

УДК 537.2

UDC 537.2

01.00.00 Физико-математические науки

Physics and Math

**РАСПРОСТРАНЕНИЕ И ВЕТВЛЕНИЕ
СТРИМЕРОВ В ПРОВОДЯЩИХ СРЕДАХ****PROPAGATION AND BRANCHING OF
STREAMERS IN CONDUCTING ENVIRONMENT**Трунев Александр Петрович
к.ф.-м.н., Ph.D.*Директор, A&E Trounev IT Consulting, Торонто,
Канада*

Alexander Trunev

Cand.Phys.-Math.Sci., Ph.D.

Director, A&E Trounev IT Consulting, Toronto, Canada

В настоящей работе развита модель, описывающая распространение и ветвление стримера в проводящей среде во внешнем электрическом поле. Для описания вклада токов проводимости мы модифицировали стандартное уравнение электростатики с учетом вихревой составляющей электрического поля. В результате такого обобщения сформулирована модель стримера в форме системы нелинейных уравнений параболического типа. В рамках предложенной модели рассматривается задача о распространении стримера в форме бегущей волны, что приводит к возникновению стримеров Саффмана-Тейлора. Для стримеров такого типа сформулирована проблема ветвления, которая имеет однозначное решение. Найдена зависимость точки ветвления от параметров задачи – скорости стримера, коэффициента диффузии электронов и напряженности внешнего электрического поля. Механизм ветвления головки стримера путем разделения на две части хорошо изучен и для его описания было сформулировано несколько альтернативных моделей. Новизна обсуждаемой постановки задачи заключается в том, что стример распадается на два трехмерных канала, симметричных относительно заданной плоскости. В численных экспериментах также обнаружен механизм ветвления стримера в области катода, связанный с разделением основного канала на несколько боковых ветвей. Отмечается, что в природе реализуются оба механизма ветвления, тогда как в теории исследуется преимущественно неустойчивость поверхности головки стримера

In this work, we develop a model describing the propagation and branching of a streamer in a conducting medium in external electric field. To describe the contribution of the conductivity currents, we modified the standard electrostatic equation taking into account the vortex component of the electric field. As a result of this generalization, the streamer model is formulated in the form of nonlinear equations of parabolic type. In the framework of the proposed model, the problem of the propagation of a streamer in the form of a traveling wave is considered, which leads to the emergence of Saffman-Taylor streamers. For streamers of this type, the branching problem is formulated, which has a unique solution. The dependence of the branch point on the parameters of the problem—the speed of the streamer, the diffusion coefficient of the electrons and the strength of the external electric field, is found. The branching mechanism of the streamer head by dividing it into two parts has been well studied and several alternative models have been formulated for its description. The novelty of the problem in question is that the streamer splits into two three-dimensional channels that are symmetric with respect to the given plane. Numerical experiments also revealed the mechanism of branching of the streamer in the cathode region, connected with the separation of the main channel into several lateral branches. It is noted, that in nature both branching mechanisms are realized, whereas in theory the instability of the surface of the streamer head is investigated

Ключевые слова: ЭЛЕКТРИЧЕСКОЕ ПОЛЕ,
СТРИМЕР, РАЗРЯД, ВЕТВЛЕНИЕ, ИОНИЗАЦИЯ,
МАТЕМАТИЧЕСКОЕ МОДЕЛИРОВАНИЕ.

Keywords: ELECTRIC FIELD, STREAMER,
DISCHARGE, BRANCHING, IONIZATION,
MATHEMATICAL MODELING

Doi: 10.21515/1990-4665-128-080

Введение

<http://ej.kubagro.ru/2017/04/pdf/80.pdf>

Стримеры относятся к числу макроскопических наблюдаемых явлений, которые легко могут быть зарегистрированы в экспериментах с газовыми разрядами, включая атмосферные разряды [1-14]. Обычно наблюдаются стримеры, вызванные распространением электронов в нейтральной среде, которая подвержена ионизации. Стандартный набор физических процессов, используемых в моделях стримеров – это ионизация, диффузия и движение зарядов в электрическом поле [1-10].

Считается, что высоковольтный разряд относится к электростатическим явлениям, следовательно, генерируемые электрические поля являются потенциальными [1-9]. В тоже время сам разряд является быстропротекающим процессом, что указывает на наличие вихревых полей. В работе [10] рассматривается модель стримера с учетом индуцированных вихревых полей, обусловленных токами проводимости. В настоящей работе изучены аналитические и численные модели распространения и ветвления стримера в проводящей среде в однородном внешнем электрическом поле. В численных расчетах было установлено два механизма ветвления стримера, один из которых связан с разделением головки стримера на две части, а второй механизм связан с замыканием основного канала стримера на катод через систему боковых стримеров

Стример Саффмана-Тейлора

Рассмотрим распространение стримера в газовой среде в однородном электрическом поле. Используем стандартную модель стримера в газовых разрядах [1-4], которую модифицируем с учетом диффузии электрического поля и ионов, имеем [10]

$$\begin{aligned} \frac{\partial \rho_e}{\partial t} &= D_e \nabla^2 \rho_e + \nabla \cdot (\rho_e \mathbf{E}) + \rho_e |\mathbf{E}| \exp(-1/|\mathbf{E}|) \\ \frac{\partial \rho_i}{\partial t} &= D_i \nabla^2 \rho_i + k_i \nabla \cdot (\rho_i \mathbf{E}) + \rho_i |\mathbf{E}| \exp(-1/|\mathbf{E}|) \\ \frac{\partial \mathbf{E}}{\partial t} &= D_E (\nabla^2 \mathbf{E} + \nabla \rho_e - \nabla \rho_i) \end{aligned} \quad (1)$$

Здесь обозначено $\rho_e, \rho_i, \mathbf{E}$ – плотность электронов, ионов и электрического поля соответственно, D_e, D_i, D_E – коэффициенты диффузии, k_i – параметр подвижности ионов. В качестве параметра длины в модели (1) используется длина свободного пробега электронов в азоте при нормальном давлении – $L_s \approx 2.3 \cdot 10^{-6} m$ (2.3 мкм). Масштаб времени составляет 3 пикосекунды, а масштаб электрического поля – $E_s = 200 kV/cm$ [4]. Характерный масштаб плотности электронов составляет в таком случае

$$\rho_s = \frac{\epsilon_0 E_s}{e L_s} \approx 4.806 \cdot 10^{22} m^{-3}.$$

Поясним происхождение третьего уравнения (3). Выражение в скобках в случае электростатического поля тождественно обращается в ноль. Однако при наличии вихревой составляющей поля в случае длинных волн, из уравнений Максвелла и закона Ома $\mathbf{j} = \sigma \mathbf{E} = -\sigma \nabla \mathbf{A} / \partial t$ следует уравнение диффузии векторного потенциала

$$\sigma \mu \frac{\partial \mathbf{A}}{\partial t} = \nabla^2 \mathbf{A} \quad (2)$$

Сравнивая (2) с третьим уравнением (1), находим $D_E = 1 / \sigma \mu$.

Модель (1) тестировалась на плоских и трехмерных задачах моделирования стримеров Саффмана-Тейлора [4, 11] в однородном электрическом поле [10].

Задача для системы (1) решалась численно, в прямоугольной области $-L_x \leq x \leq L_x, -L_y \leq y \leq L_y, -L_z \leq z \leq L_z$, с нулевыми начальными данными и с граничными условиями:

$$\begin{aligned}
 E_x(t, -L_x, y, z) = E_x(t, L_x, y, z) = E_0(1 - e^{-at}), E_y(t, -L_x, y, z) = E_y(t, L_x, y, z) = 0, \\
 E_z(t, -L_x, y, z) = E_z(t, L_x, y, z) = 0, E_x(t, x, -L_y, z) = E_x(t, x, L_y, z) = E_0(1 - e^{-at}), \\
 E_y(t, x, -L_y, z) = E_y(t, x, L_y, z) = 0, E_z(t, x, -L_y, z) = E_z(t, x, L_y, z) = 0, \\
 E_x(t, x, y, -L_z) = E_x(t, x, y, L_z) = E_0, E_y(t, x, y, -L_z) = E_y(t, x, y, L_z) = 0, \\
 E_z(t, x, y, -L_z) = E_z(t, x, y, L_z) = 0, \rho_e(t, -L_x, y, z) = \rho_i(t, -L_x, y, z) = 0, \\
 \rho_e(t, L_x, y, z) = \rho_i(t, L_x, y, z) = S \exp[-b(y^2 + z^2)](1 - e^{-at}), \\
 \rho_e(t, x, \pm L_y, z) = \rho_i(t, x, \pm L_y, z) = 0, \rho_e(t, x, y, \pm L_z) = \rho_i(t, x, y, \pm L_z) = 0,
 \end{aligned} \tag{3}$$

В случае решения плоской задачи полагаем в условиях (3) $z = 0, E_z = 0$ и исключаем граничные условия при $z = \pm L_z$.

На рис. 1-2 представлены результаты расчетов электронной плотности по модели (1), (3) при следующих параметрах задачи:

$$\begin{aligned}
 a = 1, D_e = 0.1, D_i = 0.001, D_E = 1000, k_i = 0 \\
 E_0 = 0.3, S = 10^{-4}, b = 0.015, L_x = 200, L_y = L_z = 100.
 \end{aligned} \tag{4}$$

На рис. 1 представлены данные по распределению электронной плотности в различные моменты времени в сечении $z = 0$. Из этих данных следует, что стример распространяется со средней скоростью $u \approx 400/500 = 0.8$, тогда как в теории стримеров Саффмана-Тейлора [4, 11] скорость равна удвоенной величине внешнего поля, т.е. $u = 2E_0 = 0.6$.

Линия раздела плотности в теории [11] описывается уравнением:

$$\frac{x + ut}{L_y} = \frac{1 - \lambda}{\pi} \ln \frac{1}{2} \left(1 + \cos \frac{\pi y}{\lambda L_y} \right) \tag{5}$$

Как было установлено в экспериментах [11], параметр $\lambda = 1/2$, хотя в теории этот параметр может принимать любое значение в зависимости от скорости $u = E_0 / \lambda$.

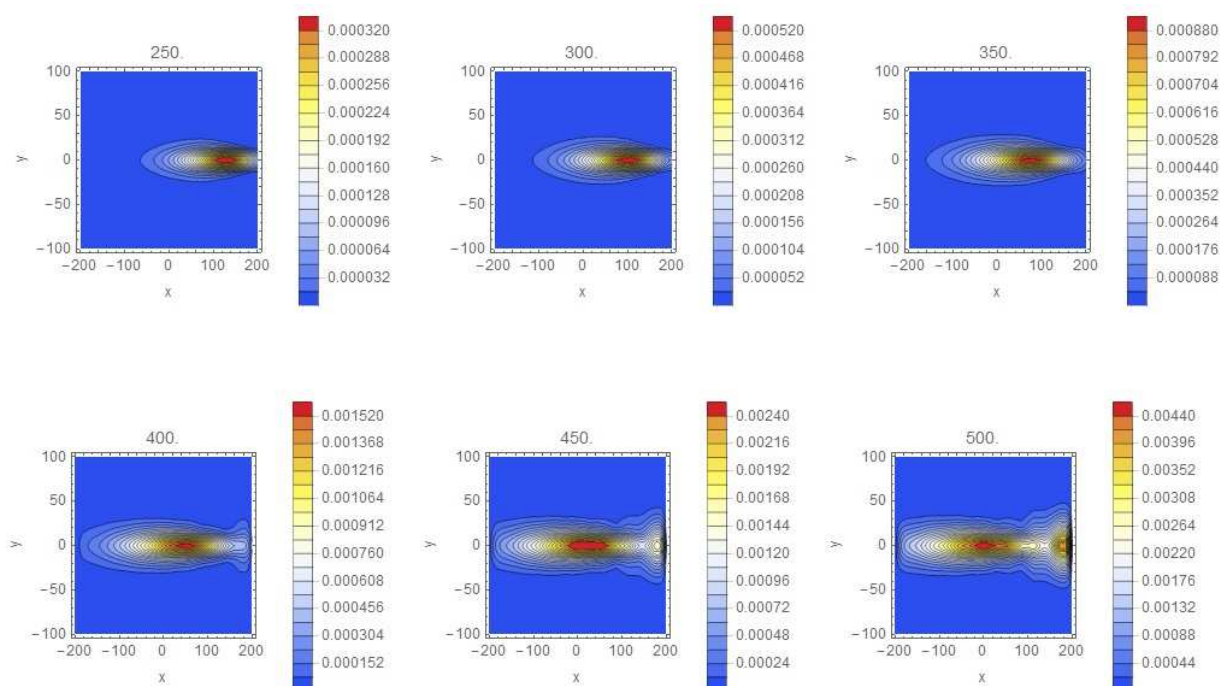


Рис. 1. Плотность электронов в плоскости $z = 0$ в различные моменты времени (указаны над рисунками).

На рис. 2 показаны уровни плотности электронов в момент соударения стримера с плоскостью $x = -L_x$, вычисленные в двумерной (справа) и в трехмерной модели (справа), вместе с линией, рассчитанной по уравнению (5) при $\lambda = 1/2$.

Из этих данных следует, что распределение плотности электронов в 2D и 3D моделях отличается несущественно. Геометрия стримера в модели (1) не совпадает в деталях с геометрией стримера Саффмана-Тейлора, что объясняется малой длиной канала. Действительно, при увеличении длины канала в 2 раза наблюдается практически идеальное совпадение кривой (5) с линиями уровня плотности электронов в момент соударения стримера с плоскостью $x = -L_x$ рис. 3.

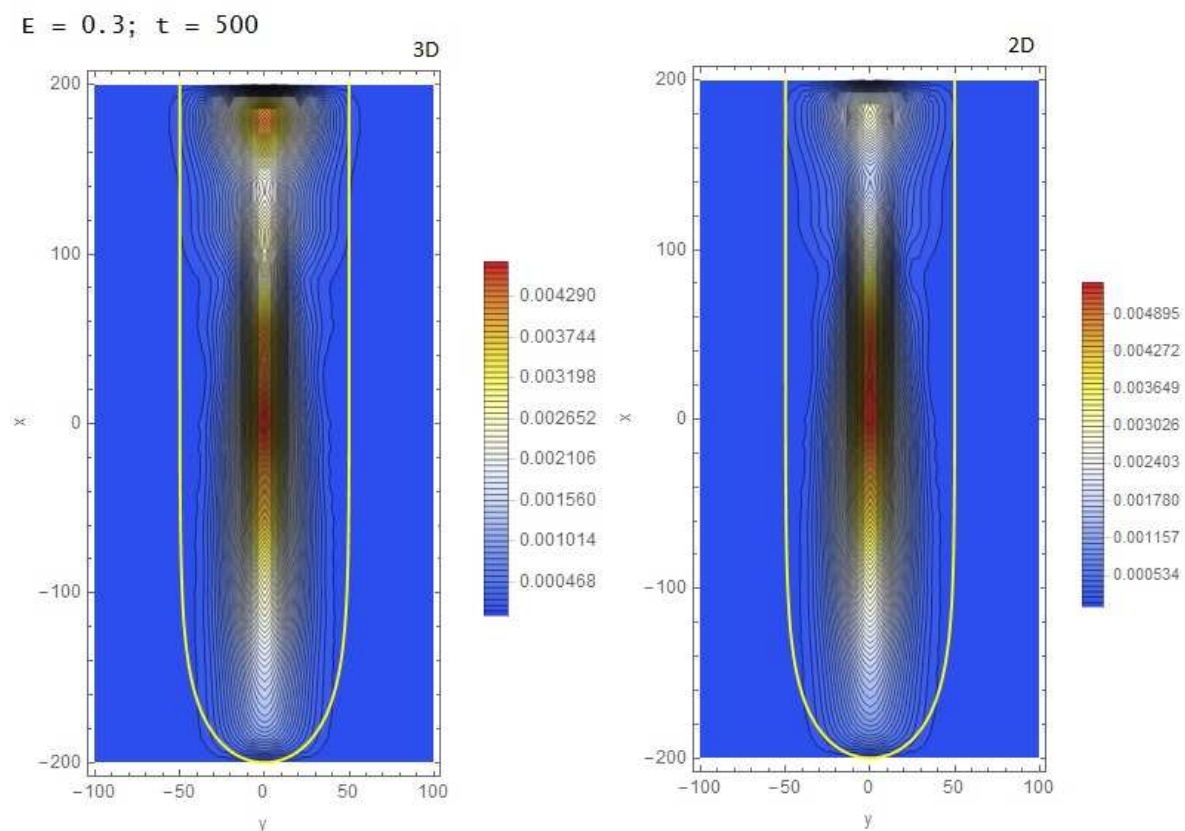


Рис. 2. Геометрия стримера Саффмана-Тейлора (желтая линия) и линии плотности электронов в двумерной (справа) и трехмерной (слева) модели.

Это совпадение можно считать достаточным аргументом в пользу модели (1), которая выведена из модели [4] путем ее расширения с учетом вихревой составляющей электрического поля и диффузионных потоков ионов. Отметим, что хотя выражение (5) используется в теории стримеров [4], модель «пальцев» [11], образующихся при вдувании воздуха в глицерин или при проникновении воды в масло математически не идентична модели (1). Поэтому необходимо пояснить факт совпадения формы стримера с теорией Саффмана-Тейлора [11] - рис. 3.

$\epsilon = 0.25$

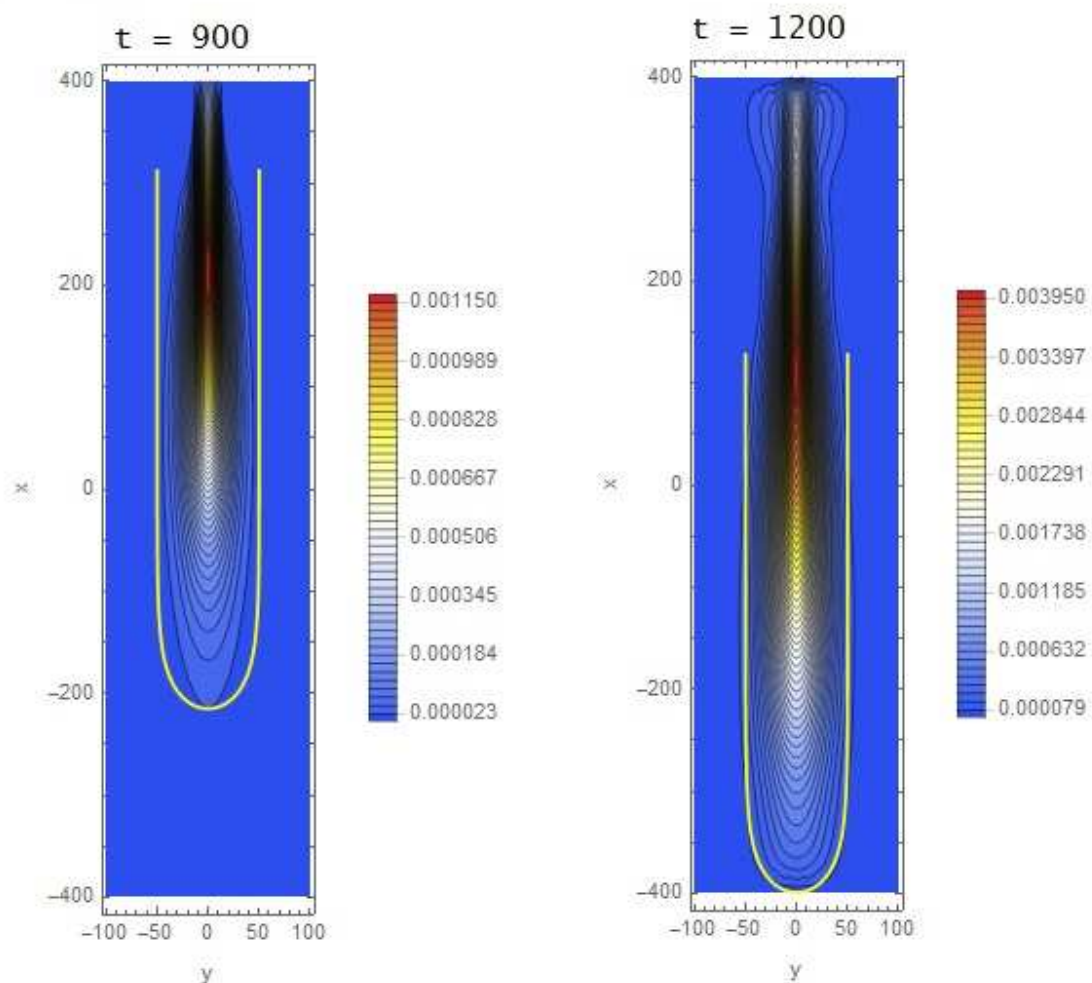


Рис. 3. Линии уровня плотности электронов при распространении стримера в длинном канале.

Рассмотрим аналитическую модель распространения стримера в заданном внешнем поле. Положим в уравнениях (1) все величины зависящими от переменных $\xi = x + ut, y, z$, тогда система (1) приводится к виду

$$\begin{aligned}
 u \frac{\partial \rho_e}{\partial \xi} &= D_e \nabla^2 \rho_e + \nabla \cdot (\rho_e \mathbf{E}) + \rho_e |\mathbf{E}| \exp(-1/|\mathbf{E}|) \\
 u \frac{\partial \rho_i}{\partial \xi} &= D_i \nabla^2 \rho_i + k_i \nabla \cdot (\rho_i \mathbf{E}) + \rho_i |\mathbf{E}| \exp(-1/|\mathbf{E}|) \\
 u \frac{\partial \mathbf{E}}{\partial \xi} &= D_E (\nabla^2 \mathbf{E} + \nabla \rho_e - \nabla \rho_i)
 \end{aligned}
 \tag{6}$$

Здесь оператор $\nabla = (\partial/\partial \xi, \partial/\partial y, \partial/\partial z)$. Стример Саффмана-Тейлора это плоское линейное решение первого уравнения (6). Полагая в этом уравнении электрическое поле постоянным $\mathbf{E} = (E_0, 0, 0)$, ищем решение в виде

$$\rho_e = \rho_0 \exp(k_x \xi) \cos(k_y y)
 \tag{7}$$

Подставляя (7) в первое уравнение (6), находим дисперсионное соотношение

$$k_x u = D_e (k_y^2 + k_x^2) + k_x E_0 + |E_0| \exp(-1/|E_0|)
 \tag{8}$$

Предполагая, что линия раздела электронной плотности определяется из уравнения $\rho_e = \rho_0$, находим из первого уравнения путем логарифмирования уравнение линии раздела плотности

$$x + ut = - \frac{\ln \cos(k_y y)}{k_x}
 \tag{9}$$

Выражение (9) только нормировкой отличается от выражения (5). Однако скорость стримера в модели (6) в общем случае не совпадает со скоростью «пальцев» в теории [11]. Из уравнения (8) следует, что скорость стримера зависит от параметра диффузии и от скорости ионизации. Действительно, при совпадении формы стримера на рис. 3 имеем скорость $u \approx 1.2$, вместо теоретической величины $u = 2E_0 = 0.5$. Ранее аналогичные результаты были получены в работе [4], в которой модель стримера Саффмана-Тейлора была использована для нахождения режимов движения с

постоянной скоростью и ветвления в 2D. Ниже решена аналогичная задача в трехмерном случае.

Ветвление стримера Саффмана-Тейлора в 3D

Рассмотрим стример как бегущую с постоянной скоростью волну. Положим в уравнениях (1) все величины зависящими от переменных $\xi = x + ut, y, z$, тогда справедлива система уравнений (6). Для решения системы уравнений (6) используем теорию пограничного слоя. Будем считать, что изменение параметров по сечению стримера значительно превосходит изменение параметров вдоль направления его распространения. Это условие заведомо не выполняется на головке стримера. В остальной же области для описания стримера имеем систему уравнений параболического типа

$$\begin{aligned} u \frac{\partial \rho_e}{\partial \xi} &= D_e \nabla_{\perp}^2 \rho_e + \nabla \cdot (\rho_e \mathbf{E}) + \rho_e |\mathbf{E}| \exp(-1/|\mathbf{E}|) \\ u \frac{\partial \rho_i}{\partial \xi} &= D_i \nabla_{\perp}^2 \rho_i + k_i \nabla \cdot (\rho_i \mathbf{E}) + \rho_e |\mathbf{E}| \exp(-1/|\mathbf{E}|) \\ u \frac{\partial \mathbf{E}}{\partial \xi} &= D_E (\nabla_{\perp}^2 \mathbf{E} + \nabla \rho_e - \nabla \rho_i) \end{aligned} \quad (10)$$

Здесь операторы $\nabla = (\partial/\partial \xi, \partial/\partial y, \partial/\partial z)$, $\nabla_{\perp}^2 = (\partial^2/\partial y^2, \partial^2/\partial z^2)$. В рамках модели (10) может быть поставлена и решена задача о ветвлении стримера в трехмерном случае. Для этого предположим, что в плоскости $z = 0$ в интервале $0 \leq \xi \leq \xi_b$ задано распределение плотности электронов вида (7), а в плоскости $\xi = 0$ задано совместное с ним распределение, имеем

$$\begin{aligned} \xi = 0: \rho_e &= \rho_0 \cos(k_z z) \cos(k_y y), \quad |k_y y| \leq \pi/2, |k_z z| \leq \pi/2 \\ z = 0: \rho_e &= \rho_0 \exp(k_x \xi) \cos(k_y y), \quad 0 \leq \xi \leq \xi_b, |k_y y| \leq \pi/2 \end{aligned} \quad (11)$$

Во всей остальной области и на границах используем нулевые начальные данные. Тогда в области $\xi > \xi_b$ имеем отрыв стримера от

плоскости $z = 0$ - рис.4, что соответствует ветвлению, поскольку плоскость $z = 0$ является плоскостью симметрии.

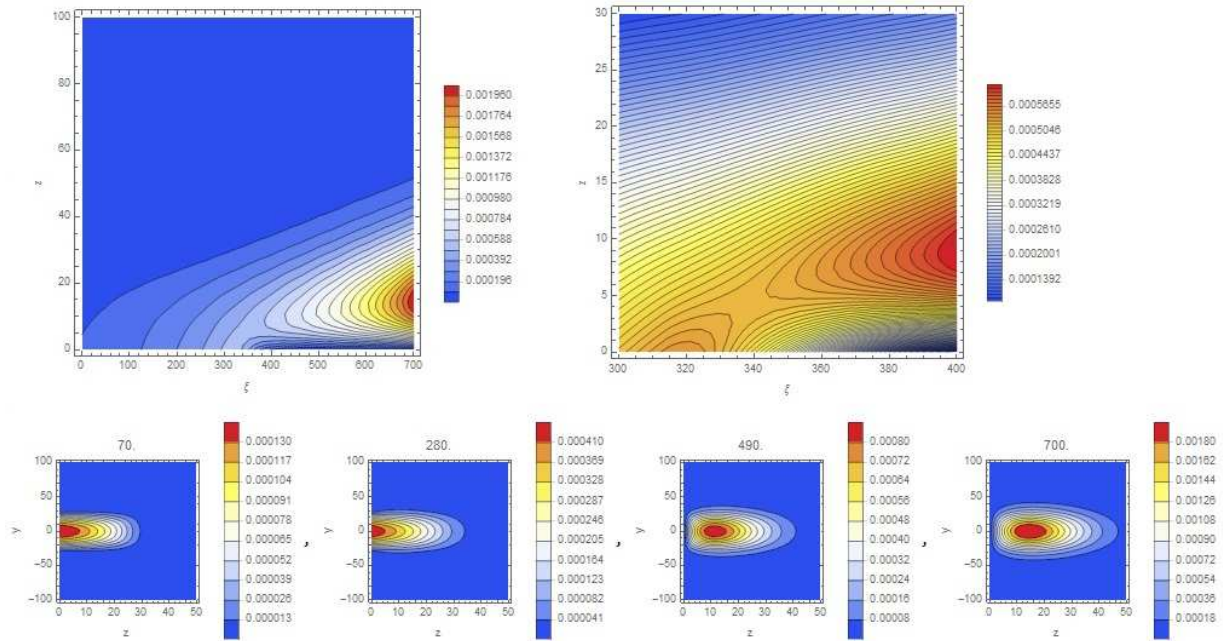


Рис. 4. Линии уровня плотности электронов при ветвлении стримера в плоскости (ξ, z) – сверху и в различных сечениях $\xi = const$ (указаны над рисунками) – внизу.

На рис. 4-6 представлены данные по распределению плотности электронов при ветвлении стримера, рассчитанные по модели (10)-(11) при следующих значениях параметров:

$$\begin{aligned}
 D_e = 0.1, D_i = 0.001, D_E = 1000, k_i = 0, k_y = k_z = \pi/2L_s, L_s = 30, \\
 E_0 = 0.25, u = 1.2, S = 10^{-4}, L_y = L_z = 100, k_x = 0.00597
 \end{aligned}
 \tag{12}$$

Отметим, что волновые числа, коэффициент диффузии электронов, напряженность электрического поля и скорость стримера связаны уравнение (8). Разрешая уравнение (8), находим продольный масштаб стримера в зависимости от параметров модели в виде

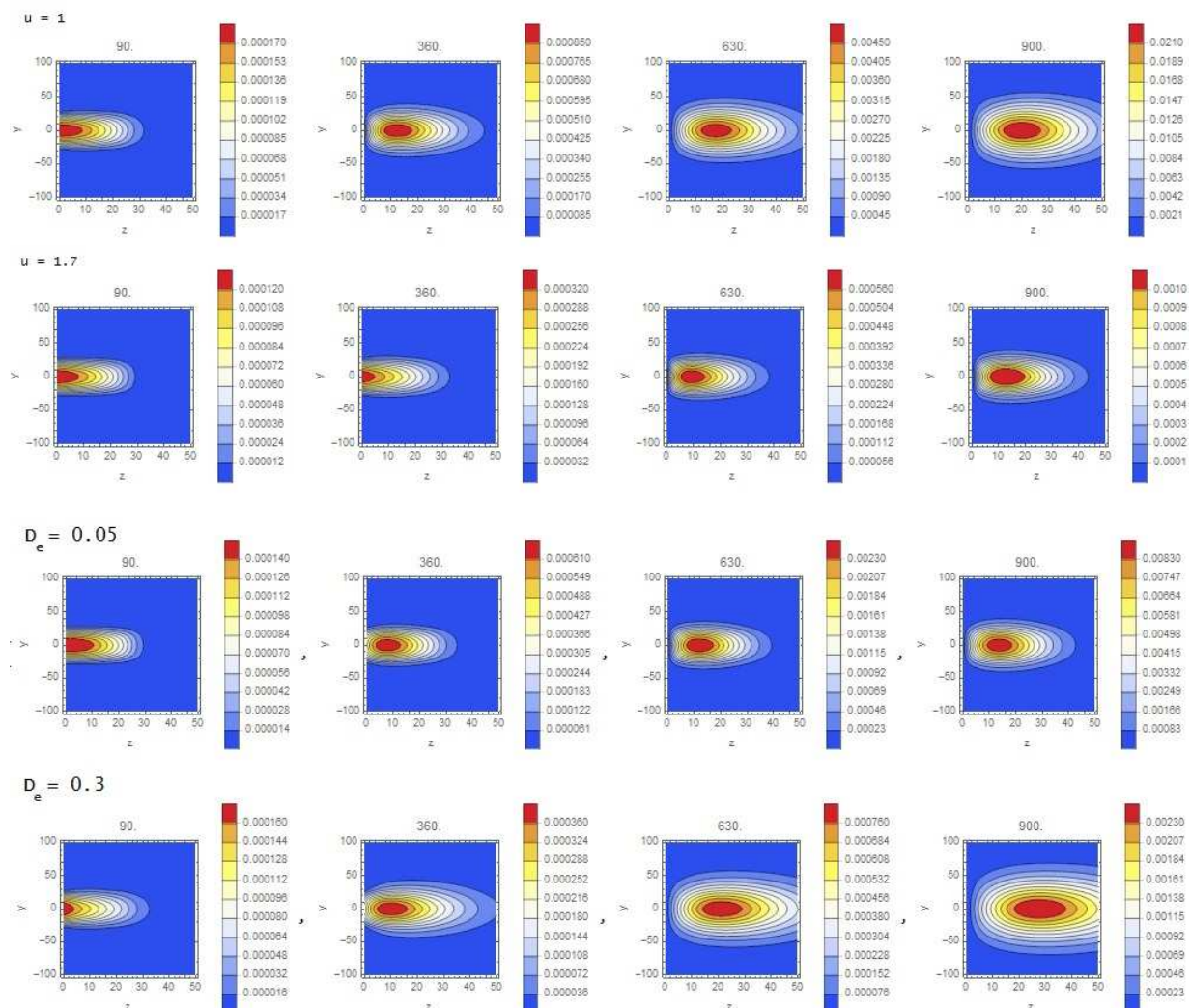


Рис. 5. Распределение плотности электронов в различных сечениях $\xi = const$ (указаны над рисунками) при изменении скорости и коэффициента диффузии: сверху - $D_e = 0.1; u = 1; 1.7$, внизу - $D_e = 0.05; 0.3; u = 1.2$.

$$L_b = \frac{1}{k_x} = \frac{u - E_0}{D_e (k_y^2 + k_x^2) + |E_0| \exp(-1/|E_0|)} \quad (13)$$

Из уравнения (13) следует, что при уменьшении скорости точка ветвления смещается к началу координат – рис 5. Тот же эффект наблюдается при увеличении коэффициента диффузии или напряженности электрического поля - рис. 6.

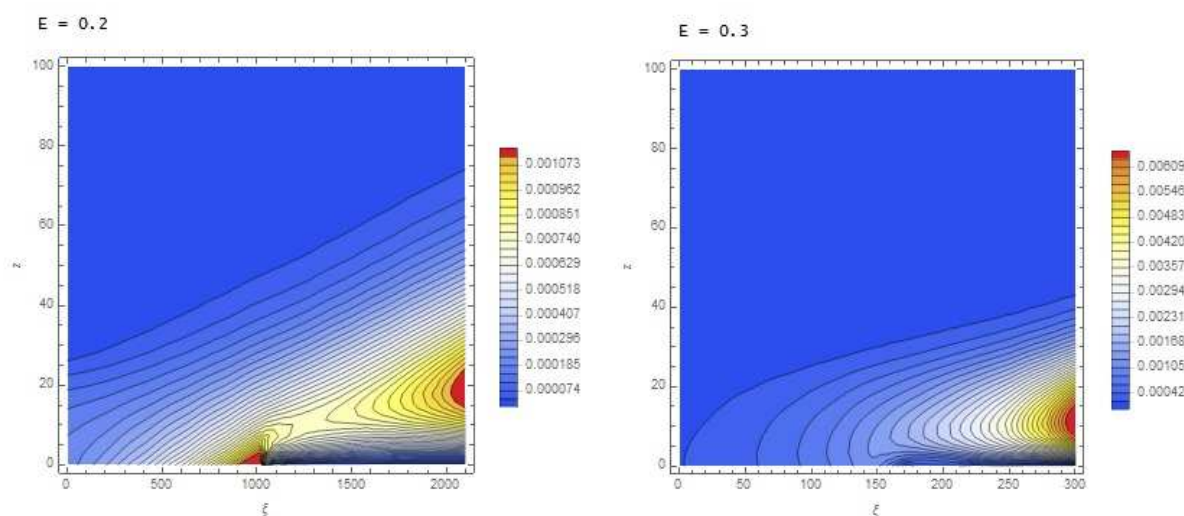


Рис. 6. Распределение плотности электронов в плоскости (ξ, z) при ветвлении стримера в электрическом поле с напряженностью $E_0 = 0.2; 0.3$ - левый и правый рисунки соответственно.

Интересной особенностью данной постановки задачи является то, что рассматривается ветвление трехмерного стримера, а не плоского стримера или, что важно, не коническое раскрытие стримера, как в работах [2-4]. Ранее этот вопрос обсуждался в работе [12], где была выведена приближенная модель разделения головки стримера. Линейная теория устойчивости поверхности стримера с учетом токов смещения развита в [13]. Численные модели ветвления стримеров были развиты в работах [8-9] и других. Общий

вид ветвления стримеров по механизму, описанному выше, приведен в работе [14] на рис. 7.

Ветвление стримера в области катода

Рассмотрим вопрос о ветвлении стримера в рамках нестационарной модели (1). Такого типа ветвление стримера в 2D и 3D хорошо заметно в верхней части, примыкающей к катоду в момент соударения головки стримера с анодом – рис. 1-3. Размер ветвей и положение точки ветвления зависит в этом случае от времени, тогда как в модели (10), положение точки ветвления фиксировано в подвижных координатах. На рис. 7-11 представлены данные моделирования ветвления стримера для значений параметров

$$\begin{aligned} a = 1, D_e = 0.1, D_i = 0.001, D_E = 1000, k_i = 0 \\ S = 10^{-3}, b = 0.15, L_x = 200, L_y = L_z = 100, \\ E_0 = 0.27; 0.3; 0.33 \end{aligned} \quad (14)$$

Из данных, приведенных на рис. 7 следует, что в области $50 < x < 150$ стример распадается на отдельные каналы, число которых зависит от напряженности электрического поля и моды возбуждения.

Эти боковые стримеры начинаются и заканчиваются на основном канале, сечение боковых стримеров представлено на рис. 7-9. Отметим, что в обсуждаемой модели с прямоугольными ячейками возбуждаются моды с 4, 6, 8 и т.д. боковыми каналами. При этом центральный канал сохраняется, как основа, на которой замыкаются ветви боковых каналов.

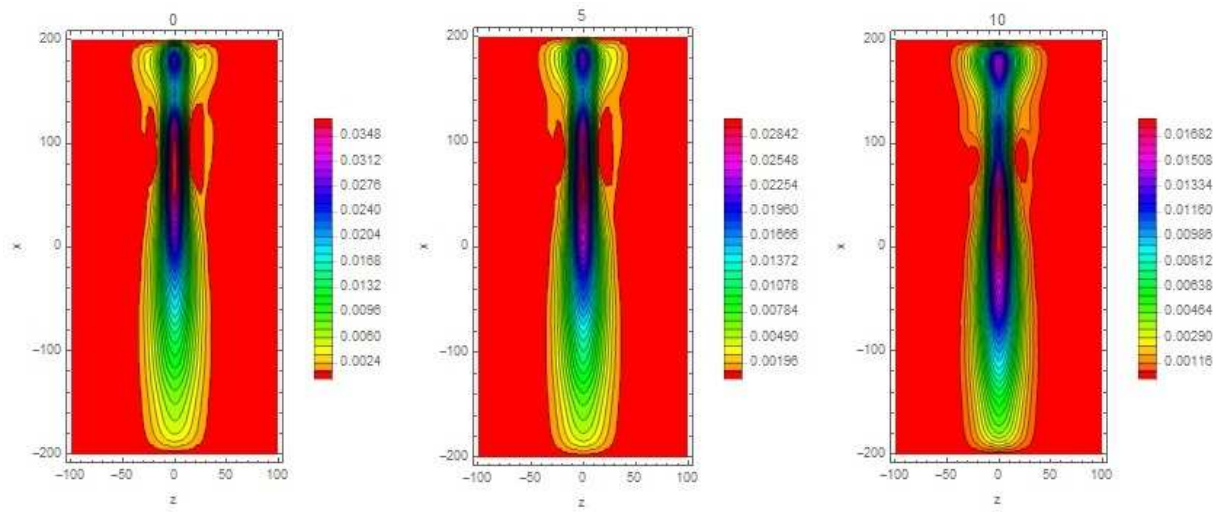


Рис. 7. Распределение плотности электронов в плоскости (x, z) в сечениях $y = 0; 5; 10$ в момент времени $t = 500$ при напряженности электрического поля $E_0 = 0.30$.

Плотность электронов в боковых стримерах, представленных на рис. 7-11 по порядку величины совпадает с максимальной плотностью электронов в центральном канале стримеров, изображенных на рис. 1-3. Это обусловлено тем, что в начальных данных (14), плотность электронов увеличена на порядок по сравнению с данными (4).

Стримеры такого типа, замыкающие головку основного стримера на катод можно видеть на рис. 5 из работы [14]. На указанном рисунке, представляющем собой высокоскоростную электронно-оптическую фотографию процесса развития стримера, хорошо просматривается геометрия канала, что качественно согласуется с расчетными данными, приведенными выше на рис. 1, 10, 11.

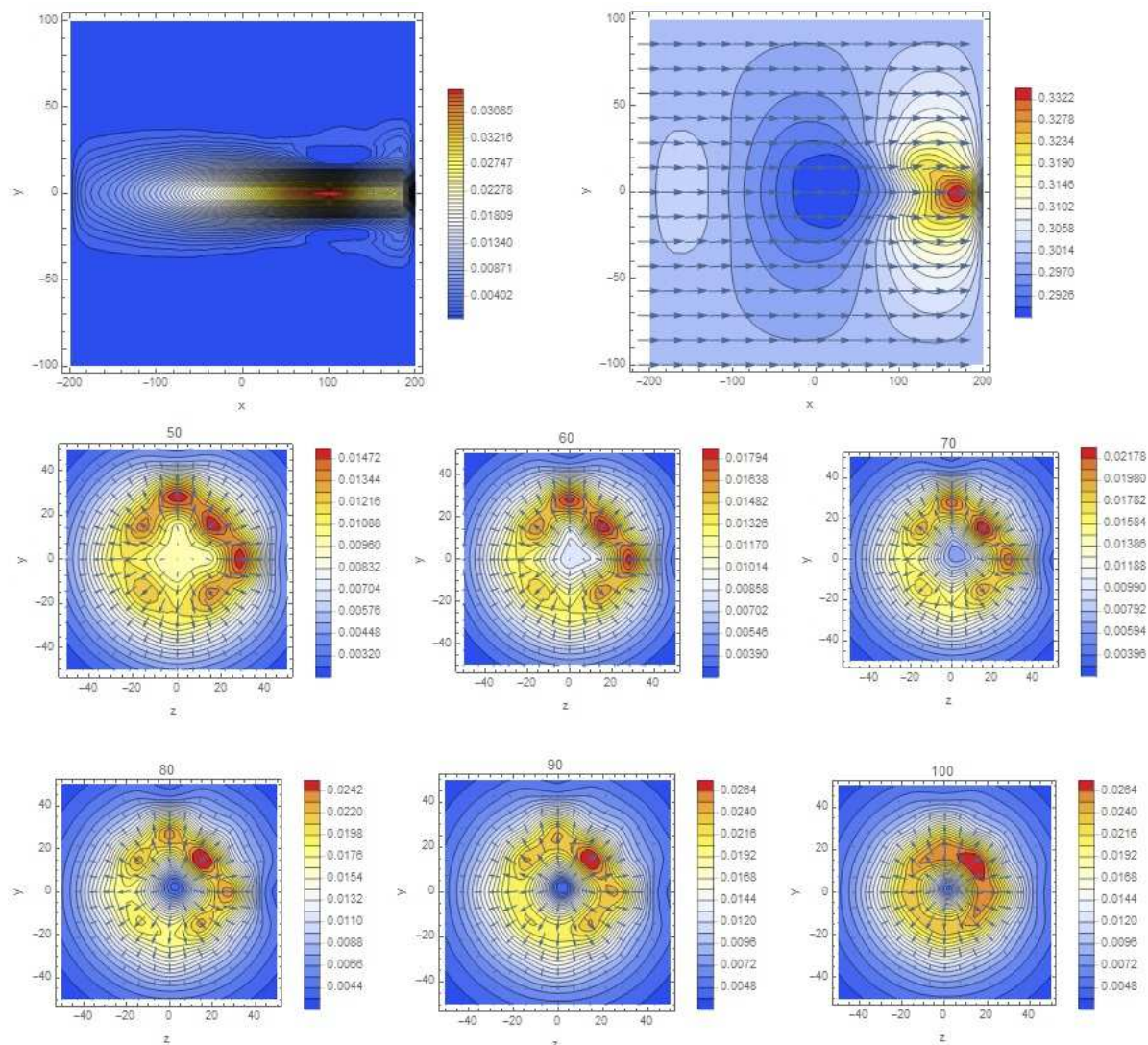


Рис. 8. Распределение плотности ионов (слева сверху) и электрического поля (справа сверху) в плоскости $z = 0$; распределение электрического поля в сечениях $x = 50; 60; 70; 80; 90; 100$ (указаны над рисунками) в момент времени $t = 500$ при напряженности электрического поля $E_0 = 0.30$.

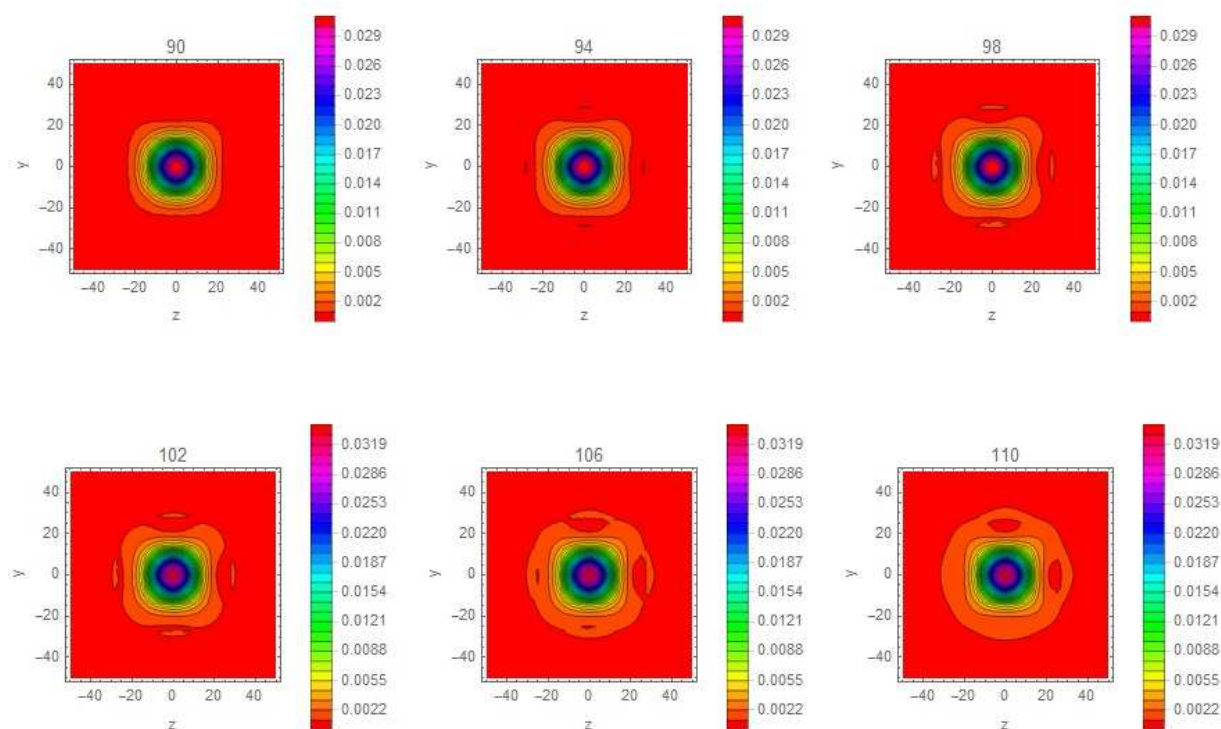


Рис. 9. Распределение плотности электронов в плоскости (y, z) в сечениях $x = const$ (указаны над рисунками) при напряженности электрического поля $E_0 = 0.33$.

Время процесса ветвления стримеров в области катода существенно зависит от напряженности внешнего электрического поля. Так, при напряженности поля $E_0 = 0.33$, боковые стримеры возникают в интервале времени $300 < t < 360$ – рис. 10. Тогда как при напряженности электрического поля $E_0 = 0.27$ боковые стримеры возникают в интервале $600 < t < 650$ – рис. 11. Данные же на рис. 7-8 получены в момент времени $t = 500$. Отметим, что выбранный масштаб времени составляет 3 пикосекунды.

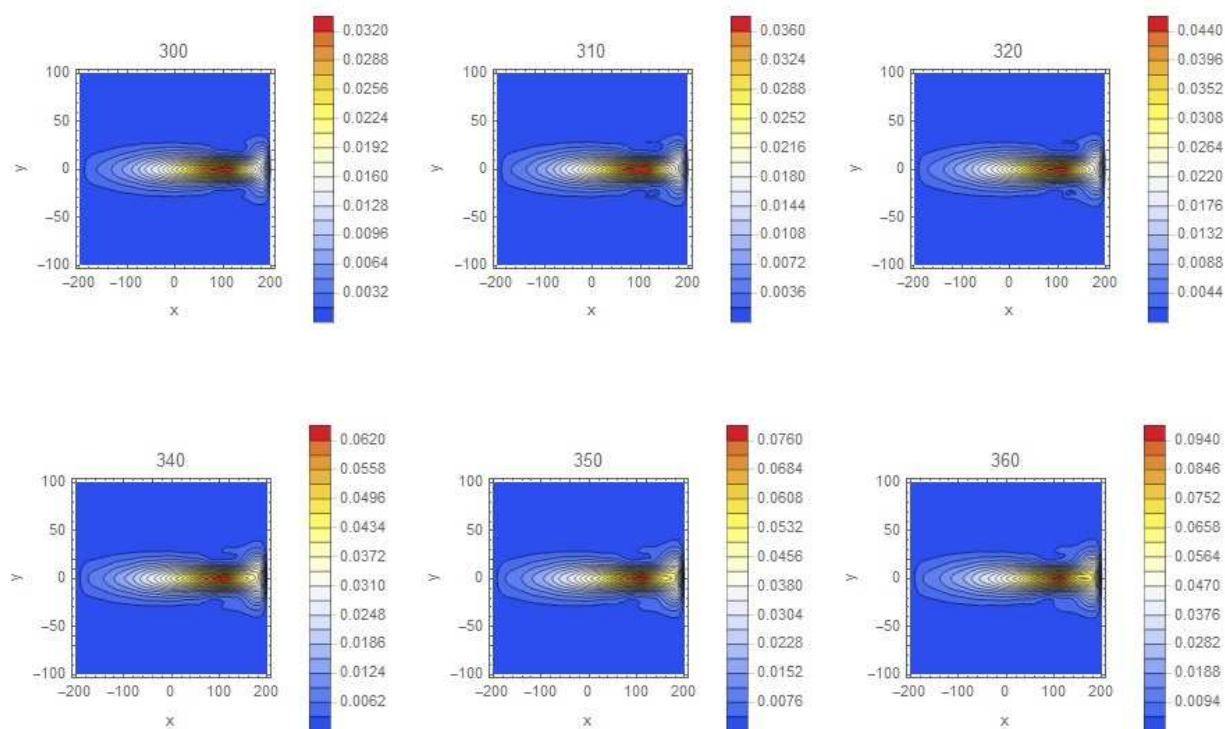


Рис. 10. Развитие боковых стримеров при напряженности электрического поля $E_0 = 0.33$: время процесса указано над рисунками.

Таким образом, в численных расчетах мы установили два механизма ветвления стримера, один из которых связан с разделением головки стримера на две части – рис. 4-6, а второй механизм связан с замыканием основного канала стримера на катод через систему боковых стримеров – рис. 7-10. Оба механизма ветвления стримера наблюдаются в экспериментах [14], однако в работах [2-5, 8-9, 12-13] и других рассматривается только неустойчивость фронта, как основной механизм ветвления. Это, видимо, обусловлено тем, что экспериментальное исследование и численное моделирование второго механизма сопряжено с определенными трудностями.

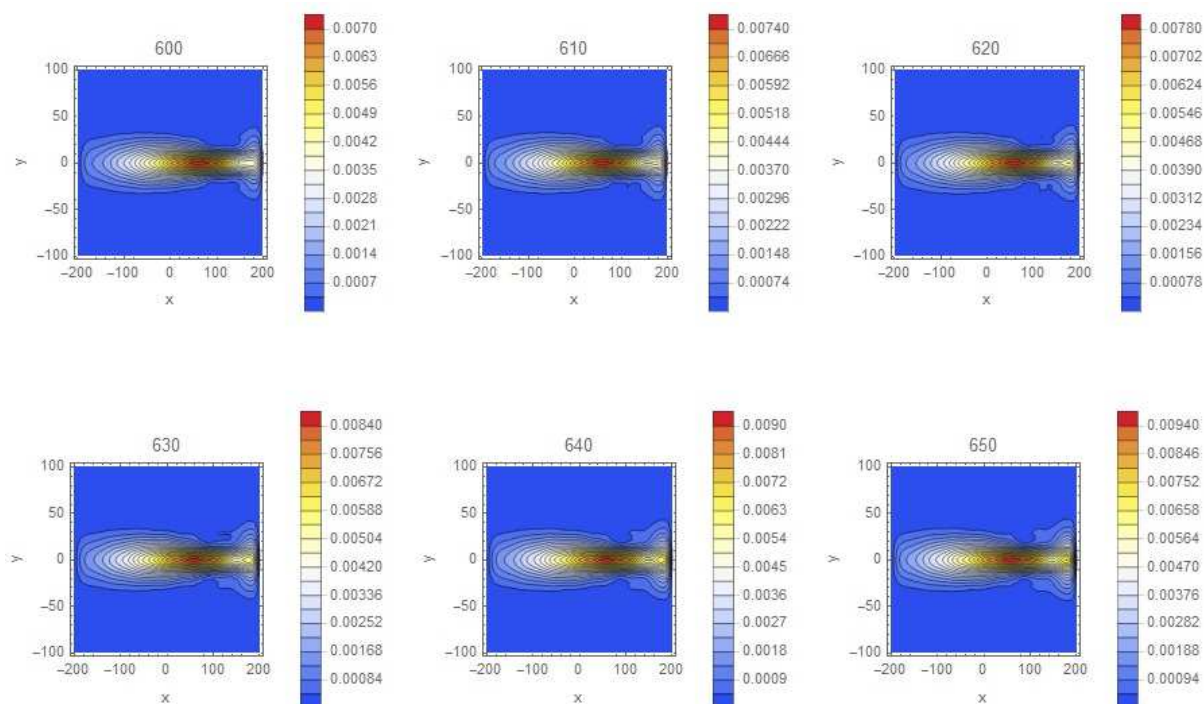


Рис. 11. Развитие боковых стримеров при напряженности электрического поля $E_0 = 0.27$: время процесса указано над рисунками.

Распространение стримера в проводящей среде

Рассмотрим задачу о распространении стримера в однородной проводящей среде. Используем систему уравнений (1) в которой положим все функции зависящими только от времени и координаты, в результате имеем

$$\begin{aligned}
 \frac{\partial \rho_e}{\partial t} &= D_e \frac{\partial^2}{\partial x^2} \rho_e + \frac{\partial}{\partial x} (\rho_e E_x) + \rho_e |E_x| \exp(-1/|E_x|) \\
 \frac{\partial \rho_i}{\partial t} &= D_i \frac{\partial^2}{\partial x^2} \rho_i + k_i \frac{\partial}{\partial x} (\rho_i E_x) + \rho_e |E_x| \exp(-1/|E_x|) \\
 \frac{\partial E_x}{\partial t} &= D_E \frac{\partial}{\partial x} \left(\frac{\partial}{\partial x} E_x + \rho_e - \rho_i \right)
 \end{aligned}
 \tag{16}$$

Для системы уравнений (16) сформулируем следующую задачу

$$\begin{aligned}
 E(0, x) = E_0, E_x(t, -L_x) = E_x(t, L_x) = E_0, \\
 \rho_e(0, x) = \rho_i(0, x) = 0, \rho_e(t, -L_x) = \rho_i(t, -L_x) = 0, \\
 \rho_e(t, L_x) = \rho_i(t, L_x) = S(1 - e^{-at})
 \end{aligned}
 \tag{17}$$

На рис. 12 представлено распределение плотности электронов и электрического поля, рассчитанные путем численного интегрирования задачи (16)-(17) при следующих значениях параметров:

$$\begin{aligned}
 a = 0.1, D_e = 0.1, D_i = 0.001, k_i = 0, S = 10^{-4}, L_x = 200, E_0 = 0.3 \\
 D_E = 10^2; 10^3; 10^4
 \end{aligned}
 \tag{18}$$

Из приведенных на рис. 12 данных следует, что скорость стримера имеет максимум для значения $D_E = 1000$ и уменьшается, как с увеличением параметра диффузии электрического поля, так и при его уменьшении.

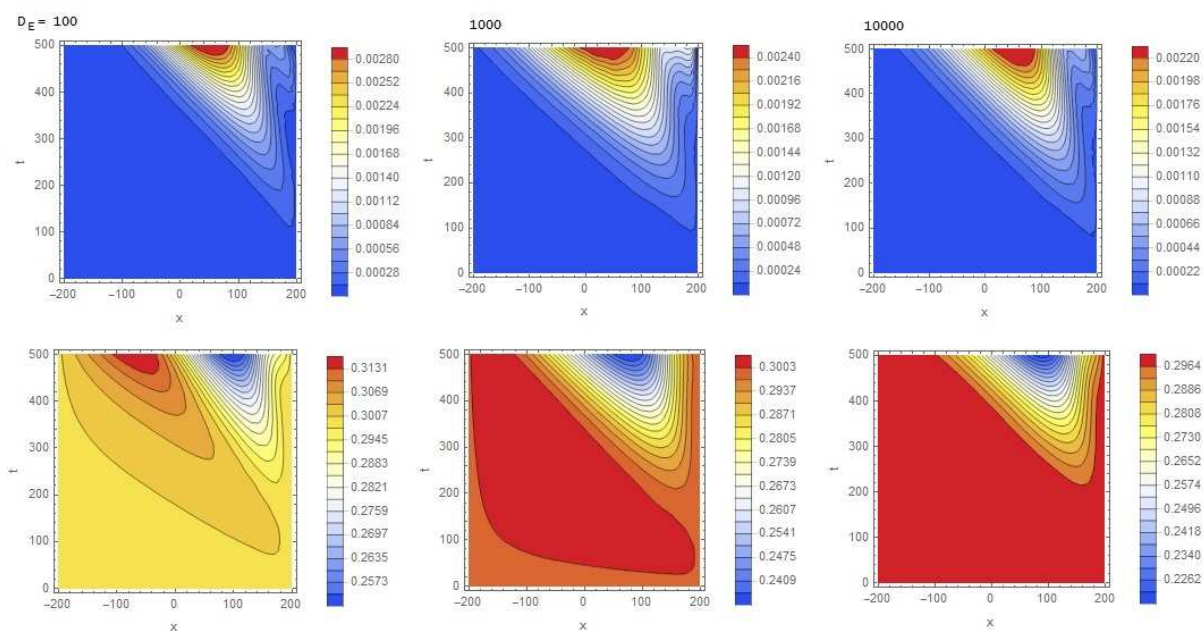


Рис. 12. Распределение плотности электронов (вверху) и электрического поля (внизу) в плоскости (t, x) для трех значений параметра диффузии электрического поля $D_E = 10^2; 10^3; 10^4$.

В хорошо проводящей среде, в которой $D_E \approx 1$, стример практически не распространяется, а все процессы ионизации и накопления электронов происходят вблизи катода. С другой стороны, в средах с малой электропроводностью стример распространяется так, как описывается оригинальной моделью [4], в которой электрическое поле вычисляется из уравнений электростатики. В этом случае скорость фронта распространения электрического поля почти точно соответствует теории [11] $u \approx 2E_0 = 0.6$ - см. правый нижний рис. 12.

Наконец, заметим, что развитые выше модели стримеров могут быть использованы в задачах моделирования разряда в проводящих средах, включая атмосферные разряды. В этом случае можно сформулировать ряд задач о распространении стримера в атмосфере того или иного состава, в том числе, на других планетах. Большой интерес представляет также решение задачи о распространении стримеров в жидких и твердых проводящих средах. Однако решение этих проблем выходит за рамки настоящего исследования.

Библиографический список

1. Wu C., Kunhardt E. E. Formation and propagation of streamers in N₂ and N₂-SF₆ mixtures//Physical Review A (General Physics), Volume 37, Issue 11, June 1, 1988, pp.4396-4406.
2. Pasko V.P., Inan U.S., Bell T.F. Spatial structure of sprites// Geophysical Research Letter, V. 25. No.12. pp. 2123-2126. 1998.
3. Montijn C., Ebert U.M., Hansdorfer W. Numerical convergence of the branching time of negative streamers//Phys. Rev. E., 73(6), 65401-1/4. 2006.
4. Alejandro Luque, Fabian Brau, Ute Ebert. Saffman-Taylor streamers: mutual finger interaction in an electric breakdown//Phys. Rev. E 78, 016206, 2008.
5. Баирханова М.Г., Гаджиев М.Х., Курбанисмаилов В.С., Омаров О.А., Рагимханов Г.Б., Катаа А.Д. НЕУСТОЙЧИВОСТЬ ФРОНТА ВОЛНЫ ИОНИЗАЦИИ КАТОДО НАПРАВЛЕННОГО СТРИМЕРА В ГЕЛИИ ВЫСОКОГО ДАВЛЕНИЯ//Прикладная физика. 2009. № 5. С. 62-66.

6. Chao Li, Ute Ebert, Willem Hansdorfer. 3D hybrid computations for streamer discharges and production of run-away electrons// arXiv:0907.0555v2, 14 Jul, 2009.
7. Papageorgiou L., Metaxas A.C., Georghiou G.E. Three-dimensional numerical modeling of gas discharges at atmospheric pressure incorporating photo ionization phenomena// J. App. Phys. 44, 2011, 045203.
8. Белогловский А.А., Верещагин И.П., Хренов С.И. ТРЕХМЕРНАЯ МАТЕМАТИЧЕСКАЯ МОДЕЛЬ СТРИМЕРНОГО РАЗРЯДА В ВОЗДУХЕ С УЧЕТОМ ВЕТВЛЕНИЯ И ФОТОИОНИЗАЦИИ// Вестник МЭИ. 2011. № 3. С. 49-51.
9. Белогловский А.А., Рушальщикова А.В. ИЗУЧЕНИЕ ВЕТВЛЕНИЯ КАТОДОНАПРАВЛЕННОГО СТРИМЕРА В ВОЗДУХЕ ПОСРЕДСТВОМ ТРЕХМЕРНОЙ МАТЕМАТИЧЕСКОЙ МОДЕЛИ//Электричество. 2016. № 7. С. 16-23.
10. Трунев А.П. Метрика кристаллического пространства// Политематический сетевой электронный научный журнал Кубанского государственного аграрного университета (Научный журнал КубГАУ) [Электронный ресурс]. – Краснодар: КубГАУ, 2017. – №03(127). Doi: 10.21515/1990-4665-127-072
11. Saffman P. G., Geoffrey Taylor. The Penetration of a Fluid into a Porous Medium or Hele-Shaw Cell Containing a More Viscous Liquid//Proc. R. Soc. Lond. A, 245, 1958.
12. Синкевич О.А. Ветвление анодонаправленного стримера// ТВТ, Т. 41, №5, 2003.
13. Савельева Л.А., Самусенко А.В., Стишков Ю.К. Причины ветвления положительного стримера в неоднородном поле// Электронная обработка материалов, 49(2), 36-47, 2013.
14. Карпов М.А., Нефедов В.И., Сигов А.С., Трефилов Н.А., Мамаева О.Ю., Железнова С.Е.. Исследование быстропротекающих процессов электронно-оптическими камерами//Фундаментальные проблемы радиоэлектронного приборостроения, Т. 10. № 1-1. С. 178-189, 2010.

References

1. Wu C., Kunhardt E. E. Formation and propagation of streamers in N₂ and N₂-SF₆ mixtures//Physical Review A (General Physics), Volume 37, Issue 11, June 1, 1988, pp.4396-4406.
2. Pasko V.P., Inan U.S., Bell T.F. Spatial structure of sprites// Geophysical Research Letter, V. 25. No.12. pp. 2123-2126. 1998.
3. Montijn C., Ebert U.M., Hansdorfer W. Numerical convergence of the branching time of negative strimers//Phys. Rev. E., 73(6), 65401-1/4. 2006.
4. Alejandro Luque, Fabian Brau, Ute Ebert. Saffman-Taylor streamers: mutual finger interaction in an electric breakdown//Phys. Rev. E 78, 016206, 2008.
5. Bairhanova M.G., Gadzhiev M.X., Kurbanismailov V.S., Omarov O.A., Ragimhanov G.B., Kataa A.D. NEUSTOJChIVOST" FRONTA VOLNY IONIZACII KATODO NAPRAVLENNOGO STRIMERA V GELII VYSOKOGO DAVLENIJa//Prikladnaja fizika. 2009. № 5. S. 62-66.
6. Chao Li, Ute Ebert, Willem Hansdorfer. 3D hybrid computations for streamer discharges and production of run-away electrons// arXiv:0907.0555v2, 14 Jul, 2009.
7. Papageorgiou L., Metaxas A.C., Georghiou G.E. Three-dimensional numerical modeling of gas discharges at atmospheric pressure incorporating photo ionization phenomena// J. App. Phys. 44, 2011, 045203.

8. Beloglovskij A.A., Vereshhagin I.P., Hrenov S.I. TREHMERNAJA MATEMATIChESKAJA MODEL" STRIMERNOGO RAZRJaDA V VOZDUHE S UChETOM VETVLENIJa I FOTOIONIZACII// Vestnik MJeI. 2011. № 3. S. 49-51.
9. Beloglovskij A.A., Rushal'shhikova A.V. IZUChENIE VETVLENIJa KATODONAPRAVLENNOGO STRIMERA V VOZDUHE POSREDSTVOM TRJoHMERNOJ MATEMATIChESKOJ MODELI//Jelektrichestvo. 2016. № 7. S. 16-23.
10. Trunev A.P. Metrika kristallicheskogo prostranstva// Politematicheskij setevoj jelektronnyj nauchnyj zhurnal Kubanskogo gosudarstvennogo agrarnogo universiteta (Nauchnyj zhurnal KubGAU) [Jelektronnyj resurs]. – Krasnodar: KubGAU, 2017. – №03(127). Doi: 10.21515/1990-4665-127-072
11. Saffman P. G., Geoffrey Taylor. The Penetration of a Fluid into a Porous Medium or Hele-Shaw Cell Containing a More Viscous Liquid//Proc. R. Soc. Lond. A, 245, 1958.
12. Sinkevich O.A. Vetvlenie anodonapravlennogo strimera// TVT, T. 41, №5, 2003.
13. Savel'eva L.A., Samusenko A.V., Stishkov Ju.K. Prichiny vetvlenija polozhitel'nogo strimera v neodnorodnom pole// Jelektronnaja obrabotka materialov, 49(2), 36-47, 2013.
14. Karpov M.A., Nefedov V.I., Sigov A.S., Trefilov N.A., Mamaeva O.Ju., Zheleznova S.E.. Issledovanie bystroptekajushhih processov jelektronno-opticheskimi kamerami//Fundamental'nye problemy radiojelektronnogo priborostroenija, T. 10. № 1-1. S. 178-189, 2010.