисленные в 3D модели в моменты времени $t = 960; 1080$ – левый и правый рисунки соответственно. Желтая линия вычислена по уравнению (5) с параметром $\lambda = 0.5$.

Подставляя (7) в первое уравнение (6), находим дисперсионное соотношение

$$k_x u = D_e (k_y^2 + k_x^2) + k_x E_0 + |E_0| \exp(-1/|E_0|) \quad (8)$$

Предполагая, что линия раздела электронной плотности определяется из уравнения $\rho_e = \rho_0$, находим из первого уравнения путем логарифмирования уравнение линии раздела плотности

$$x + ut = -\frac{\ln \cos(k_y y)}{k_x} \quad (9)$$

Из уравнения (8) следует, что скорость стримера зависит от параметра диффузии и от скорости ионизации. Ранее аналогичные результаты были получены в работе [23], в которой модель стримера Саффмана-Тейлора была использована для нахождения режимов движения с постоянной скоростью и ветвления в 2D. В работе [18] аналогичная задача была решена в трехмерном случае.

Рассмотрим стример как бегущую с постоянной скоростью волну. Положим в уравнениях (1) все величины зависящими от переменных $\xi = x + ut, y, z$, тогда справедлива система уравнений (6). Для решения системы уравнений (6) используем теорию пограничного слоя. Будем считать, что изменение параметров по сечению стримера значительно превосходит изменение параметров вдоль направления его распространения. Это условие заведомо не выполняется на головке стримера. В остальной же области для описания стримера имеем систему уравнений параболического типа

$$\begin{aligned} u \frac{\partial \rho_e}{\partial \xi} &= D_e \nabla_{\perp}^2 \rho_e + \nabla \cdot (\rho_e \mathbf{E}) + \rho_e |\mathbf{E}| \exp(-1/|\mathbf{E}|) \\ u \frac{\partial \rho_i}{\partial \xi} &= D_i \nabla_{\perp}^2 \rho_i + k_i \nabla \cdot (\rho_i \mathbf{E}) + \rho_e |\mathbf{E}| \exp(-1/|\mathbf{E}|) \\ u \frac{\partial \mathbf{E}}{\partial \xi} &= D_E (\nabla_{\perp}^2 \mathbf{E} + \nabla \rho_e - \nabla \rho_i) \end{aligned} \quad (10)$$

Здесь операторы $\nabla = (\partial/\partial \xi, \partial/\partial y, \partial/\partial z)$, $\nabla_{\perp}^2 = (\partial^2/\partial y^2, \partial^2/\partial z^2)$. В рамках модели (10) может быть поставлена и решена задача о ветвлении

стримера в трехмерном случае. Для этого предположим, что в плоскости $z = 0$ в интервале $0 \leq \xi \leq \xi_b$ задано распределение плотности электронов вида (7), а в плоскости $\xi = 0$ задано совместное с ним распределение, имеем

$$\begin{aligned} \xi = 0: \rho_e &= \rho_0 \cos(k_z z) \cos(k_y y), \quad |k_y y| \leq \pi/2, |k_z z| \leq \pi/2 \\ z = 0: \rho_e &= \rho_0 \exp(k_x \xi) \cos(k_y y), \quad 0 \leq \xi \leq \xi_b, |k_y y| \leq \pi/2 \end{aligned} \quad (11)$$

Во всей остальной области и на границах используем нулевые начальные данные. Тогда в области $\xi > \xi_b$ имеем отрыв стримера от плоскости $z = 0$ - рис. 2, что соответствует ветвлению, поскольку плоскость $z = 0$ является плоскостью симметрии. На рис. 2 представлены данные по распределению плотности электронов при ветвлении стримера, рассчитанные по модели (10)-(11) при следующих значениях параметров:

$$\begin{aligned} D_e &= 0.1, D_i = 0.001, D_E = 1000, k_i = 0, k_y = k_z = \pi/60, \\ E_0 &= 0.2; 0.27, u = 1; 1.2, S = 10^{-4}, L_y = L_z = 100, k_x = 0.00597 \end{aligned} \quad (12)$$

Отметим, что волновые числа, коэффициент диффузии электронов, напряженность электрического поля и скорость стримера связаны уравнение (8). Разрешая уравнение (8), находим продольный масштаб стримера в зависимости от параметров модели в виде

$$L_b = \frac{1}{k_x} = \frac{u - E_0}{D_e (k_y^2 + k_x^2) + |E_0| \exp(-1/|E_0|)} \quad (13)$$

Из уравнения (13) следует, что при уменьшении скорости точка ветвления смещается к началу координат. Тот же эффект наблюдается при увеличении коэффициента диффузии или напряженности электрического поля – рис. 2.

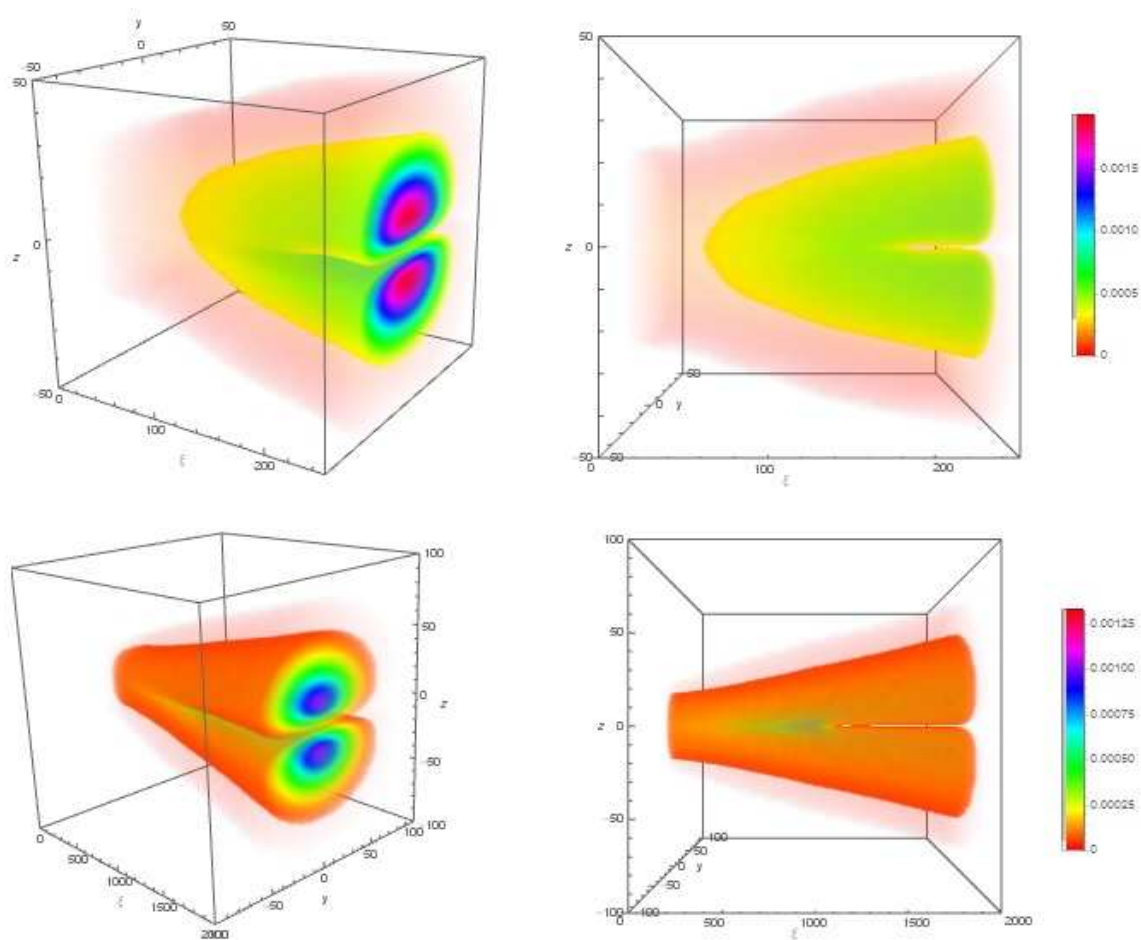


Рис. 2. Распределение плотности электронов при ветвлении стримера для двух значений скорости и напряженности внешнего поля: сверху $u = 1, E_0 = 0.27$, внизу $u = 1.2, E_0 = 0.2$.

Интересной особенностью данной постановки задачи является то, что рассматривается ветвление трехмерного стримера – рис. 2, а не плоского стримера или, что важно, не коническое раскрытие стримера, как в работах [21-23]. Ранее этот вопрос обсуждался в работе [29], где была выведена приближенная модель разделения головки стримера. Линейная теория устойчивости поверхности стримера с учетом токов смещения развита в [30].

Численные модели ветвления стримеров были развиты в работах [18-28] и других.

Ветвление стримера в области катода

Рассмотрим вопрос о ветвлении стримера в рамках нестационарной модели (1). Такого типа ветвление стримера хорошо заметно в верхней части, примыкающей к катоду в момент соударения головки стримера с анодом – рис. 1, 3. Размер ветвей и положение точки ветвления зависит в этом случае от времени, тогда как в модели (10), положение точки ветвления фиксировано в подвижных координатах. На рис. 3 представлены данные моделирования ветвления стримера для значений параметров

$$\begin{aligned} a = 1, D_e = 0.1, D_i = 0.001, D_E = 1000, k_i = 0 \\ S = 10^{-3}, b = 0.15, L_x = 200, L_y = L_z = 100, E_0 = 0.32 \end{aligned} \quad (14)$$

Из данных, приведенных на рис. 3 следует, что в области $50 < x < 150$ стример распадается на отдельные каналы, число которых зависит от напряженности электрического поля и моды возбуждения.

Эти боковые стримеры начинаются и заканчиваются на основном канале. Отметим, что в обсуждаемой модели с прямоугольными ячейками возбуждаются моды с 4, 6, 8 и т.д. боковыми каналами. При этом центральный канал сохраняется, как основа, на которой замыкаются ветви боковых каналов [18].

Стримеры такого типа, замыкающие головку основного стримера на катод можно видеть на рис. 5 из работы [24]. На указанном рисунке, представляющем собой высокоскоростную электронно-оптическую фотографию процесса развития стримера, хорошо просматривается геометрия канала, что качественно согласуется с расчетными данными, приведенными выше на рис. 3.

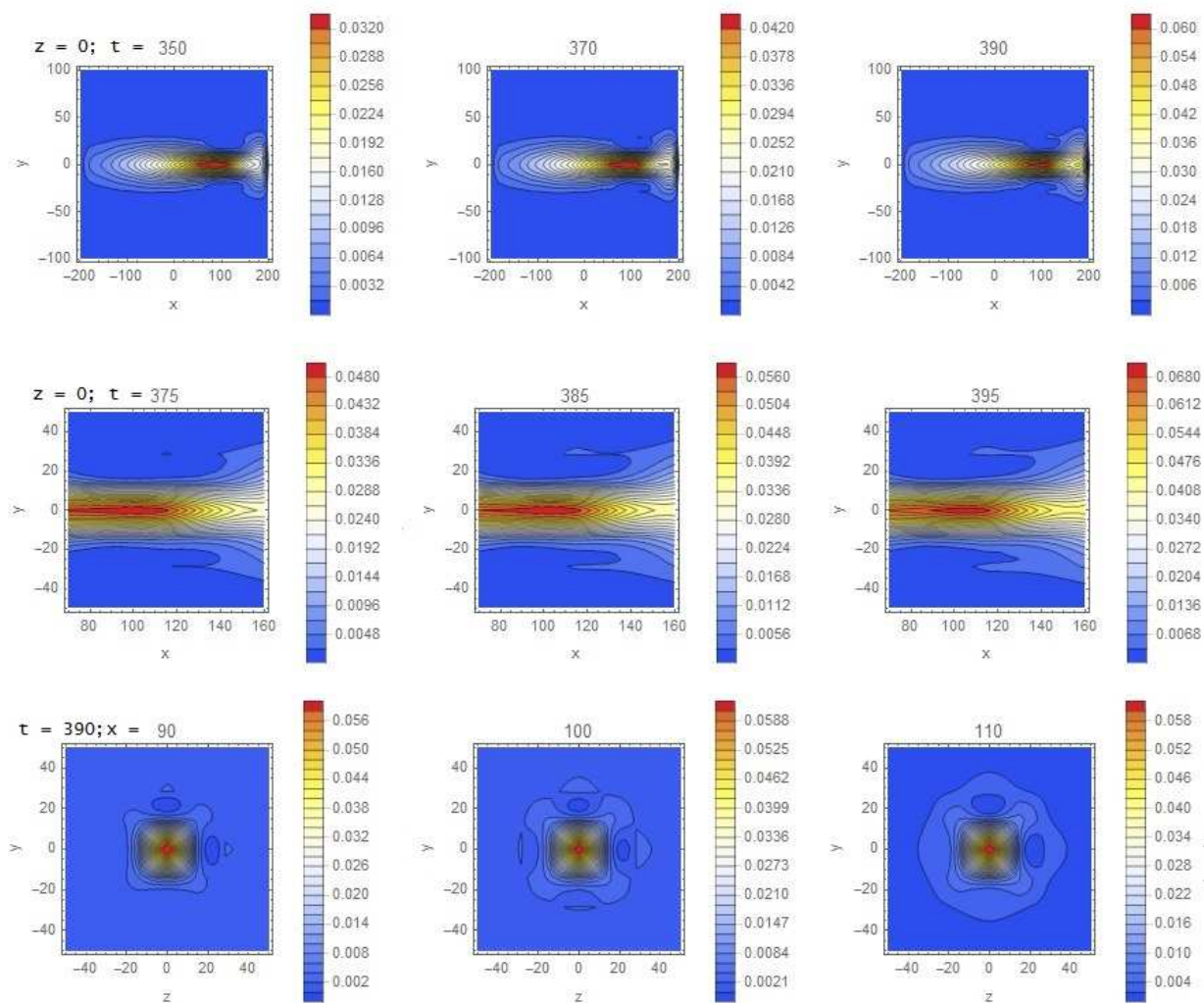


Рис. 3. Распределение плотности электронов в сечении $z=0$ при соударении стримера с анодом в моменты времени $t = 350; 370; 390$ – вверху. Распределение плотности электронов в плоскости (x, y) в сечении $z=0$ (средние рисунки) и в плоскости (y, z) в сечениях $x = 90; 100; 110$ (нижние рисунки) при ветвлении стримера в области катода во внешнем поле $E_0 = 0.32$.

Время процесса ветвления стримеров в области катода существенно зависит от напряженности внешнего электрического поля. Так, при напряженности поля $E_0 = 0.32$, боковые стримеры возникают в интервале времени $370 < t < 430$. Тогда как при напряженности электрического поля $E_0 = 0.27$ боковые стримеры возникают в интервале $600 < t < 650$ [18]. Отметим, что при ветвлении стримера в области катода нарушается осевая симметрия, поперечное сечение стримера принимает характерный прямоугольный вид, что описывается первым уравнением (11) – рис. 3.

Таким образом, в численных расчетах мы установили два механизма ветвления стримера, один из которых связан с разделением головки стримера на две части – рис. 2, а второй механизм связан с замыканием основного канала стримера на катод через систему боковых стримеров – рис. 3. Оба механизма ветвления стримера наблюдаются в экспериментах [31].

В работе [12] обнаружен третий механизм ветвления, при котором основание плазмоида замыкается на анод через систему боковых стримеров. Этот механизм получил объяснение в нашей работе [19].

Модель плазмоида

Мы предполагаем, что плазмоид типа [6-12], это разновидность стримера, возникающего в проводящей среде при электрическом разряде над водной поверхностью. Для его моделирования на основе системы уравнений (1) необходимо определить область параметров, в которой плазмоид может сформироваться. Прежде всего, это большое время формирования плазмоида, по сравнению с характерным временем модели (1) – 3 пикосекунды. Рассмотрим начальную стадию формирования плазмоида, в которой наблюдается ветвление плазмоида в катодной области с образованием многочисленных стримеров. Согласно [12] длительность этой стадии

составляет 17-33 мс, следовательно, в этом случае характерное время задачи $t_0 \approx 10^{10}$, а масштаб области моделирования составляет $L_x = L_y = L_z \approx 5 \cdot 10^3$.

Согласно данным [11], плазмоид достигает размера в диаметре 20 см через 150 мс, после чего начинается автономная стадия. Следовательно, характерное время задачи $t_p \approx 0.5 \cdot 10^{11}$. Сравнивая диаметр плазмоида 10-20 см с характерной длиной пробега электронов в азоте при атмосферном давлении - 2.3 мкм, находим, что масштаб области моделирования $L_x = L_y = L_z \approx 5 \cdot 10^4$. Скорость стримера типа плазмоида относительно мала в сравнении с характерной скоростью распространения стримера $u_s = 0.76667 \cdot 10^3$ км/с.

Действительно, полагая $u_p \approx 2L_x / t_p$, находим, что скорость плазмоида составляет около $2 \cdot 10^{-6} u_s \approx 1.54$ м/с. Отметим, что в экспериментах [12] скорость плазмоида в момент отрыва составляла 1.5 м/с, в экспериментах [6] измеренная скорость плазмоида составляла 0.6-0.8 м/с, тогда как в [11] сообщается о скорости в момент отделения 2 м/с.

Разброс данных по скорости отрыва, видимо, объясняется течением паровоздушной смеси, входящей в состав плазмоида, т.е. при условиях проведения экспериментов, описанных в [6-12] следует учитывать также поток пара, возникающий при испарении воды в области катода.

Сделаем замену переменных

$$t = \lambda^2 t', (x, y, z) = \lambda(x', y', z'), \mathbf{E}' = \lambda \mathbf{E}, \rho'_e = \lambda^2 \rho_e, \rho'_i = \lambda^2 \rho_i \quad (15)$$

Опуская штрихи, приведем систему уравнений (1) к виду

$$\begin{aligned}
 \frac{\partial \rho_e}{\partial t} &= D_e \nabla^2 \rho_e + \nabla \cdot (\rho_e \mathbf{E}) + \lambda \rho_e |\mathbf{E}| \exp(-\lambda / |\mathbf{E}|) \\
 \frac{\partial \rho_i}{\partial t} &= D_i \nabla^2 \rho_i + k_i \nabla \cdot (\rho_i \mathbf{E}) + \lambda \rho_e |\mathbf{E}| \exp(-\lambda / |\mathbf{E}|) \\
 \frac{\partial \mathbf{E}}{\partial t} &= D_E (\nabla^2 \mathbf{E} + \nabla \rho_e - \nabla \rho_i)
 \end{aligned}
 \tag{16}$$

Следовательно, изменение масштаба области формирования стримера не меняет вида системы уравнений (1) с точностью до слагаемого, описывающего скорость ионизации. Отметим, что для данных приведенных в [18], а также выше на рис. 1-3, вклад объемной ионизации сравнительно мал, а процесс формирования стримера обусловлен наличием нейтральной плазмы на катоде. В случае плазмоида при расширении с параметрами $E_0 \leq 1, \lambda \gg 1$ вклад объемной ионизации микроскопически мал, поэтому им можно пренебречь.

Из выражений (15) следует, что напряженность поля и плотность электронов в области плазмоида меньше таковой для стримера в λ, λ^2 соответственно. Так, для $\lambda = 500$ характерная напряженность электрического поля составит в заданном масштабе электрического поля $E_s / \lambda = 400 \text{ V / cm}$. С другой стороны, по данным [6,11-12] находим типичное значение напряженности поля – 300-350 В/см.

Вольтамперная характеристика разряда над поверхностью электролита (воды) с образованием плазмоида приведена в [10-11]. Используя эти данные, сформулируем задачу для системы уравнений (16), имеем

$$\begin{aligned}
 E_x(t, \pm Lx, y, z) &= F_x(t, \pm Lx, y, z); E_y(t, \pm Lx, y, z) = F_y(t, \pm Lx, y, z); \\
 E_z(t, \pm Lx, y, z) &= F_z(t, \pm Lx, y, z); E_x(t, x, \pm Ly, z) = F_x(t, x, \pm Ly, z); \\
 E_y(t, x, \pm Ly, z) &= F_y(t, x, \pm Ly, z); E_z(t, x, \pm Ly, z) = F_z(t, x, \pm Ly, z); \\
 E_x(t, x, y, \pm Lz) &= F_x(t, x, y, \pm Lz), E_y(t, x, y, \pm Lz) = F_y(t, x, y, \pm Lz); \\
 E_z(t, x, y, \pm Lz) &= F_z(t, x, y, \pm Lz) = 0, \rho_e(t, -Lx, y, z) = \rho_i(t, -Lx, y, z) = 0; \\
 \rho_e(t, Lx, y, z) &= \rho_i(t, Lx, y, z) = S \exp[-b(y^2 + z^2)]ate^{-at}; \\
 \rho_e(t, x, \pm Ly, z) &= \rho_i(t, x, \pm Ly, z) = 0; \rho_e(t, x, y, \pm Lz) = \rho_i(t, x, y, \pm Lz) = 0.
 \end{aligned}
 \tag{17}$$

Здесь $\mathbf{F}(t, x, y, z)$ – внешнее поле, которое в этой задаче является нестационарным и пространственно неоднородным – рис. 4-5. Изменение внешнего поля во времени обусловлено разрядом конденсатора, поэтому может быть представлено в форме произведения статического поля и функции, зависящей от времени, $\mathbf{F}(t, x, y, z) = \mathbf{F}_0(x, y, z)f(t)$. Без ограничения общности положим $f(t) = at \exp(-at)$. Статическое поле определяется путем решения задачи о распределении потенциала в системе с заданной геометрией [11,18].

Рассмотрим вопрос о моделировании электростатического потенциала в системе. На рис. 4 представлено распределение потенциала и электрического поля в установках, описанных в [6, 11]. Установка [6] представляет собой пластиковый сосуд, наполненный электролитом, на дно сосуда помещают электрод (анод) в форме кольца с широким отверстием, а по центру вдоль оси размещают второй электрод (катод), которые приподняты над дном сосуда – правый рис. 4. Дизайн установки [11] отличается несущественно – отверстие кольца является узким, а центральный электрод проходит через это отверстие – левый рис. 4. Отметим, что распределение потенциала, приведенное на левом рис. 4, качественно совпадает с тем, что приведено в работе [11].

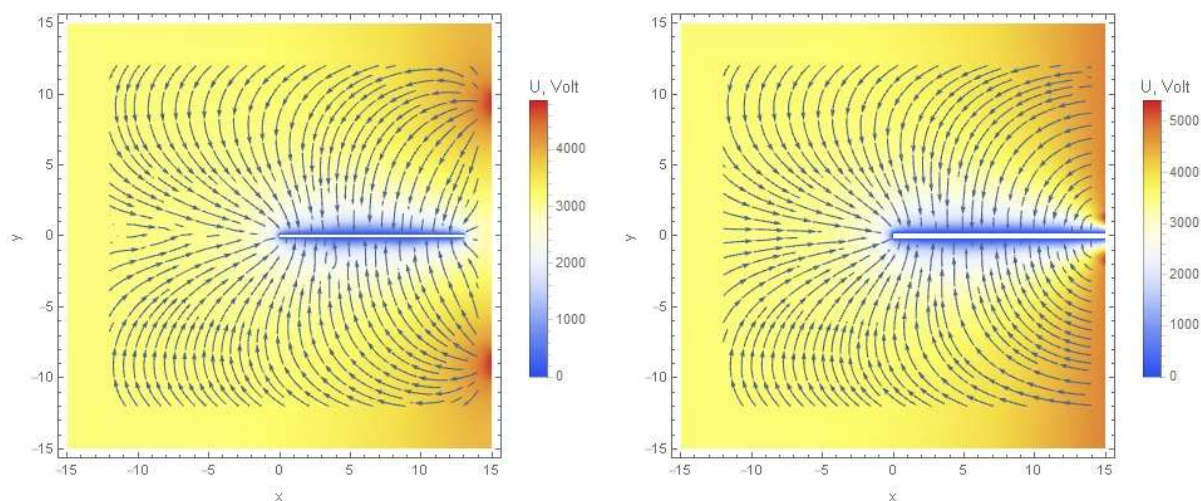


Рис. 4. Распределение потенциала и электрического поля в установках типа [6] (слева) и [11] (справа).

Рассмотрим механизм ветвления плазмоида путем замыкания его основания через систему стримеров на анод. Эти стримеры хорошо просматриваются на фотографиях, приведенных в работах [10-12]. Для моделирования эффекта используем систему уравнений (16) с граничными условиями (17), которые теперь включают область анода. Следовательно, предполагаем, что в области анода существует источник нейтральной плазмы с плотностью $S \exp[-b(y^2 + z^2)]ate^{-at}$. Вторым объемным источником плазмы с интенсивностью $S_1 \exp[-b_2(x - L_c)^2 - b_1(y^2 + z^2)]ate^{-at}$ помещаем в области катода, т.е. добавляем это слагаемое в правые части первого и второго уравнений (16). Здесь L_c - координата катода. При соответствующем подборе параметров в основании плазмоида возникает система боковых стримеров, замыкающих объемный заряд на анод – рис. 5. Для получения данных мы использовали следующие параметры

$$\lambda = 500, t_p = 10^{11} / \lambda^2, a/t_p = 0.1, b = 10^{-4}, b_1 = 1/6, b_2 = 1/2, L_0 = 80, \\ D_e = 0.1, D_i = 0.001, k_i = 0, D_E = 10^4, S = 10^{-5}, S_1 = 2 \cdot 10^{-4}, L_x = L_y = 120. \quad (20)$$

Кроме того, считаем, что в области электролита $D_E = 50$. Электрическое поле по амплитуде задаем в 10 раз меньше, чем для данных на рис. 1. В результате в области над катодом возникает плазмоид, объемный заряд которого соединен стримерами с анодом – рис. 5.

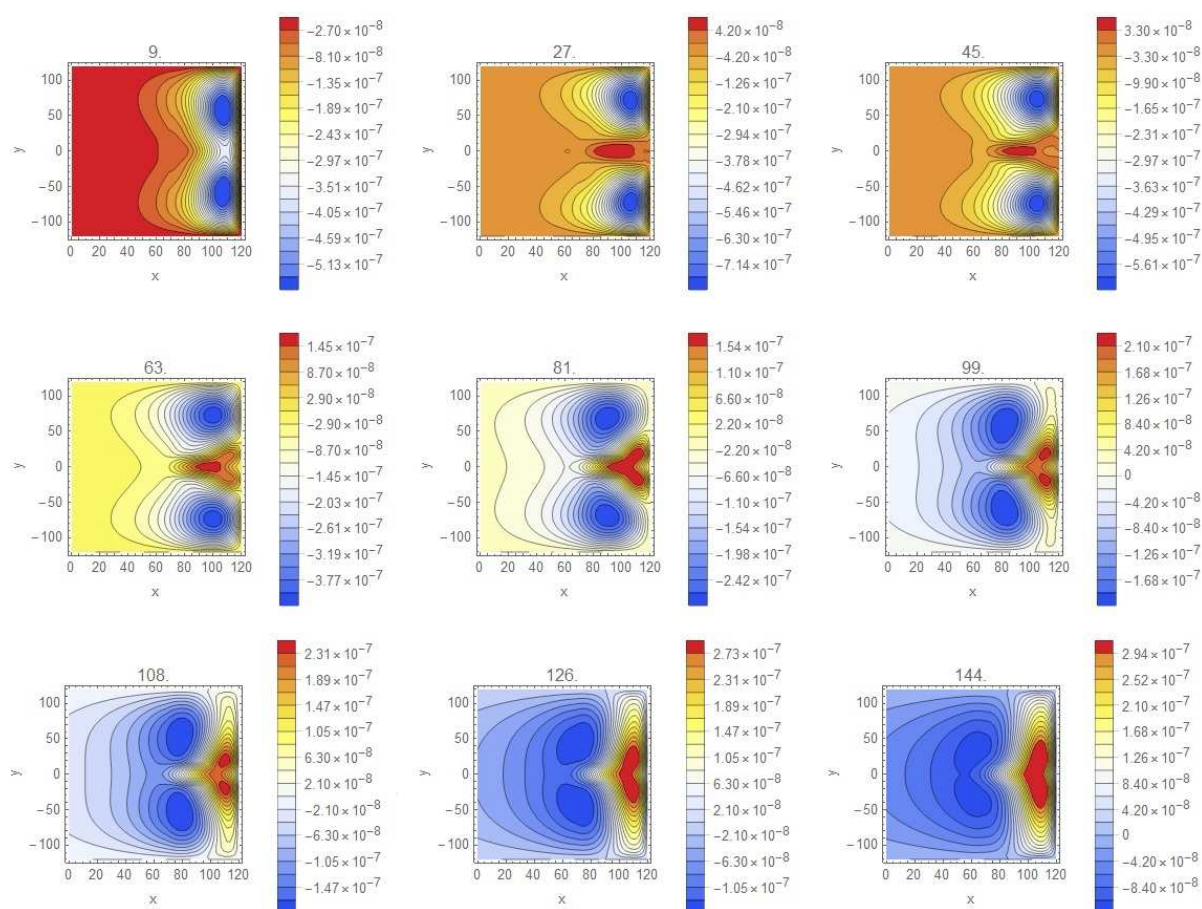


Рис. 5. Распределения плотности заряда $\rho_i - \rho_e$ в плоскости (x, y) в различные моменты реального времени в миллисекундах (указаны над рисунками). Анод находится справа в сечении $x=120$, плоскость катода находится в сечении $x=80$. В области между катодом и анодом видны боковые стримеры, замыкающие объемный заряд плазмоида на анод.

Согласно приведенным в [19] расчетам плазмоид в форме электронного облака формируется при любых условиях даже в сухом воздухе. Однако для визуализации плазмоида необходимо над катодом создать область, насыщенную ионами, что достигается путем испарения воды с центрального электрода [6].

Таким образом, мы показали, что плазмоид типа [6-12] можно описать системой уравнений (1) при соответствующем выборе параметров. В данной модели плазмоид рассматривается как долгоживущий стример. В работе [19] указана область параметров, в которой формируется плазмоид сферической формы.

Имеется сходство шаровой молнии по описаниям очевидцев [1, 3-5, 36] и плазмоида [6-12, 32-33]. Если это сходство подтвердится, то число теоретических гипотез относительно природы шаровой молнии, которых в настоящее время более 200 [7], может резко сократиться [19].

Эволюция шаровых скоплений зарядов

И так, согласно гипотезам [1, 3-19] шаровая молния представляет собой смесь положительного (ионы) и отрицательного электричества (ионы, электроны). Исследование таких образований даже в теории часто упирается в вопросы устойчивости. Модель плазмоида типа (16) позволяет решить проблему устойчивости, так как это система уравнений параболического типа.

Заметим, что даже быстропротекающий процесс образования стримера с учетом ионизации может быть описан в модели (1). Действительно, результаты моделирования развития стримеров в трехмерном случае приведены в [18-19] и на рис. 1. Процессы ветвления, связанные с

неустойчивостью стримеров также могут быть описаны в модели (1) – см. рис. 2-3, 5 и данные, приведенные в [18-19].

Априори не ясно, будут ли некоторые произвольные распределения зарядов обладать устойчивостью. Поэтому рассмотрим в рамках модели (16) задачу об эволюции сферически-симметричной системы зарядов, состоящей из ядра ионов и электронной оболочки – рис. 6-9. Прежде всего, заметим, что в такой системе, помещенной в проводящую среду, заряд не сохраняется. Поэтому время существования системы всегда конечно. Тем не менее, в такой системе могут наблюдаться переходные процессы и автоколебания, обусловленные взаимодействием ионов и электронов.

Предположим, что имеется сферически-симметричное распределение положительных ионов с плотностью $\rho_i(0, r) = S_i \exp[-b_i(r - r_i)^2]$. Вокруг этого распределения создается электронная оболочка с плотностью $\rho_e(0, r) = S_e \exp[-b_e(r - r_e)^2]$. На границах системы зададим условия стока ионов и электронов, что обусловлено рекомбинацией зарядов. В начальный момент времени система может иметь положительный, отрицательный или нейтральный заряд. В последующие моменты времени система перезарядается, в результате ее заряд может быть больше или меньше начального значения – рис. 6-7.

На рис. 6 представлены данные моделирования перестройки электронной оболочки и общего заряда системы, полученные по модели (16) при следующих значениях параметров

$$\begin{aligned} b_e &= 0.05, b_i = 0.0005, S_e = 10^{-5}, \\ D_e &= 0.1, D_i = 0.001, k_i = 0, r_i = 0, r_e = 150; L = 300. \\ D_E &= 10^2; 10^3; 10^4, \quad S_i = 7.1 \cdot 10^{-5}; 5.75 \cdot 10^{-5}; 4.5 \cdot 10^{-5} \end{aligned} \quad (21)$$

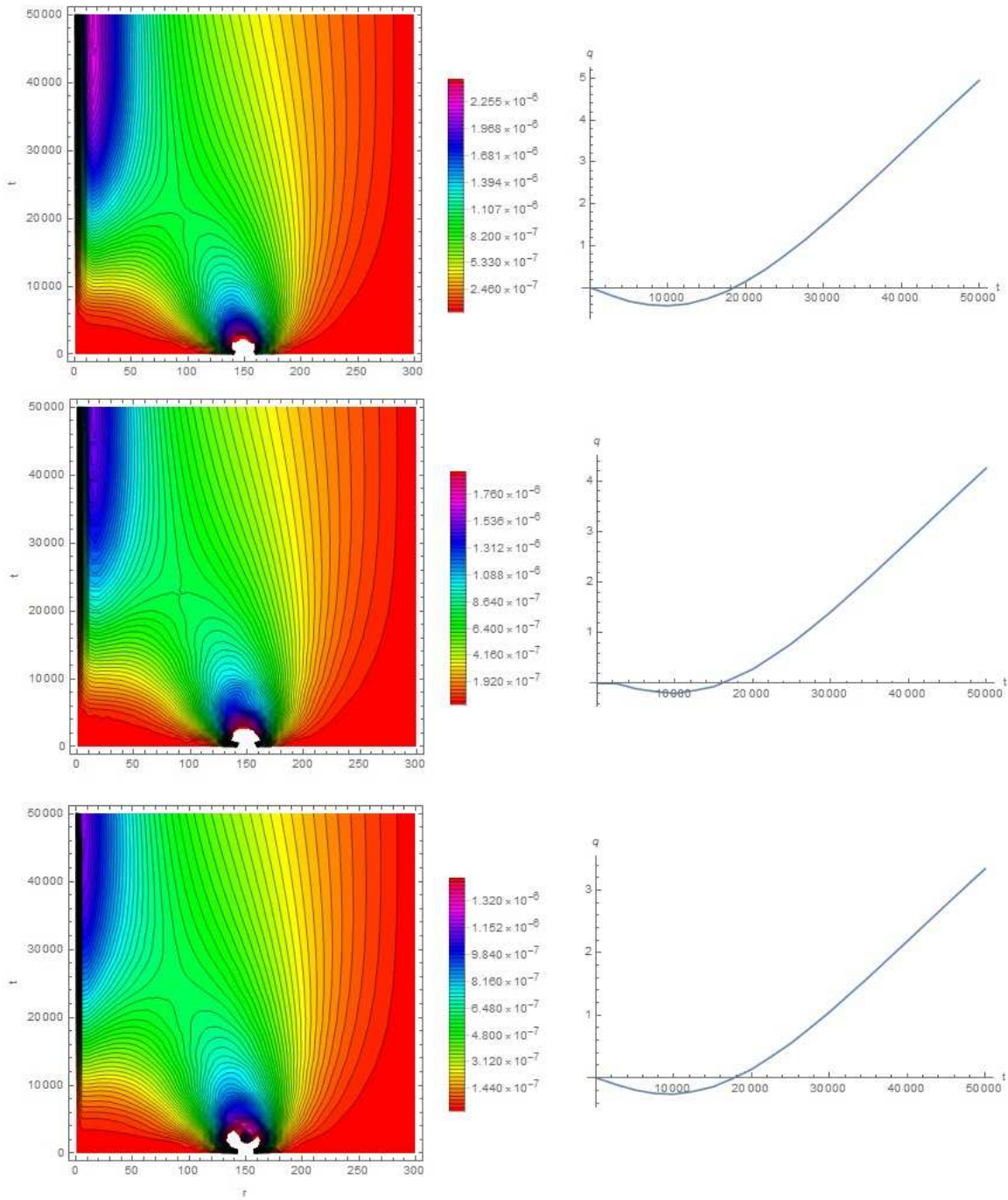


Рис. 6. Плотность электронов – слева и заряд системы – справа, вычисленные для трех значений параметра диффузии $D_E = 10^2; 10^3; 10^4$ - сверху вниз соответственно.

Отметим, что распределение ионов задается в соответствии с изменением параметра диффузии электрического поля, который, в свою очередь, определяется через проводимость $D_E = 1/\sigma\mu$. Таким образом, увеличивая проводимость окружающей среды, увеличиваем ток в системе, что приводит к ее перезарядке – рис. 6. В начальный период установления распределения плотности электронов заряд системы является отрицательным, а затем знак заряда меняется.

Из приведенных на рис. 6 данных следует, что начальное распределение электронов неустойчиво. Электроны смещаются в сторону положительно заряженного ядра, а затем распределяются во всей доступной области с максимумом концентрации вблизи начала координат. Распределение ионов в этом масштабе времени изменяется незначительно – рис. 7.

На рис. 7 представлены данные моделирования перестройки электронной оболочки, изменения общего заряда системы и плотности ионов, полученные по модели (16) при следующих значениях параметров

$$\begin{aligned} b_e &= 0.05, b_i = 0.0005, S_e = 10^{-5}, \\ D_e &= 0.1, D_i = 0.001, k_i = 0, r_i = 0, r_e = 150; L = 300. \\ D_E &= 10^2; 10^3; 10^4, S_i = 4.5 \cdot 10^{-5} \end{aligned} \quad (22)$$

Распределение ионов в начальный и конечный момент времени показано на рис. 7 верхней и нижней границей области соответственно.

Отметим различие в постановках задачи для данных на рис. 6 и 7. Данные (21) подобраны так, что исходный заряд системы является нейтральным – рис. 6. В данных же (22) фиксировано начальное распределение ионов – рис. 7.

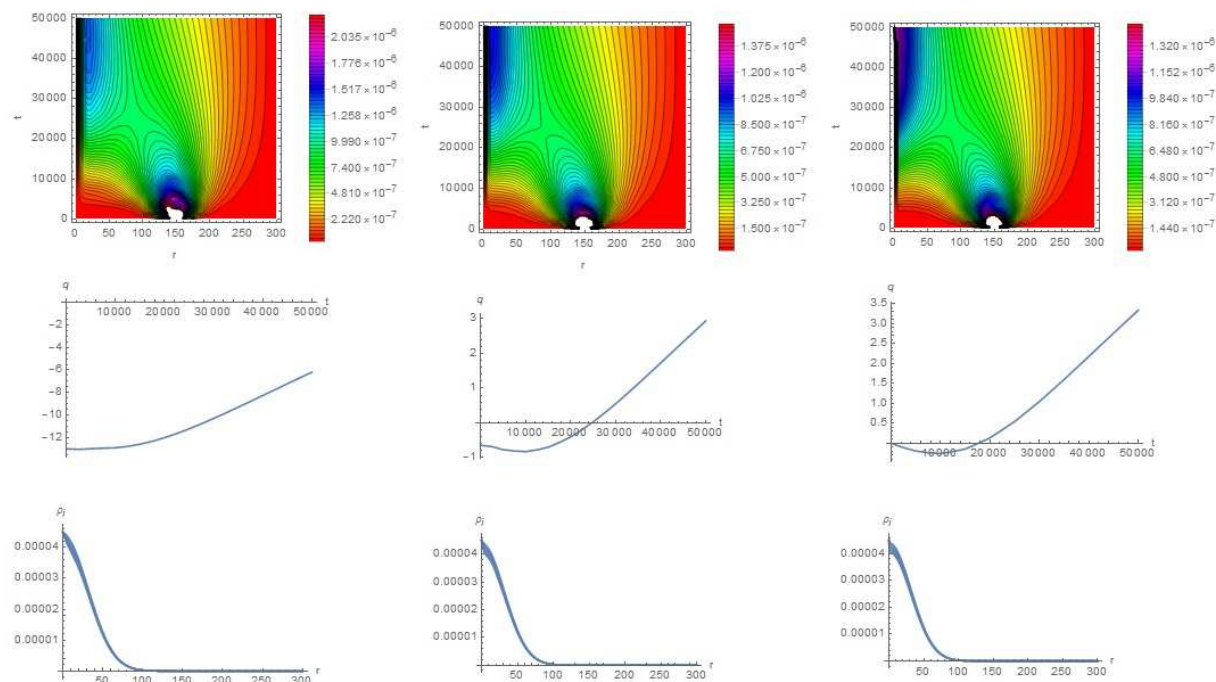


Рис. 7. Плотность электронов – сверху, заряд системы – средние рисунки, и распределение плотности ионов – внизу, вычисленные для трех значений параметра диффузии $D_E = 10^2; 10^3; 10^4$ - слева направо соответственно.

Сравнивая данные на рис 6 и 7, находим, что во всех случаях заряд системы возрастает на больших промежутках времени за счет ненулевого тока в системе. Однако для еще больших промежутков времени, характеризующих формирование плазмоида $t_p = 10^{11} / \lambda^2 = 400000$, заряд системы стремится к некоторому максимуму, а затем уменьшается за счет диффузии – рис. 8.

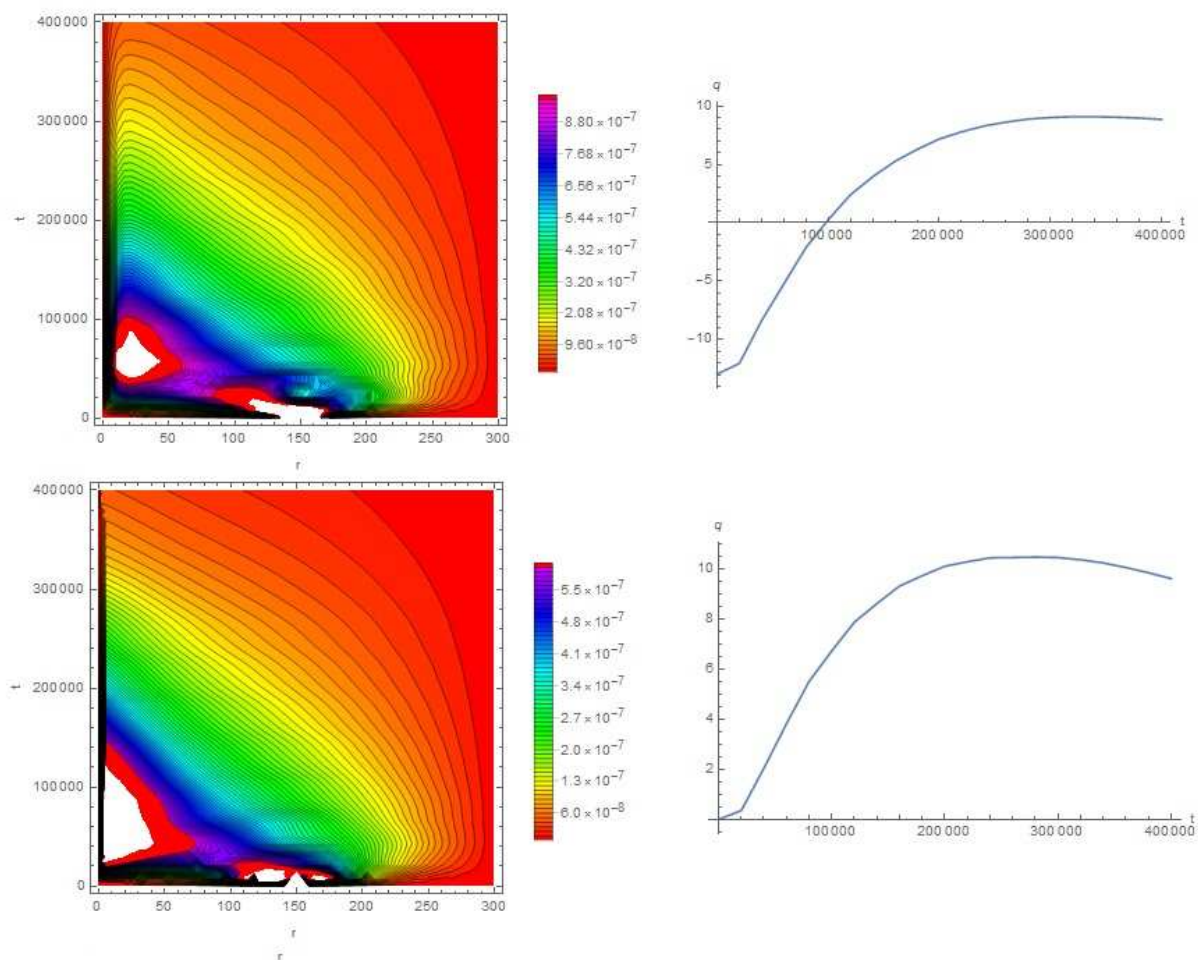


Рис. 8. Плотность электронов – слева и заряд системы – справа, вычисленные для двух значений параметра диффузии $D_E = 10^2; 10^4$ - сверху вниз соответственно.

Заметим, что даже в случае большого начального отрицательного заряда в конечном состоянии заряд системы является положительным. Это свойство плазмоида сохраняется и в том случае, когда начальное распределение ионов и электронов совпадает. На рис. 9 представлены данные моделирования перестройки электронной оболочки, изменения общего заряда системы, электрического поля и плотности ионов, полученные по модели (16) при следующих значениях параметров

$$\begin{aligned}
 b_e = b_i = 0.005, S_e = S_i = 10^{-5}, r_e = r_i = 150; \\
 D_e = 0.1, D_E = 10^3, D_i = 0.001, k_i = 0, L = 300.
 \end{aligned}
 \tag{23}$$

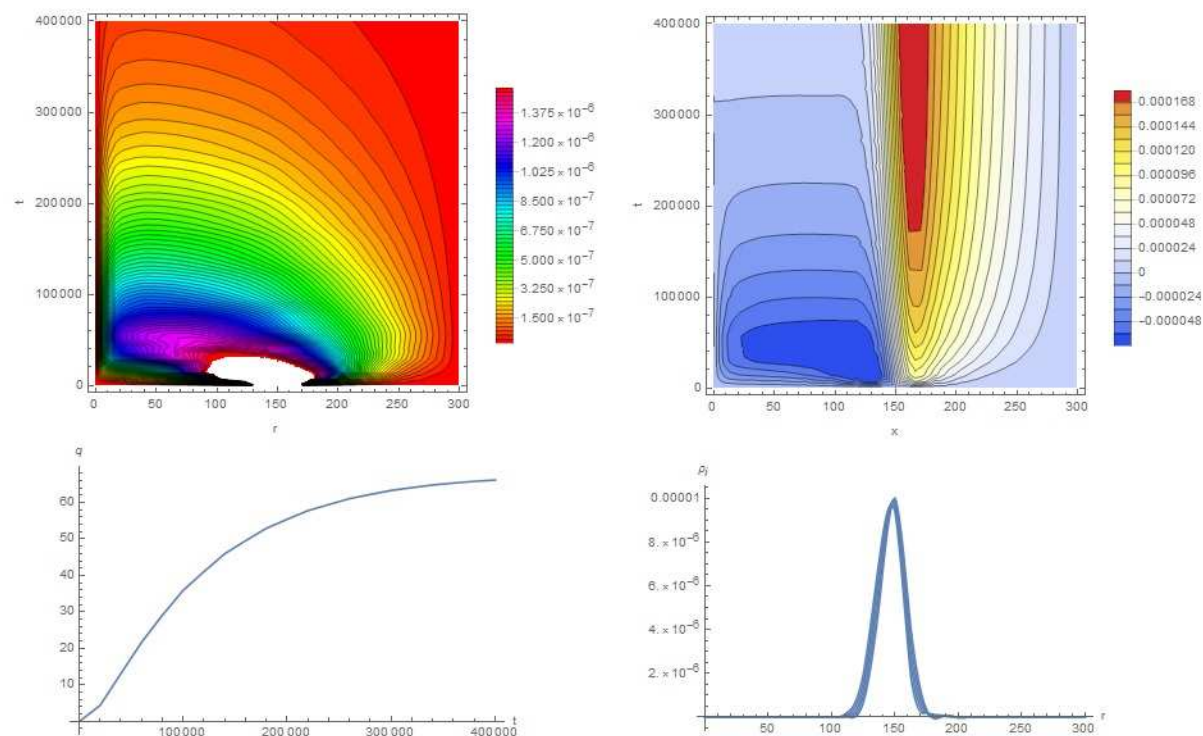


Рис. 9. Плотность электронов – слева сверху, линии уровня напряженности электрического поля – справа сверху, заряд системы и распределение плотности ионов – внизу, вычисленные по данным (23).

Отметим слабое изменение плотности ионов даже в случае их распределения по оболочке – рис. 9. Во всех случаях высокая подвижность электронов приводит к их потере и, как следствие, к перезарядке системы. Следовательно, плазмоид такого типа будет заряжен положительно. Учитывая же тот факт, что заряд земли является отрицательным, приходим к выводу, что шаровая молния в форме плазмоида с ядром из положительных ионов должна притягиваться к воде, земле и ко всем заземленным предметам.

При концентрации зарядов выше некоторой критической ситуация меняется. Начальная стадия перезарядки электронами затягивается на все время формирования плазмоида. В результате плазмоид заряжается отрицательным зарядом – рис. 10.

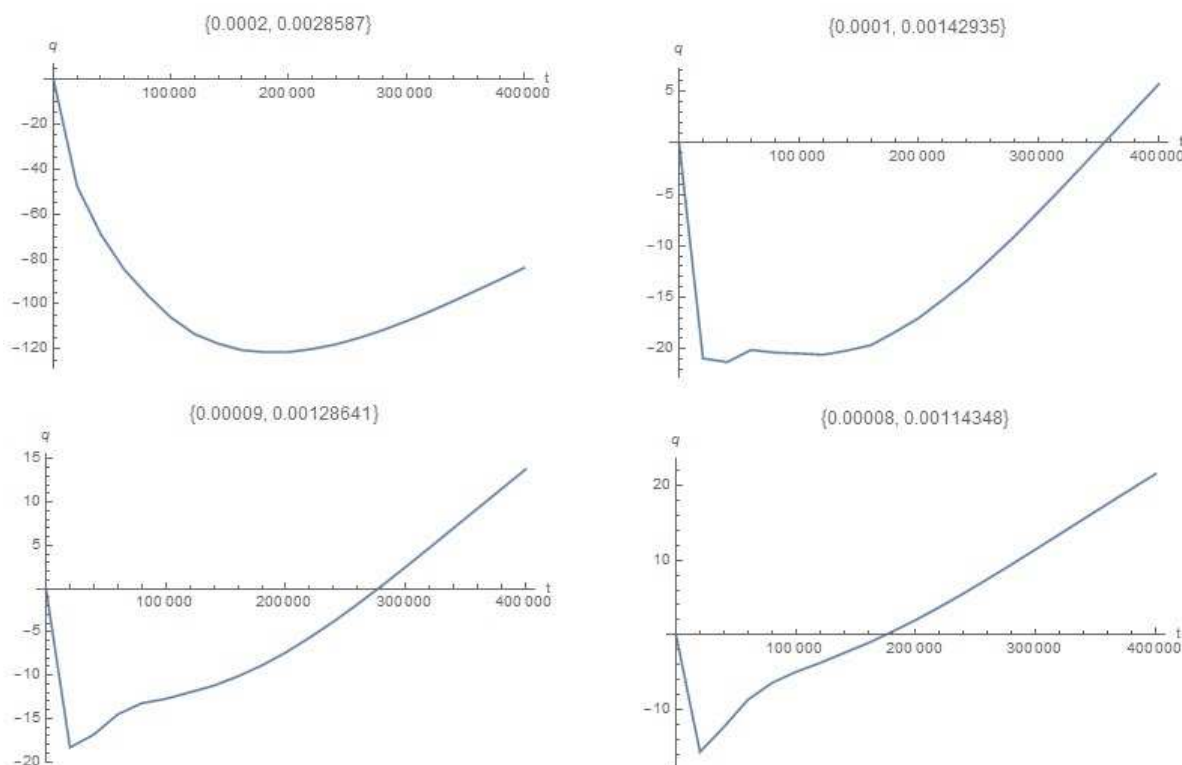


Рис. 10. Зависимость заряда системы от времени при изменении параметров концентрации зарядов – указаны над рисунками в формате $\{S_e, S_i\}$.

Данные на рис. 10 получены при следующих значениях параметров

$$\begin{aligned}
 b_e &= 0.005, b_i = 0.0005, k_i = 0, r_i = 0, r_e = 150, L = 300, \\
 D_E &= 10^3, D_e = 0.1, D_i = 0.001
 \end{aligned}
 \tag{24}$$

Следовательно, существуют шаровые молнии другого типа, которые отталкиваются от земли и резко взмывают в небо. Наконец, при некотором сочетании параметров система приобретает нейтральный заряд – рис. 11.

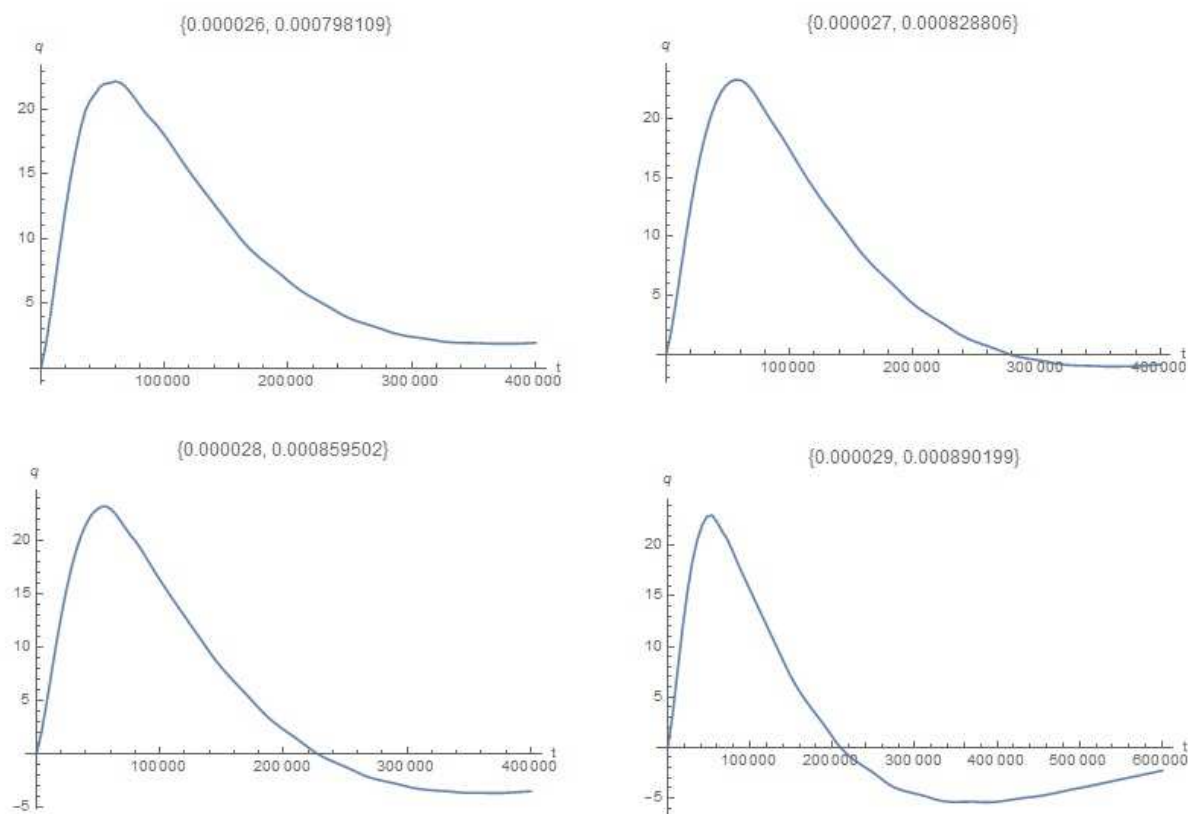


Рис. 11. Зависимость заряда системы от времени при изменении параметров концентрации зарядов – указаны над рисунками в формате $\{S_e, S_i\}$.

Данные на рис. 11 получены при следующих значениях параметров

$$\begin{aligned}
 b_e &= 0.00005, b_i = 0.0005, k_i = 0, r_i = 0, r_e = 0, L = 300, \\
 D_E &= 10^3, D_e = 0.1, D_i = 0.001
 \end{aligned}
 \tag{25}$$

Нейтрально заряженные шаровые молнии, видимо, могут совершать беспорядочные движения [36] в силу отсутствия центра притяжения. Наблюдательные факты [1,3-5, 36] демонстрируют многообразие форм движения, размеров и времени жизни шаровых молний. Однако исследование этих закономерностей выходит за рамки настоящей работы.

Библиографический список

1. OEUVRES COMPLETES DE FRANCOIS ARAGO: TOME I des NOTICES SCIENTIFIQUES. Contenant: LE TONNERRE - ELECTRO MAGNETISME - MAGNETISME TERRESTRE -AURORES BOREALES, - Paris Legrang, 1854. ("Гром и молния". Записка Франсуа Араго, переведенная М. С. Хотинским, СПб, 1859).
2. ФАРАДЕЙ М. ЭКСПЕРИМЕНТАЛЬНЫЕ ИССЛЕДОВАНИЯ ПО ЭЛЕКТРИЧЕСТВУ, ТОМ I. - АН СССР, 1641, 1947.
3. Singer S. The nature of ball lightning. - Plenum, NY, 1971.
4. Стаханов И.П. О физической природе шаровой молнии. – М., Энергоатомиздат, 1985, 208 с.
5. Григорьев А.И. Шаровая молния. – Ярославль: ЯрГУ, 2006. – 200 с.
6. Egorov A. E., Stepanov S. I., Shabanov G. D. Laboratory demonstration of ball lightning// Phys. Uspekhi, vol. 47, no. 1, pp. 99–101, 2004.
7. Шабанов Г.Д. Гипотезы и эксперименты по созданию шаровой молнии//УФН, 180, 2, 2010.
8. Oreshko A.G. Generation of Laboratory Ball Lightning//J. of Physics, 44, 2006, pp. 127-132.
9. Versteegh A., Behringer K., Fantz U., Fussmann G., Juttner B., Noack S. Long-living plasmoids from an atmospheric water discharge//Plasma Source Sci. Technol., vol. 17, no. 2, pp. 024014-1–024014-8, 2008.
10. Emelin S.E., Astafiev A.M., Prizorski A.L. Investigation of Space-Time Structure of the Discharge with an Electrolytic Anode and Face-Type, Air Half-Space Directed Cathode (Gatchina's Discharge)//arXiv:0804.0981v1, 7 Apr 2008.
11. Fantz U., Kalafat S., Friedl R., Briefi S. Generation of an atmospheric plasmoid from a water discharge: An analysis of the dissipated energy// J. Appl. Phys. 114, 043302, 2013; doi: 10.1063/1.4816311
12. Ursel Fantz, Stefan Briefi, Roland Friedl, Martin Kammerloher, Johannes Kolbinger, and Alexander Oswald. Initial Phase of a Large Atmospheric Plasmoid Generated Above a Water Surface//IEEE TRANSACTIONS ON PLASMA SCIENCE, VOL. 42, NO. 10, 2014.
13. БАРАНОВ М. И. Электродинамическая модель шаровой молнии//ЭЛЕКТРИЧЕСТВО, №8, 2013.
14. H.-C. Wu. Theory of ball lightning//arXiv:1411.4784v2 [physics.plasm-ph] 21 Dec 2015.
15. Ignatovich V.K. A model of ball lightning// arXiv:0601127v4, 5 Sep 2011.
16. Shelton J.D. Eddy Current Model of Ball Lightning//arXiv:1102.1224v1 7 Feb 2011.
17. Белый В.А. Шаровая молния: устройство, причина устойчивости. НиТ, 2011.
18. Трунев А.П. Распространение и ветвление стримеров в проводящих средах// Политематический сетевой электронный научный журнал Кубанского государственного аграрного университета (Научный журнал КубГАУ) [Электронный ресурс]. – Краснодар: КубГАУ, 2017. – №04(128). Doi: 10.21515/1990-4665-128-080
19. Трунев А.П. Моделирование плазмоида и стримеров в проводящей среде / Трунев А.П. // Политематический сетевой электронный научный журнал Кубанского государственного аграрного университета (Научный журнал КубГАУ) [Электронный ресурс]. – Краснодар: КубГАУ, 2017. – №05(129). – Режим доступа:

<http://ej.kubagro.ru/2017/05/pdf/41.pdf>, 1,750 у.п.л. – IDA [article ID]: 1291705041.
<http://dx.doi.org/10.21515/1990-4665-129-041>

20. Wu C., Kunhardt E. E. Formation and propagation of streamers in N₂ and N₂-SF₆ mixtures//Physical Review A (General Physics), Volume 37, Issue 11, June 1, 1988, pp.4396-4406.

21. Pasko V.P., Inan U.S., Bell T.F. Spatial structure of sprites// Geophysical Research Letter, V. 25. No.12. pp. 2123-2126. 1998.

22. Montijn C., Ebert U.M., Hansdorfer W. Numerical convergence of the branching time of negative streamers//Phys. Rev. E., 73(6), 65401-1/4. 2006.

23. Alejandro Luque, Fabian Brau, Ute Ebert. Saffman-Taylor streamers: mutual finger interaction in an electric breakdown//Phys. Rev. E 78, 016206, 2008.

24. Баирханова М.Г., Гаджиев М.Х., Курбанисмаилов В.С., Омаров О.А., Рагимханов Г.Б., Катаа А.Д. НЕУСТОЙЧИВОСТЬ ФРОНТА ВОЛНЫ ИОНИЗАЦИИ КАТОДО НАПРАВЛЕННОГО СТРИМЕРА В ГЕЛИИ ВЫСОКОГО ДАВЛЕНИЯ//Прикладная физика. 2009. № 5. С. 62-66.

25. Chao Li, Ute Ebert, Willem Hansdorfer. 3D hybrid computations for streamer discharges and production of run-away electrons// arXiv:0907.0555v2, 14 Jul, 2009.

26. Papageorgiou L., Metaxas A.C., Georghiou G.E. Three-dimensional numerical modeling of gas discharges at atmospheric pressure incorporating photo ionization phenomena// J. App. Phys. 44, 2011, 045203.

27. Белогловский А.А., Верещагин И.П., Хренов С.И. ТРЕХМЕРНАЯ МАТЕМАТИЧЕСКАЯ МОДЕЛЬ СТРИМЕРНОГО РАЗРЯДА В ВОЗДУХЕ С УЧЕТОМ ВЕТВЛЕНИЯ И ФОТОИОНИЗАЦИИ// Вестник МЭИ. 2011. № 3. С. 49-51.

28. Белогловский А.А., Рушальщикова А.В. ИЗУЧЕНИЕ ВЕТВЛЕНИЯ КАТОДОНАПРАВЛЕННОГО СТРИМЕРА В ВОЗДУХЕ ПОСРЕДСТВОМ ТРЕХМЕРНОЙ МАТЕМАТИЧЕСКОЙ МОДЕЛИ//Электричество. 2016. № 7. С. 16-23.

29. Савельева Л.А., Самусенко А.В., Стишков Ю.К. Причины ветвления положительного стримера в неоднородном поле// Электронная обработка материалов, 49(2), 36-47, 2013.

30. Синкевич О.А. Ветвление анодонаправленного стримера// ТВТ, Т. 41, №5, 2003.

31. Карпов М.А., Нефедов В.И., Сигов А.С., Трефилов Н.А., Мамаева О.Ю., Железнова С.Е.. Исследование быстропротекающих процессов электронно-оптическими камерами//Фундаментальные проблемы радиоэлектронного приборостроения, Т. 10. № 1-1. С. 178-189, 2010.

32. Фуров Л.В. Получение автономных долгоживущих плазменных образований в свободной атмосфере//ЖТФ, 75, 3, 2005.

33. Егоров А.И., Степанов С.И. Шаровая молния в лаборатории// Природа, №7, 2011.

34. Лаврентьев О.А. Предложение О.А.Лаврентьева, отправленное в ЦК ВКП(б) 29 июля 1950 г.// УФН, Т.171, №8, 2001.

35. Saffman P. G., Geoffrey Taylor. The Penetration of a Fluid into a Porous Medium or Hele-Shaw Cell Containing a More Viscous Liquid//Proc. R. Soc. Lond. A, 245, 1958.

36. Stefano Sello, Paolo Viviani, Enrico Paganini. Ball lightning observation: an objective video-camera analysis report// arXiv:1102.2829v2 18 Feb 2011.

References

1. OEUVRES COMPLETES DE FRANCOIS ARAGO: TOME I des NOTICES SCIENTIFIQUES. Contenant: LE TONNERRE - ELECTRO MAGNETISME - MAGNETISME TERRESTRE -AURORES BOREALES, - Paris Legrang, 1854. ("Grom i molnija". Zapiska Fransua Arago, perevedennaja M. S. Hotinskim, SPb, 1859).
2. FARADEJ M. JeKSPERIMENTAL'NYE ISSLEDOVANIIJa PO JeLEKTRICHESTVU, TOM I. - AN SSSR, 1641, 1947.
3. Singer S. The nature of ball lightning. - Plenum, NY, 1971.
4. Stahanov I.P. O fizicheskoj prirode sharovoj molnii. – M., Jenergoatomizdat, 1985, 208 s.
5. Grigor'ev A.I. Sharovaja molnija. – Jaroslavl': JarGU, 2006. – 200 s.
6. Egorov A. E., Stepanov S. I., Shabanov G. D. Laboratory demonstration of ball lightning// Phys. Uspekhi, vol. 47, no. 1, pp. 99–101, 2004.
7. Shabanov G.D. Gipotezy i jeksperimenty po sozdaniju sharovoj molnii//UFN, 180, 2, 2010.
8. Oreshko A.G. Generation of Laboratory Ball Lightning//J. of Physics, 44, 2006, pp. 127-132.
9. Versteegh A., Behringer K., Fantz U., Fussmann G., Juttner B., Noack S. Long-living plasmoids from an atmospheric water discharge//Plasma Source Sci. Technol., vol. 17, no. 2, pp. 024014-1–024014-8, 2008.
10. Emelin S.E., Astafiev A.M., Priezorski A.L. Investigation of Space-Time Structure of the Discharge with an Electrolytic Anode and Face-Type, Air Half-Space Directed Cathode (Gatchina's Discharge)//arXiv:0804.0981v1, 7 Apr 2008.
11. Fantz U., Kalafat S., Friedl R., Briefi S. Generation of an atmospheric plasmoid from a water discharge: An analysis of the dissipated energy// J. Appl. Phys. 114, 043302, 2013; doi: 10.1063/1.4816311
12. Ursel Fantz, Stefan Briefi, Roland Friedl, Martin Kammerloher, Johannes Kolbinger, and Alexander Oswald. Initial Phase of a Large Atmospheric Plasmoid Generated Above a Water Surface//IEEE TRANSACTIONS ON PLASMA SCIENCE, VOL. 42, NO. 10, 2014.
13. BARANOV M. I. Jelektrodinamicheskaja model' sharovoj molnii//JeLEKTRICHESTVO, №8, 2013.
14. H.-C. Wu. Theory of ball lightning//arXiv:1411.4784v2 [physics.plasm-ph] 21 Dec 2015.
15. Ignatovich V.K. A model of ball lightning// arXiv:0601127v4, 5 Sep 2011.
16. Shelton J.D. Eddy Current Model of Ball Lightning//arXiv:1102.1224v1 7 Feb 2011.
17. Belyj V.A. Sharovaja molnija: ustrojstvo, prichina ustojchivosti. NiT, 2011.
18. Trunev A.P. Rasprostranenie i vetvlenie strimerov v provodjashhijh sredah// Politematicheskij setevoj jelektronnyj nauchnyj zhurnal Kubanskogo gosudarstvennogo agrarnogo universiteta (Nauchnyj zhurnal KubGAU) [Jelektronnyj resurs]. – Krasnodar: KubGAU, 2017. – №04(128). Doi: 10.21515/1990-4665-128-080
19. Trunev A.P. Modelirovanie plazmoida i strimerov v provodjashhej srede / Trunev A.P. // Politematicheskij setevoj jelektronnyj nauchnyj zhurnal Kubanskogo gosudarstvennogo agrarnogo universiteta (Nauchnyj zhurnal KubGAU) [Jelektronnyj resurs]. – Krasnodar: KubGAU, 2017. – №05(129). – Rezhim dostupa: <http://ej.kubagro.ru/2017/05/pdf/41.pdf>, 1,750 u.p.l. – IDA [article ID]: 1291705041. <http://dx.doi.org/10.21515/1990-4665-129-041>

20. Wu C., Kunhardt E. E. Formation and propagation of streamers in N₂ and N₂-SF₆ mixtures//Physical Review A (General Physics), Volume 37, Issue 11, June 1, 1988, pp.4396-4406.
21. Pasko V.P., Inan U.S., Bell T.F. Spatial structure of sprites// Geophysical Research Letter, V. 25. No.12. pp. 2123-2126. 1998.
22. Montijn C., Ebert U.M., Hansdorfer W. Numerical convergence of the branching time of negative streamers//Phys. Rev. E., 73(6), 65401-1/4. 2006.
23. Alejandro Luque, Fabian Brau, Ute Ebert. Saffman-Taylor streamers: mutual finger interaction in an electric breakdown//Phys. Rev. E 78, 016206, 2008.
24. Bairhanova M.G., Gadzhiev M.X., Kurbanismailov V.S., Omarov O.A., Ragimhanov G.B., Kataa A.D. NEUSTOJChIVOST" FRONTA VOLNY IONIZACII KATODO NAPRAVLENNOGO STRIMERA V GELII VYSOKOGO DAVLENIJA//Prikladnaja fizika. 2009. № 5. S. 62-66.
25. Chao Li, Ute Ebert, Willem Hansdorfer. 3D hybrid computations for streamer discharges and production of run-away electrons// arXiv:0907.0555v2, 14 Jul, 2009.
26. Papageorgiou L., Metaxas A.C., Georghiou G.E. Three-dimensional numerical modeling of gas discharges at atmospheric pressure incorporating photo ionization phenomena// J. App. Phys. 44, 2011, 045203.
27. Beloglovskij A.A., Vereshhagin I.P., Hrenov S.I. TREHMERNAJA MATEMATICHESKAJA MODEL" STRIMERNOGO RAZRJaDA V VOZDUHE S UCHETOM VETVLENIJA I FOTOIONIZACII// Vestnik MJeI. 2011. № 3. S. 49-51.
28. Beloglovskij A.A., Rushal'shnikova A.V. IZUCHENIE VETVLENIJA KATODONAPRAVLENNOGO STRIMERA V VOZDUHE POSREDSTVOM TRJoHMERNOJ MATEMATICHESKOJ MODELII//Jelektrichestvo. 2016. № 7. S. 16-23.
29. Savel'eva L.A., Samusenko A.V., Stishkov Ju.K. Prichiny vetvlenija polozhitel'nogo strimera v neodnorodnom pole// Jelektronnaja obrabotka materialov, 49(2), 36-47, 2013.
30. Sinkevich O.A. Vetvlenie anodonapravlennoho strimera// TVT, T. 41, №5, 2003.
31. Karpov M.A., Nefedov V.I., Sigov A.S., Trefilov N.A., Mamaeva O.Ju., Zheleznova S.E.. Issledovanie bystroprotekajushhijh processov jelektronno-opticheskimi kamerami//Fundamental'nye problemy radiojelektronnogo priborostroenija, T. 10. № 1-1. S. 178-189, 2010.
32. Furov L.V. Poluchenie avtonomnyh dolgozhivushhijh plazmennijh obrazovanij v svobodnoj atmosfere//ZhTF, 75, 3, 2005.
33. Egorov A.I., Stepanov S.I. Sharovaja molnija v laboratorii// Priroda, №7, 2011.
34. Lavrent'ev O.A. Predlozhenie O.A.Lavrent'eva, otpravlennoe v CK VKP(b) 29 ijulja 1950 g.// UFN, T.171, №8, 2001.
35. Saffman P. G., Geoffrey Taylor. The Penetration of a Fluid into a Porous Medium or Hele-Shaw Cell Containing a More Viscous Liquid//Proc. R. Soc. Lond. A, 245, 1958.
36. Stefano Sello, Paolo Viviani, Enrico Paganini. Ball lightning observation: an objective video-camera analysis report// arXiv:1102.2829v2 18 Feb 2011.