

УДК 532.526.4

UDC 532.526.4

01.00.00 Физико-математические науки

Physics and Math

МОДЕЛИРОВАНИЕ АТМОСФЕРНЫХ ВИХРЕВЫХ ТЕЧЕНИЙ НА ЮПИТЕРЕ И САТУРНЕ**SIMULATION OF ATMOSPHERIC VORTEX FLOWS ON JUPIER AND SATURN**Трунев Александр Петрович
К.ф.-м.н., Ph.D.Alexander Trunev
Cand.Phys.-Math.Sci., Ph.D.*Директор, A&E Trounev IT Consulting, Торонто, Канада**Director, A&E Trounev IT Consulting, Toronto, Canada*

Атмосферные течения на Юпитере и Сатурне характеризуются турбулентностью и сложной вихревой структурой, что обусловлено значительной угловой скоростью вращения газовых гигантов. В настоящей работе рассматриваются два типа вихревых течений – гексагональное течение в северной полярной области Сатурна и Большое красное пятно в экваториальной области Юпитера. Для численного моделирования турбулентных течений этих типов используется модель планетарного пограничного слоя, разработанная автором. В указанных случаях основным механизмом формирования струи связан с усилением малого по амплитуде геострофического течения, взаимодействующего с турбулентным планетарным пограничным слоем. Гексагональное течение на Сатурне, с характерными масштабами скорости и длины - 120 м/с и 14500 км соответственно, наблюдается более 35 лет. Нами было установлено, что нарушение осевой симметрии в сдвиговом геострофическом течении приводит к развитию гексагональных паттернов в турбулентном пограничном слое. Кроме того, под влиянием силы Кориолиса и градиента турбулентной вязкости в турбулентном пограничном слое образуется струя, прижатая к нижней границе слоя. Большое красное пятно на Юпитере имеет характерные масштабы скорости и длины - 150 м/с, 14000 км с юга на север и 24000-40000 км с запада на восток, наблюдается уже более 350 лет. Здесь выявлен механизм формирования вихревого течения, связанный с усилением малого по амплитуде зонального течения неоднородного по меридиональной координате в планетарном пограничном слое с градиентом сдвиговой турбулентной вязкости и при наличии объемной турбулентной вязкости на вращающейся планете. Оба механизма подтверждены численными расчетами нестационарного планетарного пограничного слоя.

Atmospheric currents on Jupiter and Saturn are characterized by turbulence and complex vortex structure, which is caused by a large angular speed of the gas giants. In this paper we consider two types of eddy currents - for hexagonal in the northern polar region of Saturn and the Great Red Spot in the equatorial region of Jupiter. For the numerical simulation of turbulent flows of this type the model of the planetary boundary layer was developed by the author. In both cases, the main strengthening mechanism is associated with geostrophic flow of small amplitude interacting with the planetary turbulent boundary layer. For hexagonal Saturn with its characteristic length scales and speed - 120 m / s and 14,500 km, respectively, there are more than 35 years data of observation. We have found that a small axial symmetry violation geostrophic flow in the shear causes the development of a hexagonal pattern in a turbulent boundary layer. In addition, under the influence of the Coriolis force and the eddy viscosity gradient in the turbulent boundary layer there is the jet formed, pressed against the lower edge of the layer. Great Red Spot on Jupiter has the characteristic velocity and length scales - 150 m / s, 14,000 km from north to south and 24000-40000 km from west to east, there are already more than 350 years data. It identified another mechanism of formation of vortex flow, coupled with the strengthening of small amplitude zonal flow in a turbulent boundary layer with the eddy viscosity gradient and the volume turbulent viscosity on a rotating planet. Both mechanisms are confirmed by numerical calculations of non-stationary planetary boundary layer.

Ключевые слова: ДИНАМИКА АТМОСФЕРЫ, ПЛАНЕТАРНЫЙ ПОГРАНИЧНЫЙ СЛОЙ, САТУРН, ТУРБУЛЕНТНОСТЬ, ЮПИТЕР

Keywords: DYNAMICS OF ATMOSPHERE, PLANETARY BOUNDARY LAYER, SATURN, TURBULENCE, JUPITER

Doi: 10.21515/1990-4665-126-050

Введение

Атмосферные течения на Юпитере и Сатурне характеризуются турбулентностью и сложной вихревой структурой, что обусловлено значительной угловой скоростью вращения газовых гигантов [1-20]. В настоящее время на северном полюсе Сатурна в районе 75°N (PC) широты (78°N PG), наблюдается крупномасштабное гексагональное течение, с характерными масштабами скорости и длины - 120 м/с и 14500 км соответственно. Это течение, наблюдаемое уже более 35 лет, является предметом многочисленных экспериментальных и теоретических исследований [1-11].

Существует несколько объяснений структуры течения на северном полюсе Сатурна – возможная связь явления с магнитным полем [1], волновая теория [2], гипотеза нелинейного равновесия неустойчивой баротропной струи, подтвержденная лабораторными экспериментами [3], численная модель эволюции гауссовой струи в стратифицированной атмосфере [4]. В теории [2] предполагается, что существует дифференциальное вращение, обусловленное наличием антициклона во внешней области гексагонального течения, которое, таким образом, представляет собой стационарные волны Россби. Основным недостатком модели [3] является ее верификация в узкой области параметров, далеких от наблюдаемых величин. В модели [4] используется гипотеза о динамическом равновесии при заданной начальной скорости струи, практически совпадающей с наблюдаемой скоростью 100-120 км/с [4-5]. Кроме того, не учитывается турбулентность течения, которая может значительно повлиять на динамику струи.

В работах [21-27] мы рассмотрели некоторые вопросы моделирования неизотермических потоков в планетарном пограничном слое с учетом градиента давления, ускорения потока, силы плавучести и силы Кориолиса. В

работе [27] предложена модель и рассматриваются численные решения уравнений, описывающих турбулентное течение в планетарном пограничном слое вокруг северного полюса Сатурна. В модели [27] предполагается, что геострофическое течение с амплитудой скорости порядка 10 м/с, описывается функцией тока в виде суммы нулевой и шестой гармоник. Это приводит к возбуждению течения на верхней границе планетарного пограничного слоя. Установлено, что такого рода возбуждение усиливается в пограничном слое и достигает максимума порядка 180 м/с в струе, прижатой к нижней границе. Указанный механизм возбуждения гексагонального течения на северном полюсе Сатурна подтвержден численными расчетами трехмерного нестационарного планетарного пограничного слоя.

В настоящей работе рассматриваются два типа вихревых течений – гексагональное течение в северной полярной области Сатурна и Большое красное пятно в экваториальной области Юпитера. Для численного моделирования турбулентных течений указанного типа используется модель планетарного пограничного слоя [21-27].

Большое красное пятно на Юпитере имеет характерные масштабы скорости и длины - 150 м/с, 14000 км с юга на север и 24000-40000 км с запада на восток, наблюдается уже более 350 лет. Для этого случая установлен механизм формирования вихревого течения, связанный с усилением малого по амплитуде зонального течения неоднородного по меридиональной координате в планетарном пограничном слое с градиентом сдвиговой турбулентной вязкости и при наличии объемной турбулентной вязкости на вращающейся планете, что подтверждено численными расчетами трехмерного нестационарного планетарного пограничного слоя.

Моделирования турбулентных течений в планетарном пограничном слое

Рассмотрим систему уравнений, описывающую неизотермическое атмосферное течение несжимаемого газа с учетом силы плавучести и силы Кориолиса, имеем [21-27]

$$\begin{aligned} \nabla \cdot \mathbf{u} &= 0 \\ \frac{\partial \mathbf{u}}{\partial t} + (\mathbf{u} \cdot \nabla) \mathbf{u} + 2[\mathbf{\Omega} \mathbf{u}] + \frac{\nabla P}{\rho_0} &= \nu \nabla^2 \mathbf{u} + \frac{\mathbf{g}}{\rho_0} (\rho - \rho_0) \\ \frac{\partial T}{\partial t} + (\mathbf{u} \cdot \nabla) T &= \frac{\nu}{\text{Pr}} \nabla^2 T \\ \frac{\partial \phi}{\partial t} + (\mathbf{u} \cdot \nabla) \phi &= \frac{\nu}{\text{Sc}} \nabla^2 \phi \end{aligned} \quad (1)$$

Здесь обозначено: $\mathbf{u} = (u, v, w)$ - вектор скорость потока; $\mathbf{\Omega}$ - вектор угловой скорости вращения планеты; ρ - плотность; ν - кинематическая вязкость; P - давление за вычетом гидростатического атмосферного давления; \mathbf{g} - вектор ускорения свободного падения; ρ_0 - равновесная плотность; T - температура, Pr - число Прандтля; ϕ - массовая концентрация примеси; $\text{Sc} = \nu / D$ - число Шмидта; D - коэффициент молекулярной диффузии.

Гидростатическое уравнение и стандартное приближение Буссенеска для возмущений плотности заданы в виде

$$\nabla p_0 = \mathbf{g} \rho_0(p_0, T_0), \quad \rho - \rho_0 = -\rho_0 \beta (T - T_0) \quad (2)$$

Здесь $\beta = -\rho^{-1}(\partial \rho / \partial T)_p$ - коэффициент расширения, $\beta = 1/T$ для идеального газа.

Определим систему декартовых координат таким образом, что бы ось Z была направлена против направления вектора ускорения свободного падения. Рельеф обтекаемой поверхности описывается уравнением $z = r(x, y)$ - рис. 1.

Граничные условия для параметров течения зададим на обтекаемой поверхности и на границе пограничного слоя следующим образом:

$$\begin{aligned} z = r(x, y): \quad \mathbf{u} = 0, \quad T = T_g, \quad \phi = \phi_g \\ z = H: \quad \mathbf{u} = U_0(1, 0, 0), \quad T = T_0, \quad \phi = \phi_0. \end{aligned} \quad (3)$$

Здесь T_g - температура подстилающей поверхности, ϕ_g - концентрация примеси на поверхности, H - высота пограничного слоя, U_0 - скорость течения на высоте $z = H$, T_0, ϕ_0 - температура и концентрация примеси на высоте $z = H$ соответственно.

По координатам x, y зададим периодические граничные условия. Считаем, что в начальный момент скорость течения, температура и концентрация примеси описываются линейными функциями, имеем

$$t = 0: \quad \mathbf{u} = U_0 z / H, \quad T = T_g + (T_0 - T_g) z / H, \quad \phi = \phi_g + (\phi_0 - \phi_g) z / H \quad (4)$$

Решения задачи (1)-(4) для различных турбулентных течений были получены в наших работах [21-24] и других. Практически при любой функции распределения шероховатости $z = r(x, y)$ течение довольно быстро переходит в турбулентный режим с установлением логарифмического профиля скорости, температуры и концентрации примеси

Обратимся к методу решения проблемы турбулентной диффузии, который был предложен в наших работах [21-24]. Основная идея заключается во введении в уравнения (1) случайных параметров. Например, в пограничном слое можно представить вектор скорости течения $\mathbf{u} = (u, v, w)$ в форме $\mathbf{u} = \mathbf{u}(x, y, z/h(x, y, t), t)$, где $h = h(x, y, t)$ - это поверхность, описывающая динамическую шероховатость.

Такую поверхность можно характеризовать случайными параметрами h, h_x, h_y , которые имеют смысл высоты, скорости движения элемента и

наклонов поверхности. Обозначим функцию распределения этих параметров $f_s = f_s(h, h_x, h_y, h_t)$.

Предположим, что $\eta = z/h = const$ и рассмотрим достаточно представительную область течения объемом $dV = L_x L_y dz$, где L_x, L_y - типичные масштабы течения в направлениях x, y соответственно – рис.1. Рассмотрим подобласть течения dV_s , которая принадлежит рассматриваемой области течения dV , и в которой случайные параметры h, h_t, h_x, h_y изменяются в интервалах $(h; h + dh)$, $(h_t; h_t + dh_t)$, $(h_x; h_x + dh_x)$, $(h_y; h_y + dh_y)$.

В общем случае подобласть dV_s является многосвязной областью, объем которой задается уравнением

$$dV_s = dV f_s(h, h_x, h_y, h_t) dh dh_x dh_y dh_t.$$

Случайная амплитуда скорости может быть определена путем суммирования выражения $\mathbf{u} = \mathbf{u}(x, y, z/h(x, y, t), t)$ в объеме dV_s :

$$\tilde{\mathbf{u}}(\eta, t, h, h_x, h_y, h_t) = \lim_{\delta V \rightarrow dV_s} \frac{1}{\delta V} \int \mathbf{u}(x, y, \eta, t) dx dy dz \quad (5)$$

Здесь δV - произвольный объем, вложенный в $dV = L_x L_y dz$ и содержащий dV_s . Статистический момент порядка m случайной функции $\tilde{\mathbf{u}}(\eta, t, h, h_x, h_y, h_t)$ определяется следующим образом

$$\bar{u}^m(z, t) = \int \tilde{u}^m(\eta, t, h, h_x, h_y, h_t) f_s(h, h_x, h_y, h_t) dh dh_x dh_y dh_t \quad (6)$$

В результате применения указанных преобразований система уравнений (1) принимает вид [21-24]:

$$\begin{aligned} \frac{\partial \tilde{w}}{\partial \eta} - \eta \frac{\partial \Phi}{\partial \eta} &= 0 \quad (7) \\ \frac{\partial \tilde{\mathbf{u}}}{\partial t} + \frac{\tilde{W}}{h} \frac{\partial \tilde{\mathbf{u}}}{\partial \eta} + \frac{\mathbf{N}}{\rho_0 h} \frac{\partial \tilde{P}}{\partial \eta} + 2[\mathbf{\Omega} \tilde{\mathbf{u}}] &= \frac{\nu}{h^2} \frac{\partial}{\partial \eta} (1 + n^2 \eta^2) \frac{\partial \tilde{\mathbf{u}}}{\partial \eta} - \\ &- \frac{\nu n^2 \eta}{h^2} \frac{\partial \tilde{\mathbf{u}}}{\partial \eta} + \frac{\nu \mathbf{N}}{h^2} \frac{\partial \Phi}{\partial \eta} + \frac{\mathbf{g}}{\rho_0} (\tilde{\rho} - \rho_0) \end{aligned}$$

$$\frac{\partial \tilde{T}}{\partial t} + \frac{\tilde{W}}{h} \frac{\partial \tilde{T}}{\partial \eta} = \frac{\nu}{Pr h^2} \frac{\partial}{\partial \eta} (1 + n^2 \eta^2) \frac{\partial \tilde{T}}{\partial \eta} - \frac{\nu n^2 \eta}{Pr h^2} \frac{\partial \tilde{T}}{\partial \eta}$$

$$\frac{\partial \tilde{\phi}}{\partial t} + \frac{\tilde{W}}{h} \frac{\partial \tilde{\phi}}{\partial \eta} = \frac{\nu}{Sch^2} \frac{\partial}{\partial \eta} (1 + n^2 \eta^2) \frac{\partial \tilde{\phi}}{\partial \eta} - \frac{\nu n^2 \eta}{Sch^2} \frac{\partial \tilde{\phi}}{\partial \eta}$$

Здесь $\tilde{W} = \tilde{w} - \eta \Phi$, $\Phi = h_t + h_x \tilde{u} + h_y \tilde{v}$, $\tilde{P} = \tilde{p} + \theta$, $n = \sqrt{h_x^2 + h_y^2}$, $\mathbf{N} = (-\eta h_x, -\eta h_y, 1)$.

Отметим, что фигурирующая в уравнениях (7) турбулентная вязкость пропорциональна квадрату расстояния до шероховатой стенки. Система уравнений (7) имеет установившееся решение в форме логарифмического профиля, как для скорости, так и для температуры и концентрации [23-24].

Модель (7) тестировалась в случае неизотермических течений над шероховатой поверхностью в градиентах давления и с учетом сил плавучести и силы Кориолиса. Некоторые результаты приведены на рис. 1, А, В, С – сплошные линии вместе с данными экспериментов [28-31]: А - профиль скорости в турбулентном пограничном слое с положительным градиентом давления [28]; В - профили скорости и температуры при неустойчивой стратификации [29-30]; С – угол разворота потока и скорость в нейтрально стратифицированном планетарном пограничном слое [31].

Модель турбулентной объемной вязкости

В задаче о формировании вихревых турбулентных течений типа Большого красного пятна на Юпитере большую роль играет турбулентная объемная вязкость [25-26]. Анализ системы уравнений (7) показывает, что уравнение неразрывности в турбулентном потоке принимает вид как для сжимаемой среды, хотя в исходной системе уравнений Навье-Стокса (1) предполагается течение несжимаемого газа.

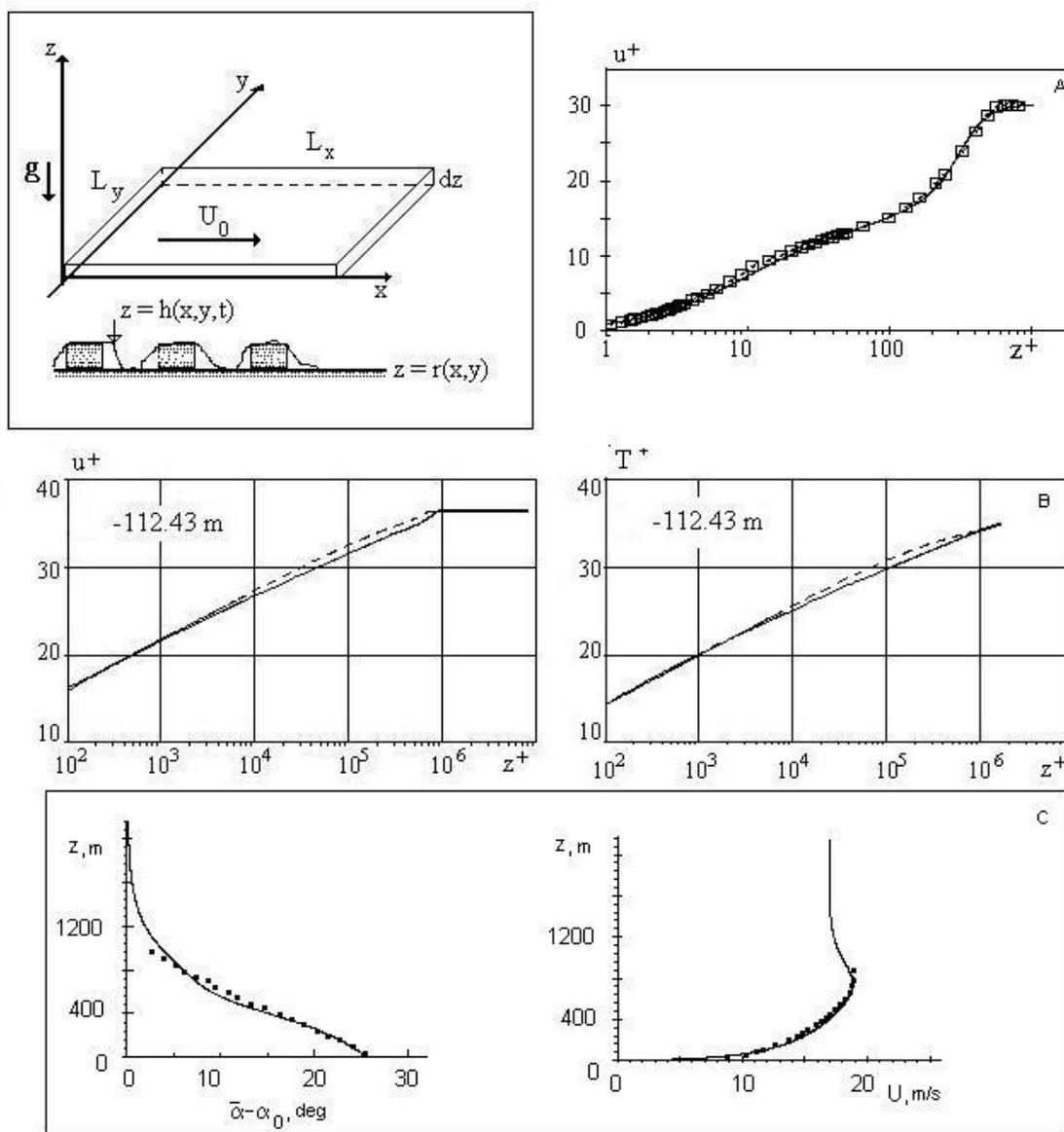


Рис.1. Геометрия течения над шероховатой поверхностью и результаты тестирования модели планетарного пограничного слоя [23-24].

Условие $\nabla \cdot \mathbf{u} = 0$ означает, что существует ограничение на число Маха потока [32]

$$M = U_0 / c_s \ll 1 \tag{8}$$

Здесь c_s – скорость звука. Однако, в задачах, связанных с генерацией звука в турбулентном потоке [25-26], условие (8) может нарушаться, что приводит к необходимости учета сжимаемости среды. При этом желательно, чтобы тип системы уравнений (1) не изменился при всех ее модификациях. Рассмотрим подход [25-26] к учету сжимаемости без изменения типа системы уравнений (1). Запишем уравнение неразрывности для сжимаемой среды в форме

$$\nabla \cdot \mathbf{u} = -\rho^{-1} \frac{d\rho}{dt} = -\frac{1}{\rho c_s^2} \frac{dP}{dt} \quad (9)$$

Оценка правой части уравнения (9) имеет порядок $M^2 \omega_0$, где ω_0 – характерная частота пульсаций давления. Для больших частот колебаний параметров потока, характерных для турбулентных режимов, условия (8) может оказаться недостаточно для того, чтобы положить нулю правую часть уравнения (9). Область таких частот определяется неравенством $M^2 \omega_0 \geq 1$.

Следовательно, турбулентная среда не может считаться несжимаемой даже при малых числах Маха. Для такой среды необходимо сформулировать такое уравнение состояния, которое отражало бы связь параметров в турбулентном потоке. Рассмотрим функционал

$$\tilde{P} = \frac{1}{t} \int_0^t P dt \quad (10)$$

Функционал (10) обладает следующими свойствами

$$\begin{aligned} \tilde{P} &= \lim_{t \rightarrow 0} \frac{1}{t} \int_0^t P dt = P \\ \tilde{P} &= \lim_{t \rightarrow \infty} \frac{1}{t} \int_0^t P dt = \langle P \rangle \end{aligned} \quad (11)$$

Таким образом, используя функционал (10) можно описать мгновенное и среднее значение давления в турбулентном потоке. Вычисляя производную по времени от обеих частей выражения (10), находим

$$\frac{\partial \tilde{P}}{\partial t} = \frac{P - \tilde{P}}{t} \quad (12)$$

Положим в правой части (12) $t = 1/\omega_0$, а соответствующий этому времени функционал (10) обозначим P_0 . Теперь мы можем сформулировать необходимый критерий регуляризации в виде

$$\frac{dP}{dt} = \alpha\omega_0(P - P_0) \quad (13)$$

Здесь α, ω_0, P_0 – некоторые параметры, которые могут быть определены для потока в целом. В результате применения (13) к уравнению (10), находим

$$\nabla \cdot \mathbf{u} = -\alpha\omega_0 \frac{P - P_0}{\rho c_s^2} = -\frac{P - P_0}{\mu_T} \quad (14)$$

Где обозначено $\mu_T = \rho c_s^2 / \alpha\omega_0$ - параметр, характеризующий вязкость в турбулентном потоке. Используя уравнение (14), можно переформулировать модель Навье-Стокса (1) в виде, удобном для численного интегрирования. Для этого запишем второе уравнение (1) в общей форме

$$\frac{\partial \mathbf{u}}{\partial t} + (\mathbf{u} \cdot \nabla) \mathbf{u} + \frac{\nabla P}{\rho_0} = \nu \nabla^2 \mathbf{u} + \mathbf{f} \quad (15)$$

Здесь $\mathbf{f} = \mathbf{f}(t, x_i)$ – вектор объемных сил. Вычислим дивергенцию от обеих частей уравнения (15), тогда, используя (14) с постоянными параметрами μ_T, P_0 получим

$$\frac{\partial P}{\partial t} + (\mathbf{u} \cdot \nabla) P = \nu_T \nabla^2 P - \mu_T (\nabla \cdot \mathbf{f}) - \mu_T \frac{\partial u_i}{\partial x_k} \frac{\partial u_k}{\partial x_i} \quad (16)$$

Здесь по повторяющимся индексам $i, k = 1, 2, 3$ осуществляется суммирование, $\nu_T = (\mu_T + \mu) / \rho_0$ - параметр турбулентной диффузии поля давления, $\mu = \rho_0 \nu$ - динамическая вязкость. Таким образом, мы можем записать уравнения Навье-Стокса (1) в виде системы уравнений параболического типа:

$$\begin{aligned} \frac{\partial u_i}{\partial t} + (\mathbf{u} \cdot \nabla) u_i + \frac{1}{\rho_0} \frac{\partial P}{\partial x_i} &= \nu \nabla^2 u_i + f_i, \quad i = 1, 2, 3 \\ \frac{\partial P}{\partial t} + (\mathbf{u} \cdot \nabla) P &= \nu_T \nabla^2 P - \mu_T (\nabla \cdot \mathbf{f}) - \mu_T \frac{\partial u_i}{\partial x_k} \frac{\partial u_k}{\partial x_i} \\ \frac{\partial T}{\partial t} + (\mathbf{u} \cdot \nabla) T &= \frac{\nu}{Pr} \nabla^2 T \\ \frac{\partial \phi}{\partial t} + (\mathbf{u} \cdot \nabla) \phi &= \frac{\nu}{Sc} \nabla^2 \phi \end{aligned} \quad (17)$$

Отметим, что параметры турбулентной диффузии и вязкости возникают в системе (17) в силу уравнения (14). Система уравнений (17) может быть использована для моделирования неустановившихся турбулентных течений [25-27].

Другой вариант преобразованной системы уравнений Навье-Стокса может быть получен путем прямой подстановки выражения давления (14) в уравнение (15), имеем

$$\frac{\partial \mathbf{u}}{\partial t} + (\mathbf{u} \cdot \nabla) \mathbf{u} + \frac{\nabla P_0}{\rho_0} = \nu \nabla^2 \mathbf{u} + \frac{1}{\rho_0} \nabla (\mu_T (\nabla \cdot \mathbf{u})) + \mathbf{f} \quad (18)$$

Здесь параметры P_0, μ_T следует считать заданными функциями координат и времени. Отметим, что в модели (18) турбулентность проявляется через механизм второй или объемной вязкости, а не через сдвиговые напряжения, как в стандартных моделях турбулентности, включая модель [21-24].

В случае атмосферных течений можно объединить модели (7) и (17) в одну модель, имеем:

$$\begin{aligned} \frac{\partial P}{\partial t} + \nabla(\mathbf{u}P) &= \rho \nabla \left(\nu_T \nabla \frac{P}{\rho} \right) \\ \frac{\partial u_i}{\partial t} + (\mathbf{u} \cdot \nabla) u_i + \frac{1}{\rho} \frac{\partial P}{\partial x_i} + 2\varepsilon_{ikl} \Omega_k u_l &= \nabla [\nu(P_0, T_0) (1 + k_r^2 z^2) \nabla u_i] \end{aligned} \quad (19)$$

Здесь $i = 1, 2, 3$; ε_{ikl} - тензор Леви-Чивита, k_r - параметр шероховатости подстилающей поверхности, $P_0 = P_0(z), T_0 = T_0(z)$ - статическое распределение давления по высоте атмосферы.

Численная модель гексагонального течения на северном полюсе Сатурна

В работе [27] система уравнений (19-20) решалась численно методом установления в прямоугольной области $-L_x \leq x \leq L_x, -L_y \leq y \leq L_y, 0 \leq z \leq L$. Результаты расчетов приведены на рис 2. Все величины в уравнениях (19) приводились к безразмерному виду. В качестве масштаба скорости используется произведение $\omega L_0 / 2 \approx 2973 \text{ m/s}$, где $L_0 \approx 36250 \text{ km}$ – выбранный нами масштаб моделирования, который охватывает струю гексагонального течения и некоторую часть внешнего течения, $\omega = 1.63785 \cdot 10^{-4} \text{ rad/s}$ – угловая скорость вращения Сатурна в северных широтах [5].

Для обеспечения необходимых свойств формирования гексагональной струи, система уравнений (19) замещалась системой:

$$\begin{aligned} \frac{\partial P}{\partial t} + \nabla(\mathbf{u}P) &= \frac{1}{\text{Pr}} \nabla(v_T \nabla P), v_T = a \frac{(1 + k_a^2 z^2)}{(1 - k_a^2 z^2)} \\ \frac{\partial u_i}{\partial t} + (\mathbf{u} \cdot \nabla) u_i + \frac{\partial P}{\partial x_i} + 2\varepsilon_{ikl} \Omega_k u_l &= \nabla(v_T \nabla u_i) \end{aligned} \quad (20)$$

Здесь $i = 1, 2, 3$; a, k_a - параметры. В качестве начальных данных использовались нулевые данные:

$$t = 0 : P = 0, \mathbf{u} = 0 \quad (21)$$

В качестве граничных условий на нижней границе использовались нулевые граничные условия (21), а на верхней границе и на боковых стенках использовалось точное решение для плоского геострофического течения

$$\begin{aligned} u_x &= \frac{\partial \psi}{\partial y}, \quad u_y = -\frac{\partial \psi}{\partial x}, \quad \nabla^2 \psi = 0 \\ \psi &= \{A_0 J_0(k_0 r) \exp[-k_0(L-z)] + A_6 J_6(k_6 r) \sin(6\phi) \exp[-k_6(L-z)]\} (1 - e^{-t/\tau}) \end{aligned} \quad (22)$$

Здесь $r = \sqrt{x^2 + y^2}$, $\phi = \arctan(y/x)$, параметры модели A_i, k_i подбираются из условия согласования с экспериментальными данными, τ - время установления, которое везде ниже принято за единицу, $\tau = 1$.

В области взаимодействия геострофического течения с турбулентным пограничным слоем в качестве граничных условий на верхней границе и на боковых стенках использовался модельный профиль, описывающий сдвиговое течение:

$$\begin{aligned} u_x &= -yF(r), \quad u_y = xF(r), \\ F(r) &= [\omega - 0.5(\omega_1 + \omega_2) + 0.5(\omega_1 - \omega_2) \tanh(kr - R - b|x|)](1 - e^{-t/\tau}) / \omega \end{aligned} \quad (23)$$

Параметры завихренности и угловая скорость вращения Сатурна составляют по данным [5]

$$\omega_1 = 1.63782 \cdot 10^{-4}, \omega_2 = 1.63792 \cdot 10^{-4}, \omega = 1.63785 \cdot 10^{-4} \quad (24)$$

Задавая параметры модели и профиля (24) можно получить гексагональные паттерны в турбулентном пограничном слое [27]. Далее будем моделировать геострофическое течение согласно (22), как комбинацию нулевой и шестой гармоник с параметрами

$$\begin{aligned} k_0 &= 26.440162, k_6 = 24.263135, A_0 = 0.007/k_0, A_6 = 0.0035/k_6 \\ L_x = L_y &= 0.5, L = 0.006, k_a = 0.975/L, Pr = 0.72, a = 10^{-3}. \end{aligned} \quad (25)$$

Отметим, что параметры (25) отличаются от соответствующих данных, приведенных в [27] значением коэффициента A_6 , который в настоящей работе выбран в половину меньше. Для оптимизации профиля с существующим в северных широтах Сатурна профилем течения [5] вместо функции Бесселя $J_0(k_0 r)$ в выражении (22) использовалась функция $J_0(k_0 r) + 0.3k_0 r$.

На рис. 2 представлены изолинии азимутальной компоненты скорости и линии тока гексагонального течения в средней части пограничного слоя.

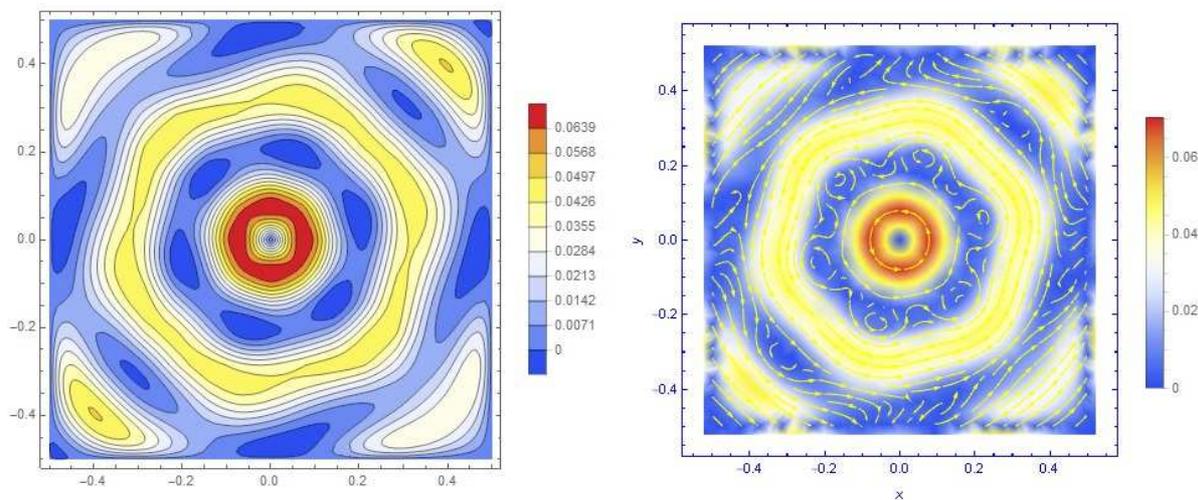


Рис. 2. Изолинии безразмерной азимутальной скорости (слева) и линии тока (справа) гексагонального течения в сечении $z = L/2$, где достигается максимальная скорость струи. Для получения размерных величин данные безразмерной скорости следует умножить на выбранный масштаб $\omega L_0 / 2 \approx 2973 \text{ m/s}$.

При распространении вглубь пограничного слоя скорость течения возрастает и достигает максимального значения около 180 м/с. Отметим, что гексагональное течение при визуализации по модулю скорости выглядит как отвесная стена, высотой около 100 км [27]. Было установлено [5], что вокруг северного полюса существует циклоническое течение, скорость которого превосходит скорость в гексагональной струе. Действительно, данные на рис. 2 показывают, что азимутальная скорость достигает максимального значения в области $r \approx 0.1$ и спадает на периферии.

Отметим, что линии тока на рис. 2 указывают на наличие вихрей, распределенных по сторонам шестиугольника, что качественно согласуется с лабораторной моделью гексагонального течения [3]. С другой стороны,

картина распределения модуля скорости качественно соответствует аналогичному распределению, полученному в модели [4].

Возбуждение шестой гармоники является естественным откликом при деформации симметричного сдвигового геострофического течения, взаимодействующего с планетарным пограничным слоем. Дальнейшее развитие течения ведет к образованию гексагональной струи с высокой скоростью в пограничном слое – рис. 2, которая, тем не менее, является малой величиной в сравнении с основным масштабом скорости $\omega L_0 / 2 \approx 2973 \text{ m/s}$.

Следовательно, наблюдаемое течение в гексагональной струе можно рассматривать как малое возмущение основного течения [2]. Отсюда следует, что волновые числа, фигурирующие в выражении функции тока (22) должны соответствовать стоячим волнам, что использовано для нахождения этих параметров при формировании данных (25).

Выбранный масштаб моделирования толщины планетарного пограничного слоя в безразмерных единицах составляет 0.006, что соответствует 217.5 км, а максимум скорости струи приходится на высоту 0.003, что соответствует 108.75 км.

Таким образом, мы установили механизм образования гексагонального течения на северном полюсе Сатурна, который заключается в усилении слабого геострофического течения в турбулентном планетарном пограничном слое.

Численная модель вихревого турбулентного течения в Большом красном пятне на Юпитере

Для моделирования течения в Большом красном пятне используем систему уравнений (20), в которой учтем объемную турбулентную вязкость, имеем

$$\begin{aligned} \frac{\partial P}{\partial t} + \nabla(\mathbf{u}P) &= \frac{1}{Pr} \nabla(v_T \nabla P), v_T = a \frac{(1 + k_a^2 z^2)}{(1 - k_a^2 z^2)} \\ \frac{\partial u_i}{\partial t} + (\mathbf{u} \cdot \nabla) u_i + \frac{\partial P}{\partial x_i} + 2\varepsilon_{ikl} \Omega_k u_l &= \nabla(v_T \nabla u_i) + \frac{\partial}{\partial x_i} (v_2 \nabla \cdot \mathbf{u}) \end{aligned} \quad (26)$$

Здесь v_2 параметр объемной турбулентной вязкости, который в данной модели принимается константой. В качестве масштаба длины используем экваториальный радиус Юпитера $R_0 \approx 71492 km$, за масштаб скорости возьмем произведение $\Omega R_0 \approx 12572 m/s$, а за масштаб времени примем $1/\Omega$, где $\Omega \approx 0.000175852 rad/s$ - угловая скорость вращения, определенная по сидерическому периоду обращения Юпитера.

Система уравнений (27) решалась численно методом установления в прямоугольной области $0 \leq x \leq L_x, L_0 \leq y \leq L_y, 0 \leq z \leq L$. Здесь координаты x, y отсчитываются с востока на запад и от экватора на юг соответственно. Положим $a_1 = a/\Omega R_0, a_2 = v_2/\Omega R_0$ - безразмерные параметры турбулентного переноса. В качестве начальных данных используем нулевые данные (21), в качестве граничных условий используем зональное течение периодическое по меридиональной координате [37]

$$\begin{aligned} t = 0 : \mathbf{u} &= 0 \\ t > 0 : u_x(t, x, L_y, z) &= g(t, L_y, z), u_x(t, x, L_0, z) = g(t, L_0, z), \\ u_x(t, 0, y, z) &= u_x(t, L_x, y, z) = g(t, y, z), \\ u_x(t, x, y, 0) &= 0, u_x(t, x, y, L) = g(t, y, L), \\ u_y(t, 0, y, z) &= u_y(t, x, L_0, z) = u_y(t, x, L_y, z) = u_y(t, L_x, y, z) = 0 \\ u_y(t, x, y, 0) &= u_y(t, x, y, L) = 0 \\ g(t, y, z) &= -(1 - e^{-t})(u_0 \sin[k(y - y_1)] + u_1)(1 + 12z(L - z))/4 \end{aligned} \quad (27)$$

Параметры 3D модели были выбраны следующие

$$\begin{aligned}k &= 18.3, u_0 = 0.0012, u_1 = 1.2 \times 10^{-4}, y_1 = \pi/180 \\L_x &= 0.48, L_0 = 0.19, L_y = \pi/6, L = 0.00524 \\k_a &= 0.975/L, Pr = 0.72, a_1 = 10^{-4}, a_2 = 15\end{aligned}\quad (28)$$

Отметим, что граничные условия (27) с параметрами (28) описывают зональное периодическое течение, которое на верхней границе пограничного слоя имеет амплитуду скорости около 15 м/с.

Это течение усиливается в пограничном слое за счет градиента сдвиговой турбулентной вязкости до 150 м/с в пятне и до 40-60 м/с в окружающем течении, что соответствует данным [37].

Трехмерное течение при выбранных параметрах (28) устанавливается достаточно быстро до момента $t = 3$ и далее меняется довольно слабо. На рис. 3 показаны линии тока течения, вычисленные по модели (26)-(28) в сечениях $z = 0.3L, 0.4L, 0.6L, 0.7L$. На рис. 4 представлены эпюры зональной (слева) и меридиональной (справа) скорости в Большом красном пятне – сплошные синие линии, данные [14-16] – сплошные серые линии, пунктир и точки. Эпюры скорости соответствуют сечениям в плоскости $z = L/2$, проходящим через центр вихря.

Сравнение эпюр зональной и меридиональной скорости с данными [14-16] – рис. 4, показывает, при их качественном совпадении в основной части течения, значительное численное расхождение. Это расхождение объясняется, в первую очередь, тем, что параметры и начальные данные модели (26)-(28) не были оптимизированы для наилучшего согласования с имеющимися экспериментальными данными [14-16], которые были получены путем обработки изображений переданных с борта автоматических космических аппаратов Voyager (1979) и Galileo (1996, 2000). Следует заметить, что данные [13, 33-37], полученные Cassini, мало отличаются от аналогичных данных [14-16, 38] и здесь не приводятся.

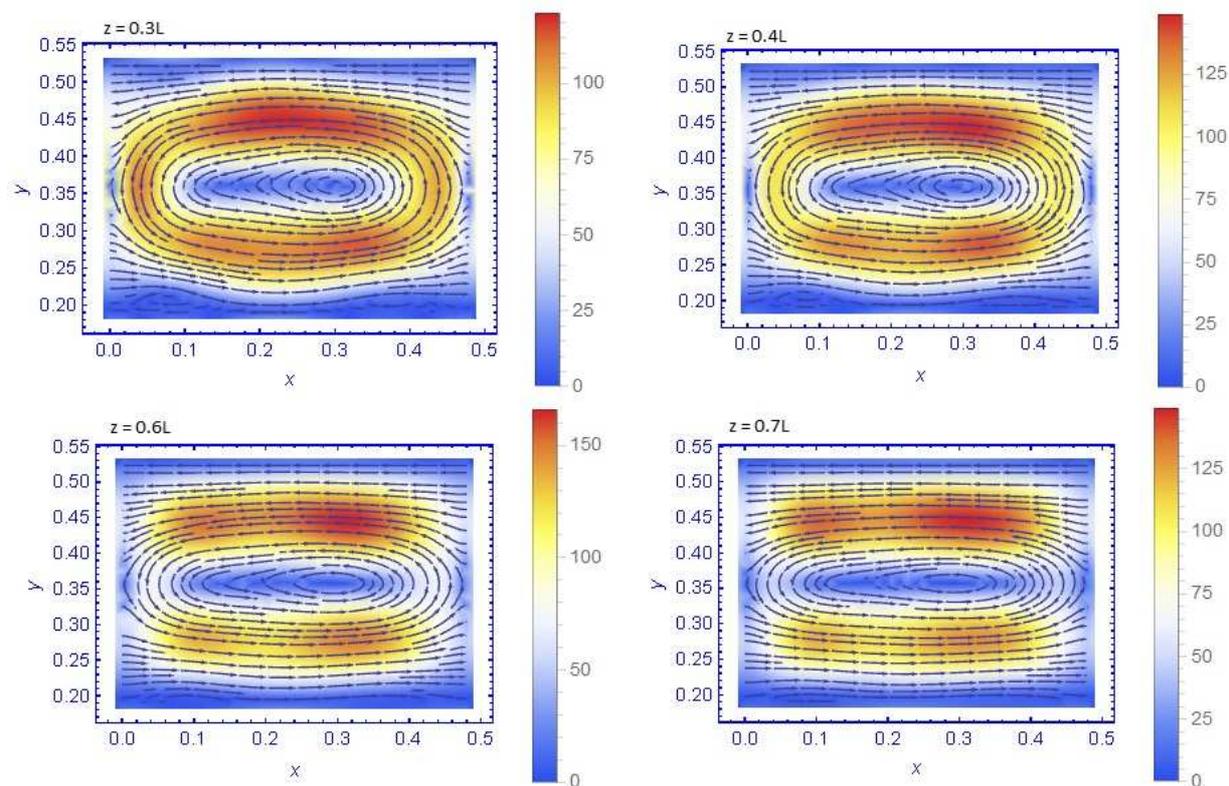


Рис. 3. Линии тока течения, вычисленные по модели (26)-(27) с данными (28) в сечениях $z = 0.3L, 0.4L, 0.6L, 0.7L$.

На рис. 5 показано распределение модуля скорости в сечении $y = 0.36$ (слева) и вектора скорости течения (справа) по глубине планетарного пограничного слоя. Из представленных на рис. 5 данных следует, что максимум скорости вихревого течения достигается в центральной части пограничного слоя, как и в аналогичном случае гексагонального течения на северном полюсе Сатурна [27].

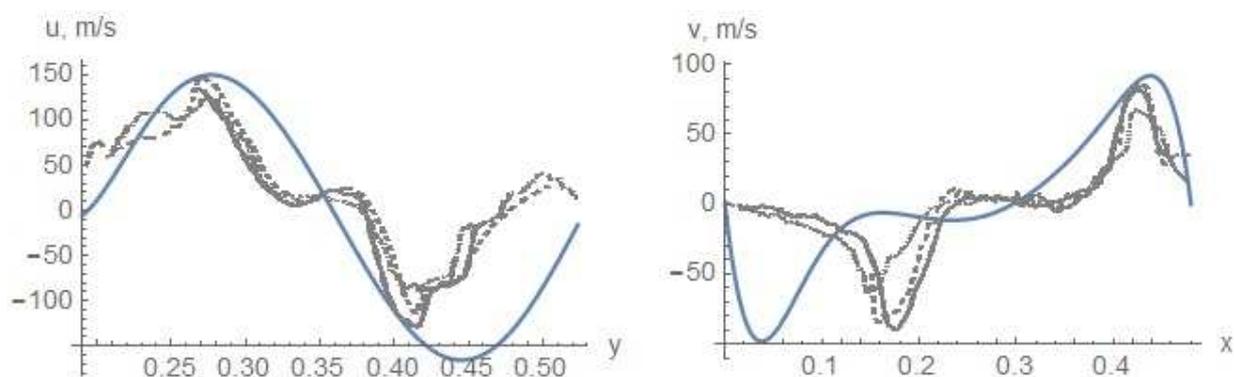


Рис. 4. Эпюры зональной (слева) и меридиональной (справа) скорости в Большом красном пятне: расчет по модели (26)-(28) – сплошные синие линии, данные [14-16] – сплошные серые линии, пунктир и точки.

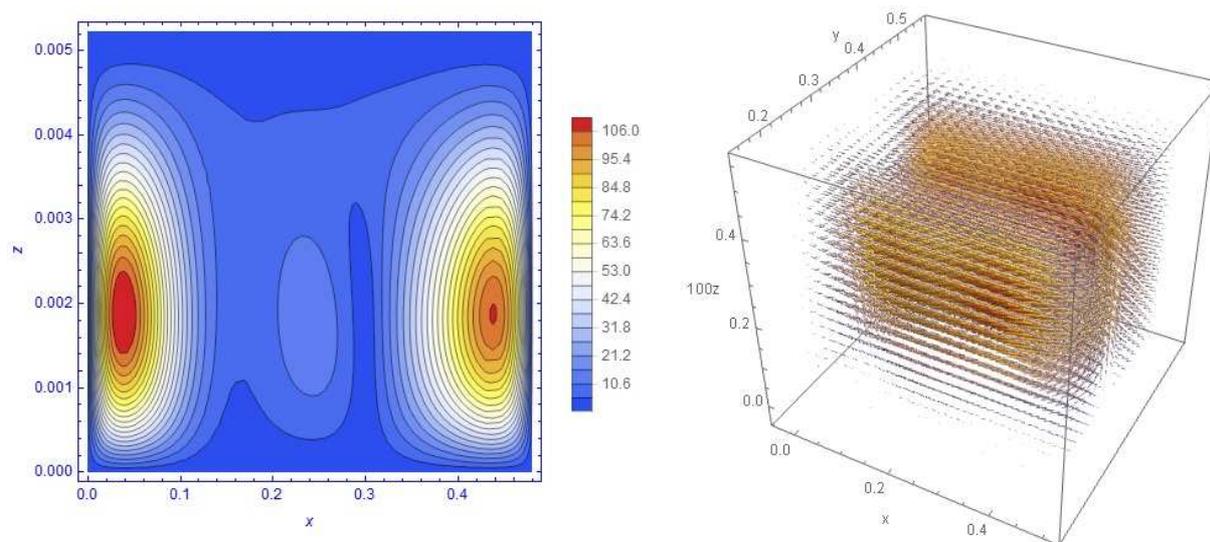


Рис. 5. Распределение модуля скорости в сечении $y = 0.36$ (слева) и вектора скорости течения (справа) по глубине планетарного пограничного слоя (на правом рисунке масштаб по координате z увеличен в 100 раз).

Следует заметить, что при уменьшении сдвиговой турбулентной вязкости на порядок, вихрь теряет устойчивость и распадается на два вихря – верхний левый рис. 6. При увеличении же сдвиговой вязкости на порядок

форма линий тока становится более симметричной – верхний правый рис.6. Размеры вихря вдоль меридиональной координаты уменьшаются при уменьшении параметра объемной вязкости – нижний левый рис. 6.

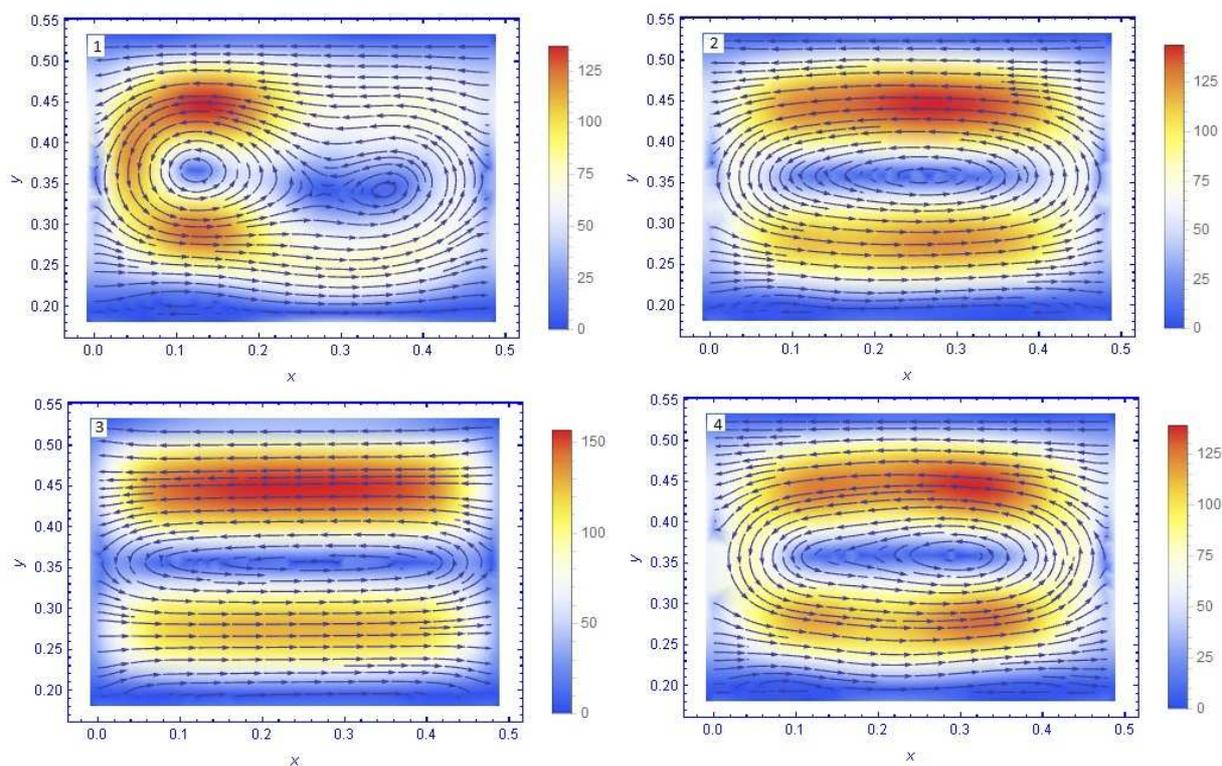


Рис. 6. Линии тока течения в плоскости $z = L/2$ при изменении параметров турбулентной вязкости: 1 - $a_1 = 10^{-5}, a_2 = 15$, 2 - $a_1 = 10^{-3}, a_2 = 15$, 3 - $a_1 = 10^{-4}, a_2 = 0.15$, 4 - $a_1 = 10^{-4}, a_2 = 15$.

Такое поведение течения при изменении турбулентной вязкости позволяет объяснить эпюры зональной скорости, полученные в экспериментах [13-16, 33-37] – рис. 4. Действительно, параметры турбулентной вязкости характеризуют динамические свойства потока, которые не могут быть постоянными при зональном перемещении Большого

красного пятна по поверхности Юпитера. Поэтому наблюдательные данные [13-16, 33-37] вообще говоря, различаются между собой.

Таким образом, согласование полученных результатов с имеющимися данными [1-20, 33-40] и другими представляет собой сложную задачу, главным образом, из-за недостатка данных о параметрах турбулентного переноса в планетарном масштабе. В этом случае необходимо решить обратную задачу по подбору параметров модели для наилучшего согласования с имеющимися экспериментальными данными.

В настоящей работе мы установили, что есть два механизма, ведущих к формированию гексагонального течения на северном полюсе Сатурна и Большого красного пятна на Юпитере соответственно. В первом случае происходит усиление слабого геострофического течения в турбулентном пограничном слое с большим градиентом турбулентной вязкости типа (20). Во втором случае выявлен механизм формирования вихревого течения, связанный с усилением малого по амплитуде зонального течения неоднородного по меридиональной координате в планетарном пограничном слое с градиентом сдвиговой турбулентной вязкости и при наличии объемной турбулентной вязкости типа (14).

Проведенные нами исследования [21-27] и результаты тестирования, приведенные на рис. 1-6, свидетельствуют о возможности построения адекватной модели вихревых турбулентных течений на Юпитере и Сатурне.

Библиографический список

1. Godfrey, D. A. A hexagonal feature around Saturn's North Pole// *Icarus*, 76, 335-356, 1988.
2. Allison, M., Godfrey, D.A., Beebe, R.F. A wave dynamical interpretation of Saturn's Polar Hexagon. *Science* 247, 1061–1063, 1990.
3. Barbosa Aguiar, A. C., Read, P. L., Wordsworth, R. D., et al. A laboratory model of Saturn's North Polar Hexagon//*Icarus*, 206, 755-763, 2010.
4. Morales-Juberias, R., Sayanagi, K. M., Simon, A. A., et al. Meandering Shallow Atmospheric Jet as a Model of Saturn's North-polar Hexagon// *Astrophysical Journal Letters*, 806, L18, 2015.
5. Sayanagi K.M., et al. Saturn's Polar Atmosphere//arXiv:1609.09626v2 [astro-ph.EP] 3 Oct 2016.

6. Karkoschka, E., and Tomasko, M. G. Saturn's upper atmospheric hazes observed by the Hubble Space Telescope// *Icarus*, 106, 428-441, 1993.
7. Sanchez-Lavega, A., Rojas, J. F., and Sada, P. V. Saturn's Zonal Winds at Cloud Level. *Icarus*, 147, 405-420, 2000.
8. Fletcher, L. N., Irwin, P. G. J., Orton, G. S., et al. Temperature and Composition of Saturn's Polar Hot Spots and Hexagon// *Science*, 319, 79-81, 2008.
9. Choi D. S., Showman A. P., and Brown R. H. Cloud features and zonal wind measurements of Saturn's atmosphere as observed by Cassini// *VIMS. J. Geophys. Res.*, 114, E4007, 2009.
10. Friedson, A. J., and Moses, J. I. General circulation and transport in Saturn's upper troposphere and stratosphere// *Icarus*, 218, 861-875, 2012.
11. Liu, J., Schneider, T., and Fletcher, L. N. Constraining the depth of Saturn's zonal winds by measuring thermal and gravitational signals// *Icarus*, 239, 260-272, 2014.
12. Ingersoll A. P., Cuong P. G. Numerical model of long-lived Jovian vortices// *J. Atmos. Sci.*, 38, 2067–2076, 1981.
13. Porco, C. C., West, R. A., et al. Cassini imaging of Jupiter's atmosphere, satellites and rings// *Science*, 299, 1541–1547, 2003.
14. Dowling, T. E., Ingersoll, A. P. Potential vorticity and layer thickness variations in the flow around Jupiter's Great Red Spot and White Oval BC// *Journal of Atmospheric Sciences* 45, 1380-1396, 1988.
15. Vasavada, A. R., Ingersoll, A. P., et al. Galileo Imaging of Jupiter's Atmosphere: The Great Red Spot, Equatorial Region, and White Ovals// *Icarus* 135, 265-275, 1998.
16. Choi David S., Banfield Don, Gierasch Peter J., Showman Adam P. Velocity and Vorticity Measurements of Jupiter's Great Red Spot Using Automated Cloud Feature Tracking// *Icarus*, 188, 35-46, 2007; arXiv:1301.6119v1 [astro-ph.EP] 25 Jan 2013.
17. Carlson R., et al. Near-Infrared Spectroscopy and Spectral Mapping of Jupiter and the Galilean Satellites: Results from Galileo's Initial Orbit. *Science* 274, 385-388, 1996.
18. Cho J. Y.-K., de la Torre Juarez M., Ingersoll A. P., Dritschel D. G. A high-resolution, three-dimensional model of Jupiter's Great Red Spot. *Journal of Geophysical Research* 106, 5099-5106, 2001.
19. Showman A. P. Numerical simulations of forced shallow-water turbulence: effects of moist convection on the large-scale circulation of Jupiter and Saturn// *J. Atmos. Sci.*, 64, 3132-3157, 2007.
20. Thomson S. I. A New Model of Jupiter's Jet Streams and the Effects of Moist Convection. PhD Thesis, University of Cambridge, 2015.
21. Trunev A. P. Similarity theory for turbulent flow over natural rough surface in pressure and temperature gradients/ *Air Pollution IV. Monitoring, Simulation and Control*, eds. B. Caussade, H. Power & C.A. Brebbia, Comp. Mech. Pub., Southampton, pp. 275-286, 1996.
22. Trunev A. P. Similarity theory and model of diffusion in turbulent atmosphere at large scale/ *Air Pollution V. Modelling, Monitoring and Management*, eds. H. Power, T. Tirabassi & C.A. Brebbia, CMP, Southampton-Boston, pp. 109-118, 1997.
23. Трунев А.П. Теория турбулентности и моделирование диффузии примесей в приземном слое атмосферы. – Сочинский научно-исследовательский центр РАН, Сочи, 160 с., 1999.
24. Трунев А.П. Теория турбулентности и моделирование турбулентного переноса в атмосфере. // Политематический сетевой электронный научный журнал Кубанского государственного аграрного университета (Научный журнал КубГАУ) [Электронный ресурс]. – Краснодар: КубГАУ, 2010. – №05(059). С. 179 – 243; №06(060). С. 412 – 491.
25. Трунев А.П. Физические механизмы турбулентной вязкости и моделирование турбулентности на основе уравнений Навье-Стокса // Политематический сетевой электронный научный журнал Кубанского государственного аграрного университета (Научный журнал КубГАУ) [Электронный ресурс]. – Краснодар: КубГАУ, 2016. – №04(118). С. 1469 – 1487. – IDA [article ID]: 1181604096. – Режим доступа: <http://ej.kubagro.ru/2016/04/pdf/96.pdf>
26. Трунев А.П. Моделирование турбулентного течения в полости на основе уравнений Навье-Стокса / А.П. Трунев // Политематический сетевой электронный научный журнал Кубанского государственного аграрного университета (Научный журнал КубГАУ) [Электронный ресурс]. – Краснодар: КубГАУ, 2016. – №05(119). С. 1111 – 1133. – IDA [article ID]: 1191605079. – Режим доступа: <http://ej.kubagro.ru/2016/05/pdf/79.pdf>
27. Трунев А.П. Моделирование гексагонального турбулентного течения в северной полярной области Сатурна/ А.П. Трунев // Политематический сетевой электронный научный журнал Кубанского

государственного аграрного университета (Научный журнал КубГАУ) [Электронный ресурс]. – Краснодар: КубГАУ, 2017. – №01(125). Doi: 10.21515/1990-4665-125-050

28. Nagano Y., Kasagi N., Ota T., Fujita H., Yoshida H. & Kumada M. Data-Base on Turbulent Heat Transfer/ Department of Mechanical Engineering, Nagoya Institute of Technology, Nagoya, DATA No FW BL004, 1992.

29. Van Ulden A. & Holtslag A. A. M. Estimation of Atmospheric Boundary Layer Parameters for Diffusion Applications// J. Clim. Appl. Meteorol., 24, pp. 1196–1207, 1985.

30. Pugliese S., Jaeger M. & Occelli R. Finite element modelling of plume dispersion in the lower part of the atmosphere/ Air Pollution IV. Monitoring, Simulation and Control, eds. B. Caussade, H. Power & C.A. Brebbia, Comp. Mech. Pub. Southampton-Boston, 99-108. 1996

31. Detering H. W. & Etling D. Application of the E- ϵ Turbulence Model to the Atmospheric Boundary Layer// Boundary-Layer Meteorol, 33, pp. 113–133, 1985.

32. Ландау Л. Д., Лифшиц Е. М. Теоретическая физика. Т.6. Гидродинамика – 3 изд. – М.: Наука. – 1986; L. D. Landau and E. M. Lifshitz. Fluid Mechanics. - Pergamon, Oxford, UK, first edition, 1959.

33. Simon-Miller A. A., Gierasch P. J., Beebe R. F., Conrath B., Flasar F. M., Achterberg R. K. and the Cassini CIRS Team. New observational results concerning Jupiter's great red spot// Icarus, 158, 249–266, 2002.

34. Read P. L., et al. Mapping potential-vorticity dynamics on Jupiter. I: Zonal-mean circulation from Cassini and Voyager 1 data// Quarterly Journal of the Royal Meteorological Society, 132, 1577–1603, 2006.

35. Asay-Davis X., Shetty S., Marcus P. Extraction of Velocity Fields from Telescope Image Pairs of Jupiter's Great Red Spot, New Red Oval, and Zonal Jet Streams// Bulletin of the American Physical Society, 51, 116, 2006.

36. Shetty S., Asay-Davis X., Marcus P. S. Modeling and Data Assimilation of the Velocity of Jupiter's Great Red Spot and Red Oval// Bulletin of the American Physical Society, 51, 116. 2006.

37. Shetty S., Xylar S. Asay-Davis, Philip S. Marcus. On the interaction of Jupiter's Great Red Spot and zonal jet streams//Journal of Atmospheric Sciences, Vol. 64, pp. 4432-4444, 2007.

38. Read P. L., Gierasch P. J., Conrath B. J. Mapping potential-vorticity dynamics on Jupiter. II: the Great Red Spot from Voyager 1 and 2 data. Quarterly Journal of the Royal Meteorological Society, 132, 1605–1625. 2006.

39. Mitchell J. L., Beebe R. F., Ingersoll A. P., Garneau G. W. Flow fields within Jupiter's great red spot and white oval bc// J. Geophys. Res., 86, 8751–8757, 1981.

40. Marcus P. S. Jupiter's great red spot and other vortices// Rev. Astron. Astrophy., 31, 523–573, 1993.

References

1. Godfrey, D. A. A hexagonal feature around Saturn's North Pole// Icarus, 76, 335-356, 1988.
2. Allison, M., Godfrey, D.A., Beebe, R.F. A wave dynamical interpretation of Saturn's Polar Hexagon. Science 247, 1061–1063, 1990.
3. Barbosa Aguiar, A. C., Read, P. L., Wordsworth, R. D., et al. A laboratory model of Saturn's North Polar Hexagon//Icarus, 206, 755-763, 2010.
4. Morales-Juberias, R., Sayanagi, K. M., Simon, A. A., et al. Meandering Shallow Atmospheric Jet as a Model of Saturn's North-polar Hexagon// Astrophysical Journal Letters, 806, L18, 2015.
5. Sayanagi K.M., et al. Saturn's Polar Atmosphere//arXiv:1609.09626v2 [astro-ph.EP] 3 Oct 2016.
6. Karkoschka, E., and Tomasko, M. G. Saturn's upper atmospheric hazes observed by the Hubble Space Telescope//Icarus, 106, 428-441, 1993.
7. Sanchez-Lavega, A., Rojas, J. F., and Sada, P. V. Saturn's Zonal Winds at Cloud Level. Icarus, 147, 405-420, 2000.
8. Fletcher, L. N., Irwin, P. G. J., Orton, G. S., et al. Temperature and Composition of Saturn's Polar Hot Spots and Hexagon// Science, 319, 79-81, 2008.
9. Choi D. S., Showman A. P., and Brown R. H. Cloud features and zonal wind measurements of Saturn's atmosphere as observed by Cassini//VIMS. J. Geophy. Res., 114, E4007, 2009.
10. Friedson, A. J., and Moses, J. I. General circulation and transport in Saturn's upper troposphere and stratosphere//Icarus, 218, 861-875, 2012.
11. Liu, J., Schneider, T., and Fletcher, L. N. Constraining the depth of Saturn's zonal winds by measuring thermal and gravitational signals// Icarus, 239, 260-272, 2014.
12. Ingersoll A. P., Cuong P. G. Numerical model of long-lived Jovian vortices// J. Atmos. Sci., 38, 2067–2076, 1981.

13. Porco, C. C., West, R. A., et al. Cassini imaging of Jupiter's atmosphere, satellites and rings// *Science*, 299, 1541–1547, 2003.
14. Dowling, T. E., Ingersoll, A. P. Potential vorticity and layer thickness variations in the flow around Jupiter's Great Red Spot and White Oval BC// *Journal of Atmospheric Sciences* 45, 1380-1396, 1988.
15. Vasavada, A. R., Ingersoll, A. P., et al. Galileo Imaging of Jupiter's Atmosphere: The Great Red Spot, Equatorial Region, and White Ovals// *Icarus* 135, 265-275, 1998.
16. Choi David S., Banfield Don, Gierasch Peter J., Showman Adam P. Velocity and Vorticity Measurements of Jupiter's Great Red Spot Using Automated Cloud Feature Tracking//*Icarus*, 188, 35-46, 2007; arXiv:1301.6119v1 [astro-ph.EP] 25 Jan 2013.
17. Carlson R., et al. Near-Infrared Spectroscopy and Spectral Mapping of Jupiter and the Galilean Satellites: Results from Galileo's Initial Orbit. *Science* 274, 385-388, 1996.
18. Cho J. Y.-K., de la Torre Juarez M., Ingersoll A. P., Dritschel D. G. A high-resolution, three-dimensional model of Jupiter's Great Red Spot. *Journal of Geophysical Research* 106, 5099-5106, 2001.
19. Showman A. P. Numerical simulations of forced shallow-water turbulence: effects of moist convection on the large-scale circulation of Jupiter and Saturn// *J. Atmos. Sci.*, 64, 3132-3157, 2007.
20. Thomson S. I. A New Model of Jupiter's Jet Streams and the Effects of Moist Convection. PhD Thesis, University of Cambridge, 2015.
21. Trunev A. P. Similarity theory for turbulent flow over natural rough surface in pressure and temperature gradients/ *Air Pollution IV. Monitoring, Simulation and Control*, eds. B. Caussade, H. Power & C.A. Brebbia, Comp. Mech. Pub., Southampton, pp. 275-286, 1996.
22. Trunev A. P. Similarity theory and model of diffusion in turbulent atmosphere at large scale/ *Air Pollution V. Modelling, Monitoring and Management*, eds. H. Power, T. Tirabassi & C.A. Brebbia, CMP, Southampton-Boston, pp. 109-118, 1997.
23. Trunev A.P. Teorija turbulentnosti i modelirovanie diffuzii primesej v prizemnom sloe atmosfery. – Sochinskij nauchno-issledovatel'skij centr RAN, Sochi, 160 s., 1999.
24. Trunev A.P. Teorija turbulentnosti i modelirovanie turbulentnogo perenosa v atmosfere. // *Politematicheskij setevoj jelektronnyj nauchnyj zhurnal Kubanskogo gosudarstvennogo agrarnogo universiteta (Nauchnyj zhurnal KubGAU) [Jelektronnyj resurs]*. – Krasnodar: KubGAU, 2010. – №05(059). S. 179 – 243; №06(060). S. 412 – 491.
25. Trunev A.P. Fizicheskie mehanizmy turbulentnoj vjazkosti i modelirovanie turbulentnosti na osnove uravnenij Nav'e-Stoksa // *Politematicheskij setevoj jelektronnyj nauchnyj zhurnal Kubanskogo gosudarstvennogo agrarnogo universiteta (Nauchnyj zhurnal KubGAU) [Jelektronnyj resurs]*. – Krasnodar: KubGAU, 2016. – №04(118). S. 1469 – 1487. – IDA [article ID]: 1181604096. – Rezhim dostupa: <http://ej.kubagro.ru/2016/04/pdf/96.pdf>
26. Trunev A.P. Modelirovanie turbulentnogo techenija v polosti na osnove uravnenij Nav'e-Stoksa / A.P. Trunev // *Politematicheskij setevoj jelektronnyj nauchnyj zhurnal Kubanskogo gosudarstvennogo agrarnogo universiteta (Nauchnyj zhurnal KubGAU) [Jelektronnyj resurs]*. – Krasnodar: KubGAU, 2016. – №05(119). S. 1111 – 1133. – IDA [article ID]: 1191605079. – Rezhim dostupa: <http://ej.kubagro.ru/2016/05/pdf/79.pdf>
27. Trunev A.P. Modelirovanie geksgonal'nogo turbulentnogo techenija v severnoj poljarnoj oblasti Saturna/ A.P. Trunev // *Politematicheskij setevoj jelektronnyj nauchnyj zhurnal Kubanskogo gosudarstvennogo agrarnogo universiteta (Nauchnyj zhurnal KubGAU) [Jelektronnyj resurs]*. – Krasnodar: KubGAU, 2017. – №01(125). Doi: 10.21515/1990-4665-125-050
28. Nagano Y., Kasagi N., Ota T., Fujita H., Yoshida H. & Kumada M. Data-Base on Turbulent Heat Transfer/ Department of Mechanical Engineering, Nagoya Institute of Technology, Nagoya, DATA No FW BL004, 1992.
29. Van Ulden A. & Holtslag A. A. M. Estimation of Atmospheric Boundary Layer Parameters for Diffusion Applications// *J. Clim. Appl. Meteorol.*, 24, pp. 1196–1207, 1985.
30. Pugliese S., Jaeger M. & Occelli R. Finite element modelling of plume dispersion in the lower part of the atmosphere/ *Air Pollution IV. Monitoring, Simulation and Control*, eds. B. Caussade, H. Power & C.A. Brebbia, Comp. Mech. Pub. Southampton-Boston, 99-108. 1996
31. Detering H. W. & Etling D. Application of the E- Turbulence Model to the Atmospheric Boundary Layer// *Boundary-Layer Meteorol*, 33, pp. 113–133, 1985.
32. Landau L. D, Lifshic E. M. Teoreticheskaja fizika. T.6. Gidrodinamika – 3 izd. – M.: Nauka. – 1986; L. D. Landau and E. M. Lifshitz. Fluid Mechanics. - Pergamon, Oxford, UK, first edition, 1959.
33. Simon-Miller A. A., Gierasch P. J., Beebe R. F., Conrath B., Flasar F. M., Achterberg R. K. and the Cassini CIRS Team. New observational results concerning Jupiter's great red spot// *Icarus*, 158, 249–266, 2002.

34. Read P. L., et al. Mapping potential-vorticity dynamics on Jupiter. I: Zonal-mean circulation from Cassini and Voyager 1 data// Quarterly Journal of the Royal Meteorological Society, 132, 1577–1603, 2006.
35. Asay-Davis X., Shetty S., Marcus P. Extraction of Velocity Fields from Telescope Image Pairs of Jupiter's Great Red Spot, New Red Oval, and Zonal Jet Streams// Bulletin of the American Physical Society, 51, 116, 2006.
36. Shetty S., Asay-Davis X., Marcus P. S. Modeling and Data Assimilation of the Velocity of Jupiter's Great Red Spot and Red Oval// Bulletin of the American Physical Society, 51, 116. 2006.
37. Shetty S., Xylar S. Asay-Davis, Philip S. Marcus. On the interaction of Jupiter's Great Red Spot and zonal jet streams//Journal of Atmospheric Sciences, Vol. 64, pp. 4432-4444, 2007.
38. Read P. L., Gierasch P. J., Conrath B. J. Mapping potential-vorticity dynamics on Jupiter. II: the Great Red Spot from Voyager 1 and 2 data. Quarterly Journal of the Royal Meteorological Society, 132, 1605–1625. 2006.
39. Mitchell J. L., Beebe R. F., Ingersoll A. P., Garneau G. W. Flow fields within Jupiter's great red spot and white oval bc// J. Geophys. Res., 86, 8751–8757, 1981.
40. Marcus P. S. Jupiter's great red spot and other vortices// Rev. Astron. Astrophys., 31, 523–573, 1993.