

УДК 530.12+524.7

UDC 530.12+524.7

01.00.00 Физико-математические науки

Physics and Math

**СТОЛКНОВЕНИЕ ЧАСТИЦ В ПОТОКАХ РИЧЧИ****PARTICLE COLLISIONS IN THE RICCI FLOW**

Трунев Александр Петрович

Alexander Trunev

к.ф.-м.н., Ph.D.

Cand.Phys.-Math.Sci., Ph.D.

*Директор, A&E Trounev IT Consulting, Торонто, Канада**Director, A&E Trounev IT Consulting, Toronto, Canada*

В настоящей работе исследована задача о столкновении частиц, представленных сингулярностями гравитационного поля, в потоках Риччи. Выведена система нелинейных уравнений параболического типа, описывающая эволюцию аксиально-симметричных метрик. Рассматривается метрика, обладающая осевой симметрией и содержащая два сингулярности, имитирующие частицы конечной массы. Численно исследовано изменение метрики при столкновении частиц. Были рассмотрены две постановки задачи, в одной из которых частицы разлетаются после соударения, а в другой, в результате слияния двух частиц, образуется новая устойчивая статическая система, которую можно интерпретировать как новую частицу. В начальных и граничных условиях используются точные решения статической задачи, поэтому при соударении сохраняются особенности метрики, обусловленные наличием частиц. В численных экспериментах установлено, что столкновение частиц в потоках Риччи приводит к образованию гравитационных волн, похожих по своей структуре на волны, зарегистрированные в экспериментах LIGO. Следовательно, можно предположить, что наблюдаемые гравитационные волны обусловлены, главным образом, переходными процессами, связанными с изменением метрики системы. Развита модель, описывающая излучение гравитационных волн при столкновении частиц в потоках Риччи. Исследовано влияние параметров задачи – скорости и массы частиц, на амплитуду и интенсивность излучения гравитационных волн

In this work, we investigate the problem of collisions of particles linked to the singularities of the gravitational field in the Ricci flow. A system of non-linear parabolic equations describing the evolution of the axially symmetric metrics proposed. We consider the metric having axial symmetry and comprising two singularities simulating particles of finite mass. There was numerically investigated the change of the metric in the collision of particles. Two formulations of the problem have been considered, one of which scatter particles after the collision, and the other as a result of the merger of two particles, a new stable static system, which can be interpreted as a new particle. The initial and boundary conditions using the exact solution of the static problem, so the collision persist particularly metrics caused by the presence of particles. In numerical experiments determined that the collision of the particles in the Ricci flow leads to the formation of gravitational waves, similar in structure to the waves, registered in the LIGO experiment. Consequently, we can assume that the observed gravity waves caused mainly by transients associated with the change in the metric system. A model describing the emission of gravitational waves in the collision of particles in the Ricci flow proposed. The influence of the parameters of the problem - the speed and mass of the particles, on the amplitude and intensity of the emission of gravitational waves was numerically simulated

Ключевые слова: ОБЩАЯ ТЕОРИЯ ОТНОСИТЕЛЬНОСТИ, ПОТОКИ РИЧЧИ, ГРАВИТАЦИОННЫЕ ВОЛНЫ

Keywords: RICCI FLOW, GENERAL RELATIVITY, GRAVITATIONAL WAVES

**Doi: 10.21515/1990-4665-121-111**

## **Введение**

Движение материальных частиц - источников гравитационного поля, является одной из ключевых проблем общей теории относительности [1-3]. В работе [1] было показано, что уравнений поля для пустого пространства достаточно для описания движения материи представленной в виде точечных сингулярностей. Следовательно, в общей теории относительности существует модель, описывающая материю и гравитацию как единое целое [2]. Для описания материи в рамках общей теории относительности Эйнштейн и Инфельд сформулировали программу [3]: «Все попытки представить материю тензором энергии-импульса неудовлетворительны, и мы хотим освободить нашу теорию от специального выбора такого тензора. Поэтому мы будем иметь дело здесь только с гравитационными уравнениями в пустом пространстве, а материя будет представлена сингулярностями гравитационного поля».

Возникает вопрос, все ли конфигурации поля и сингулярностей описывают движение материи? Как известно, Зильберштейн [4] указал пример статической метрики с двумя центрами гравитации, которые, в отличие от теории Ньютона, покоятся, не испытывая взаимного притяжения. Отсюда автор работы [4] приходит к выводу, что полученное решение является следствием ошибочности уравнений Эйнштейна. Однако Эйнштейн и Розен [5] указали на ошибочность самого решения [4], которое содержит особые точки и не обладает требуемым геометрическим свойством, что, по их мнению, является указанием на нарушение законов теории поля.

В работах [6-7] было показано, что не существует решений гравитационного поля в пустоте, удовлетворяющих условиям:

- 1) поле стационарно;
- 2) решение не имеет особых точек;

3) полная масса поля отлична от нуля.

Можно предположить, что особые точки в решении уравнений поля в пустоте являются неотъемлемым признаком источников статического гравитационного поля. В этом смысле решение полученное Зильберштейном [4] не является исключением и не отличается, например, от известного решения Шварцшильда [8], описывающего статическое гравитационное поле точечной массы.

Отметим, что статическая система [4], состоящая из двух центров гравитации, противоречит только теории Ньютона, но не противоречит теории Эйнштейна. Поэтому такую систему следовало бы рассматривать аналогично черным дырам как результат действия релятивистских законов гравитации [9].

В работе [9] исследована динамика релятивистских частиц в аксиально-симметричных метриках. Установлено, что в метрике типа [4] с двумя центрами гравитации существуют устойчивые орбиты, на которых скорость частиц достигает значения  $v/c \approx 0.7$ .

В настоящей работе исследовано движение релятивистских частиц в потоках Риччи в аксиально-симметричных метриках. Рассматривается метрика, обладающая осевой симметрией и содержащая два центра гравитации, имитирующих частицы конечной массы. Численно исследовано изменение метрики при столкновении частиц. Установлено, что в потоках Риччи сохраняются особенности метрики, обусловленные наличием частиц. В результате слияния частиц образуется устойчивая статическая система, состоящая из гравитационного поля и содержащая особенность, имитирующая частицу. Тем самым получено расширение теории Эйнштейна и Инфельда [2-3] на случай столкновения частиц в потоках Риччи.

Установлено также, что столкновение частиц в потоках Риччи приводит к образованию гравитационных волн, похожих по своей структуре на волны, зарегистрированные в экспериментах [10-12]. Следовательно, можно предположить, что наблюдаемые гравитационные волны обусловлены, главным образом, переходными процессами, связанными с изменением метрики системы.

### Аксиально-симметрические поля

Уравнения Эйнштейна имеют вид [13-15]:

$$R_{\mu\nu} - \frac{1}{2} g_{\mu\nu} R = g_{\mu\nu} \Lambda + \frac{8\pi G}{c^4} T_{\mu\nu} \quad (1)$$

Здесь  $R_{\mu\nu}, g_{\mu\nu}, T_{\mu\nu}$  - тензор Риччи, метрический тензор и тензор энергии-импульса;  $\Lambda, G, c$  - космологическая постоянная Эйнштейна, гравитационная постоянная и скорость света соответственно.

Решения уравнений Эйнштейна, обладающие осевой симметрией, рассматривались в работах [9, 13-16] и некоторых других (обзор публикаций дан, например, в [14,16]). Метрика таких пространств, при некоторых предположениях может быть приведена к виду

$$ds^2 = e^\mu dt^2 - e^{-\mu} (e^\nu d\rho^2 + e^\nu dz^2) - e^{-\mu} \rho^2 d\phi^2 \quad (2)$$

Здесь  $\rho = \sqrt{x^1{}^2 + x^2{}^2}$ ;  $z = x^3$ ;  $\mu = \mu(\rho, x^3), \nu = \nu(\rho, x^3)$  - функции, удовлетворяющие уравнениям Эйнштейна. Вычисляя компоненты тензора Эйнштейна  $G_{\alpha\beta} = R_{\alpha\beta} - \frac{1}{2} R g_{\alpha\beta}$  в метрике (2) и полагая для вакуума

$$G_{\alpha\beta} = R_{\alpha\beta} - \frac{1}{2} R g_{\alpha\beta} = 0,$$

находим уравнения поля:

$$\begin{aligned}
 \omega_1 &= \frac{\partial^2 \mu}{\partial \rho^2} + \frac{1}{\rho} \frac{\partial \mu}{\partial \rho} + \frac{\partial^2 \mu}{\partial x^3{}^2} = 0, \\
 \omega_2 &= \frac{\partial v}{\partial \rho} - \frac{\rho}{2} \left[ \left( \frac{\partial \mu}{\partial \rho} \right)^2 - \left( \frac{\partial \mu}{\partial x^3} \right)^2 \right] = 0, \\
 \omega_3 &= \frac{\partial v}{\partial x^3} - \rho \frac{\partial \mu}{\partial \rho} \frac{\partial \mu}{\partial x^3} = 0, \\
 \omega_4 &= \frac{\partial^2 v}{\partial \rho^2} + \frac{\partial^2 v}{\partial x^3{}^2} + \frac{1}{2} \left[ \left( \frac{\partial \mu}{\partial \rho} \right)^2 + \left( \frac{\partial \mu}{\partial x^3} \right)^2 \right] = 0.
 \end{aligned}
 \tag{3}$$

Можно проверить, что не все уравнения (3) являются независимыми и что выполняются следующие два соотношения [14]

$$\omega_4 \equiv \frac{\partial \omega_2}{\partial \rho} + \frac{\partial \omega_3}{\partial x^3} + \rho \omega_1 \frac{\partial \mu}{\partial \rho}, \quad \rho \omega_1 \frac{\partial \mu}{\partial x^3} \equiv \frac{\partial \omega_2}{\partial x^3} - \frac{\partial \omega_3}{\partial \rho}
 \tag{4}$$

Следовательно, можно в качестве системы уравнений для определения двух функций  $\mu = \mu(\rho, x^3), v = v(\rho, x^3)$  выбрать, например, первое и четвертое уравнения (3), имеем

$$\begin{aligned}
 \frac{\partial^2 \mu}{\partial \rho^2} + \frac{1}{\rho} \frac{\partial \mu}{\partial \rho} + \frac{\partial^2 \mu}{\partial x^3{}^2} &= 0, \\
 \frac{\partial^2 v}{\partial \rho^2} + \frac{\partial^2 v}{\partial x^3{}^2} + \frac{1}{2} \left[ \left( \frac{\partial \mu}{\partial \rho} \right)^2 + \left( \frac{\partial \mu}{\partial x^3} \right)^2 \right] &= 0.
 \end{aligned}
 \tag{5}$$

Разрешая систему уравнений (5) приходим к определению статических полей гравитации в случае осевой симметрии. Отметим, что в нерелятивистском пределе потенциал  $\mu = 2\varphi/c^2$ , где  $\varphi$  - гравитационный потенциал в теории гравитации Ньютона. Из второго уравнения (5) находим оценку  $v \sim \mu^2 = 4\varphi^2/c^4$ .

Рассмотрим решения системы уравнений (3) вида

$$\begin{aligned} \mu &= -\frac{m_1}{\sqrt{\rho^2 + (z - L_1)^2}} - \frac{m_2}{\sqrt{\rho^2 + (z - L_2)^2}} + a \ln \rho, \\ \nu &= -\frac{m_1^2 \rho^2}{4(\rho^2 + (z - L_1)^2)^2} - \frac{am_1}{\sqrt{\rho^2 + (z - L_1)^2}} - \frac{m_2^2 \rho^2}{4(\rho^2 + (z - L_2)^2)^2} - \frac{am_2}{\sqrt{\rho^2 + (z - L_2)^2}} \quad (6) \\ &+ \frac{m_1}{\sqrt{\rho^2 + (z - L_1)^2}} \frac{m_2}{\sqrt{\rho^2 + (z - L_2)^2}} \frac{(\rho^2 + (z - L_1)(z - L_2))}{(L_1 - L_2)^2} + \frac{a^2}{2} \ln \rho \end{aligned}$$

В частном случае, полагая в (6)  $a = 0$ , приходим к выражению потенциалов, полученных в работе [4]

$$\begin{aligned} \mu_s(\rho, z, L_1, L_2) &= -\frac{m_1}{\sqrt{\rho^2 + (z - L_1)^2}} - \frac{m_2}{\sqrt{\rho^2 + (z - L_2)^2}}, \\ \nu_s(\rho, z, L_1, L_2) &= -\frac{m_1^2 \rho^2}{4(\rho^2 + (z - L_1)^2)^2} - \frac{m_2^2 \rho^2}{4(\rho^2 + (z - L_2)^2)^2} + \quad (7) \\ &\frac{m_1}{\sqrt{\rho^2 + (z - L_1)^2}} \frac{m_2}{\sqrt{\rho^2 + (z - L_2)^2}} \frac{(\rho^2 + (z - L_1)(z - L_2))}{(L_1 - L_2)^2} - \frac{m_1 m_2}{(L_1 - L_2)^2} \end{aligned}$$

Поскольку выражения (7) в дальнейшем используются в численных расчетах, мы добавили ко второму потенциалу константу, с целью исключить особенность, возникающую при условии  $L_1 = L_2$ .

Отметим, что именно выражения (7) подверглись критике со стороны Эйнштейна и Розена [5], как лишённые физического смысла. Действительно, в нерелятивистском случае потенциал  $\mu$  в (7) сводится к выражению  $\mu = 2\varphi/c^2$ , где  $\varphi$  - гравитационный потенциал в теории гравитации Ньютона. Но тогда этот потенциал сводится к потенциалу двух точечных масс  $m_{1,2}$ , расположенных на оси симметрии системы в точках  $z = L_{1,2}$ .

Поскольку точечные массы  $m_{1,2}$  в метрике (2) не испытывают взаимного перемещения, хотя должны притягиваться согласно теории Ньютона, автор [4] делает ошибочный вывод, что не верна теория относительности Эйнштейна. На самом же деле, как это легко видеть, у выражений (7) нет нерелятивистского предела, поскольку массы предполагаются точечными.

Следовательно, всегда найдется такая малая область, что геометрия пространства-времени вокруг точечной массы, погруженной в эту область, сколь угодно сильно будет отличаться от евклидовой геометрии. Но в таком случае точечные массы не должны следовать законам Ньютона, так как эти законы не выполняются в окрестности самих масс [9].

Будем характеризовать геометрию релятивистских объектов в метрике (2) функцией

$$\sqrt{-g} = \rho \exp(\nu - \mu) \quad (8)$$

В работе [9] на рис. 1 представлены изолинии функции (8), вычисленные по уравнениям (6) для двух точечных масс, из чего следует, что геометрия пространства-времени вокруг точечных масс в метрике (2) является весьма сложной. Тем самым полностью подтверждаются приведенные выше доводы и одновременно опровергаются выводы [4]. Наконец, полагая в (12)  $m_1 = m, L_1 = 0, m_2 = 0$ , получим

$$\begin{aligned} \mu &= -\frac{m}{\sqrt{\rho^2 + z^2}} + a \ln \rho, \\ \nu &= -\frac{m^2 \rho^2}{4(\rho^2 + z^2)^2} - \frac{am}{\sqrt{\rho^2 + z^2}} + \frac{a^2}{2} \ln \rho \end{aligned} \quad (9)$$

Отметим, что выражение потенциала  $\mu$  в форме (9) согласуется с выражением гравитационного потенциала, полученным в нерелятивистском приближении путем обработки данных для 50 галактик [17]. Потенциал  $V$  не имеет аналогов в теории Ньютона. Поэтому выражения (6)-(7) и (9) представляют интерес в исследованиях динамики релятивистских частиц в метрике галактик [9], а также в теории столкновения частиц представленных сингулярностями поля [1-3] в потоках Риччи.

### Лифт Эйнштейна и потоки Риччи

В метрике (2) можно описать однородное гравитационное поле, локализованное в цилиндре ограниченного размера – т.н. лифт Эйнштейна. Действительно, сформулируем задачу для системы уравнений (5), задавая однородное поле  $\mu = g_E z$  в области  $\rho \leq R, -L/2 \leq z \leq L/2$ . Тогда за границей области лифта гравитационный потенциал  $\mu$ , определяемый как решение уравнения Лапласа, будет подобен электростатическому потенциалу поля цилиндрического конденсатора, который на большом расстоянии от системы убывает как поле диполя [9].

Второй потенциал системы (5) подобен компоненте векторного потенциала прямолинейного провода с током, который на большом удалении от системы ведет себя как логарифмическая функция. Эта аналогия позволяет предположить, что ускоряемые тела порождают гравитационные возмущения двух типов [9, 18].

Лифт Эйнштейна является хорошей моделью для решения задачи о столкновении частиц, представленных сингулярностями поля. Для моделирования изменения метрики при соударении частиц используем потоки Риччи [19-27], которые описываются уравнением

$$\frac{\partial g_{ik}}{\partial t} = D_0 R_{ik} \quad (10)$$

Здесь  $D_0$  – коэффициент диффузии, которые в стандартной теории [19-26] полагают равным  $D_0 = -2$ , однако в метрике (2) следует положить  $D_0 = 2$ , тогда (10) сводится к системе уравнений параболического типа:

$$\begin{aligned} e^{v-\mu} \frac{\partial \mu}{\partial t} &= \frac{\partial^2 \mu}{\partial \rho^2} + \frac{1}{\rho} \frac{\partial \mu}{\partial \rho} + \frac{\partial^2 \mu}{\partial z^2} \\ e^{v-\mu} \frac{\partial v}{\partial t} &= \frac{\partial^2 v}{\partial \rho^2} + \frac{\partial^2 v}{\partial z^2} + \frac{1}{2} \left[ \left( \frac{\partial \mu}{\partial \rho} \right)^2 + \left( \frac{\partial \mu}{\partial z} \right)^2 \right] \end{aligned} \quad (11)$$



Сравнивая (11) и (5) находим, что для установившихся потоков при условиях  $\mu_t = v_t = 0$  система (11) сводится к (5). Обоснованием для такого перехода от статической системы (5) к системе параболического типа (11) может служить теория, развитая в работах [19-28] и других, а также теория геометрической турбулентности [29-30].

Физический смысл расширения статической модели (5) до модели (11), описывающей потоки Риччи, заключается в том, что по начальным и граничным условиям можно определить к каким решениям сходится решение системы уравнений (5), содержащее особенности, например, решение Зильберштейна (7).

С точки зрения теории Эйнштейна и Инфельда [1-3], движение частиц в потоках Риччи равносильно нулевому приближению, при котором частицы движутся свободно, создавая гравитационное поле. В следующем приближении между частицами возникает сила взаимодействия, которая изменяет параметры движения и т.д. Однако для многих практически важных задач, таких как слияние черных дыр [10-12], достаточно будет знать, как изменяется метрика бинарной системы при сближении центров гравитации с заданной скоростью. Модель потоков Риччи (11) позволяет ответить на этот и другие вопросы, связанные с изменением метрики.

### **Моделирование столкновение частиц в потоках Риччи**

Рассмотрим в качестве начальных данных для системы уравнений (11) решение Зильберштейна в форме (7) в области  $\rho \leq R, -L/2 \leq z \leq L/2$ . В последующие моменты времени  $0 < t \leq t_0$  будем предполагать, что частицы движутся навстречу друг другу с постоянной скоростью вплоть до

соударения. Таким образом, для уравнения (11) поставим следующую задачу о столкновении частиц, представленных сингулярностями поля:

$$\begin{aligned}
 t = 0: \mu(0, \rho, z) &= \mu_s(\rho, z, L_1, L_2), \quad v(0, \rho, z) = v_s(\rho, z, L_1, L_2); \\
 t > 0: \mu(t, r_0, z) &= \mu_s(r_0, z, L_1 + u_1 t, L_2 + u_2 t), \quad v(t, r_0, z) = v_s(r_0, z, L_1 + u_1 t, L_2 + u_2 t), \\
 \mu(t, R, z) &= \mu_s(R, z, L_1 + u_1 t, L_2 + u_2 t), \quad v(t, \rho, z) = v_s(R, z, L_1 + u_1 t, L_2 + u_2 t), \\
 \mu(t, \rho, -L/2) &= \mu_s(\rho, -L/2, L_1 + u_1 t, L_2 + u_2 t), \quad v(t, \rho, -L/2) = v_s(\rho, -L/2, L_1 + u_1 t, L_2 + u_2 t), \\
 \mu(t, \rho, L/2) &= \mu_s(\rho, L/2, L_1 + u_1 t, L_2 + u_2 t), \quad v(t, \rho, L/2) = v_s(\rho, L/2, L_1 + u_1 t, L_2 + u_2 t),
 \end{aligned} \tag{12}$$

Здесь  $u_{1,2}$  – скорость частиц до соударения,  $r_0$  – граница области, отделяющая область численного интегрирования от оси системы, содержащей сингулярные точки решений Зильберштейна (7). На рис. 1-4 представлены результаты моделирования соударения частиц в потоке Риччи, выполненные по (11)-(12) при следующих значениях параметров:

$$m_1 = m_2 = 0.01, \quad L_1 = -L_2 = 1, \quad r_0 = 10^{-2}, \quad R = 2, \quad L = 4, \quad u_1 = -u_2 = -1. \tag{13}$$

В первом случае частицы после столкновения разлетаются, меняясь своими позициями – рис. 1-2. Во втором случае частицы после соударения образуют новую частицу – рис. 3-4. При сближении и удалении частиц наблюдаются нелинейные гравитационные волны – рис. 2, 4. При этом более значительному возмущению подвергается потенциал  $V$ , не имеющий аналога в теории Ньютона. На рис. 5 представлены данные по столкновению частиц неравной массы при следующих значениях параметров

$$m_1 = 3 \cdot 10^{-3}, m_2 = 5 \cdot 10^{-3}, \quad L_1 = -L_2 = 1, \quad r_0 = 10^{-2}, \quad R = 2, \quad L = 4, \quad u_1 = -u_2 = -0.5. \tag{14}$$

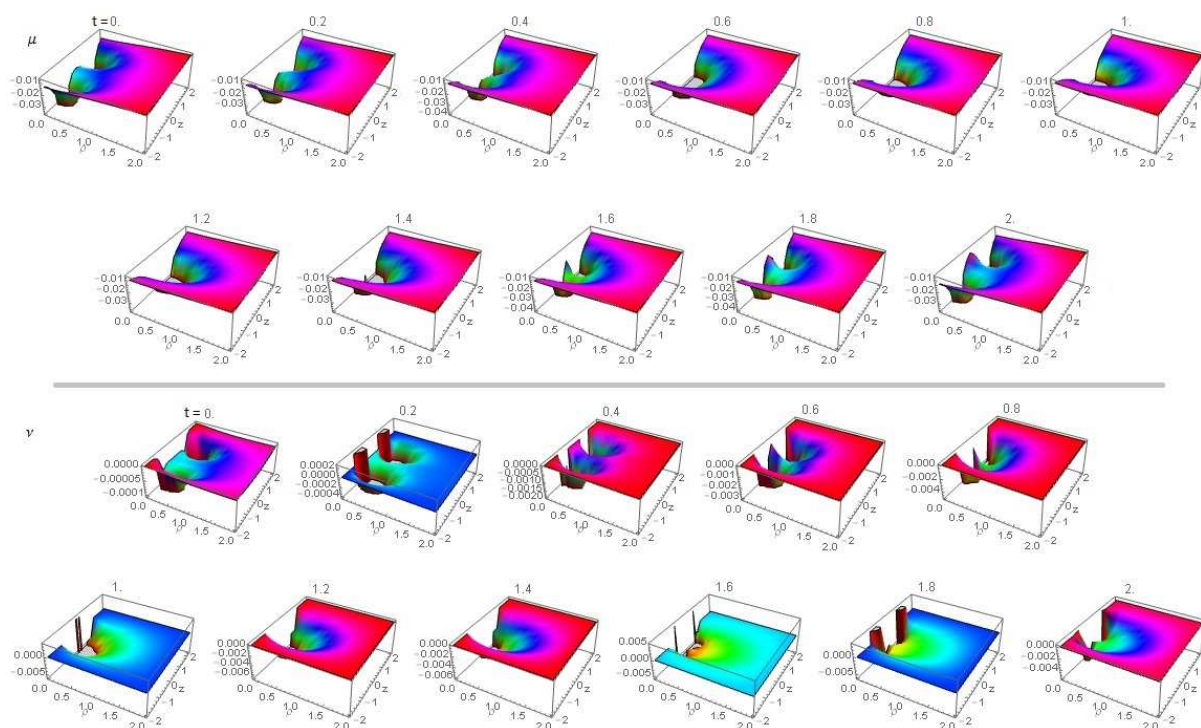


Рис. 1. Распределение гравитационных потенциалов в различные моменты времени при столкновении и разлете частиц равной массы в потоках Риччи в метрике (2): параметр времени указан над рисунками.

В этом случае изменение потенциала  $V$  не является столь резким как в случае частиц равной массы – рис. 1, 3. Это объясняется тем, что потенциал  $V$  пропорционален квадрату массы каждой из частиц, поэтому даже при не большом отношении масс  $m_2/m_1 = 5/3$  поведение потенциала определяется большей массой. Тем не менее, в этом случае также возбуждаются гравитационные волны – рис. 6.

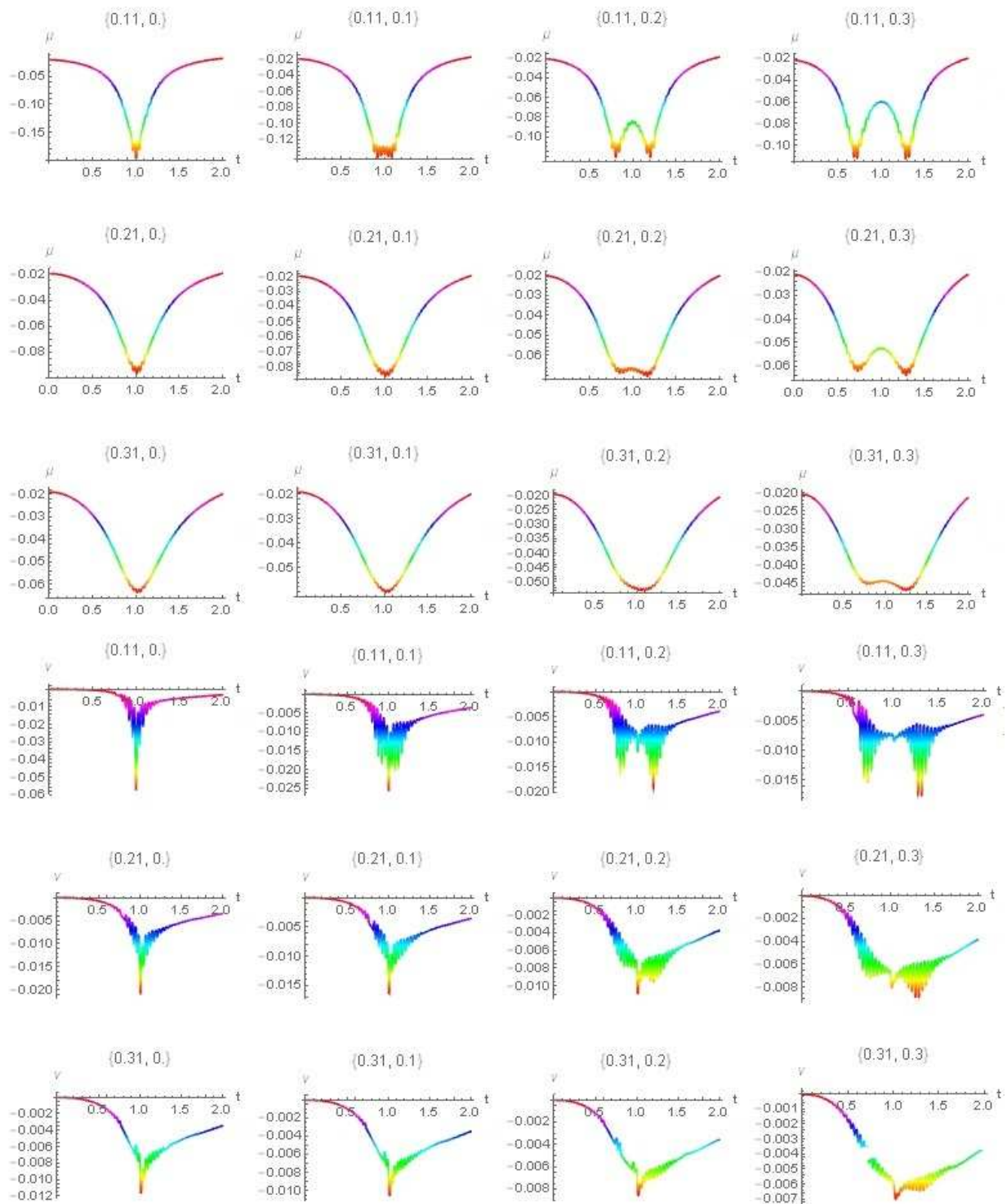


Рис. 2. Зависимости гравитационных потенциалов от времени в различных точках  $\{\rho, z\}$  (координаты точек указаны над рисунками).

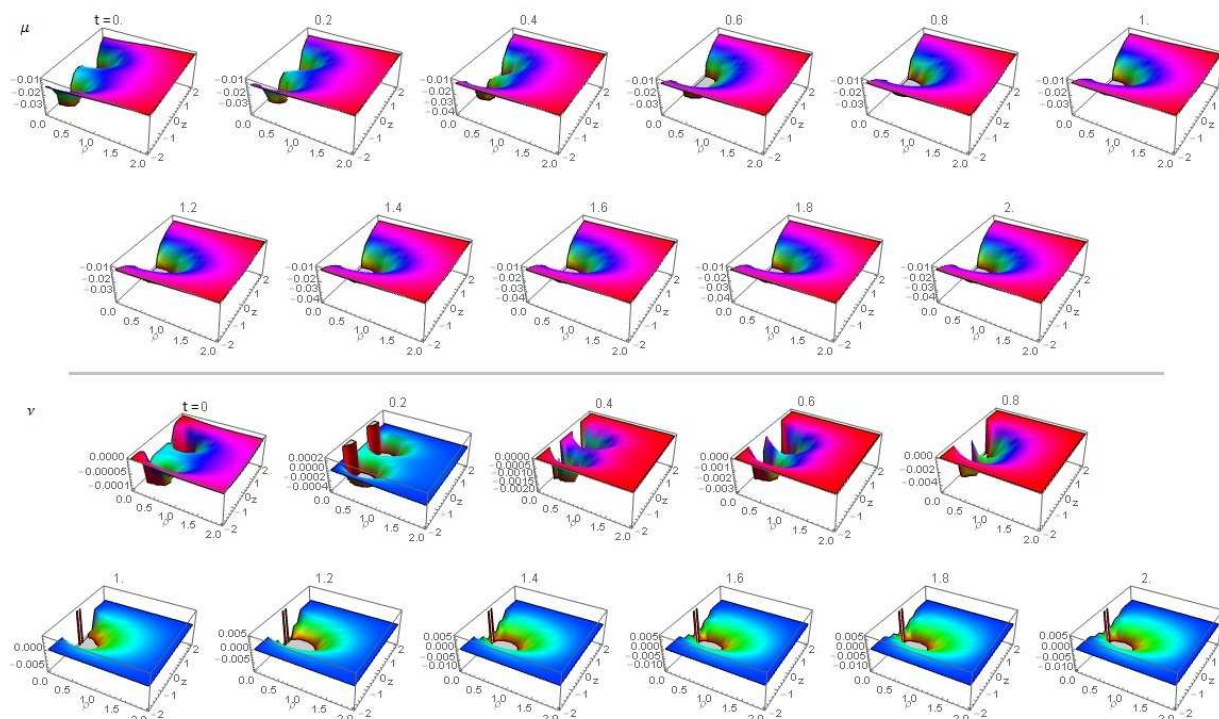


Рис. 3. Распределение гравитационных потенциалов в различные моменты времени при столкновении и слиянии частиц равной массы в потоках Риччи: параметр времени указан над рисунками.

Отметим, что волны возникают в силу нелинейности уравнений (11), тогда как в линейном случае при монотонных граничных условиях (12) потенциалы также должны изменяться монотонно. Природа этих волн такая же, как у волн, возникающих при слиянии черных дыр [10-12] и нейтронных звезд [31]. Теория столкновения частиц представленных сингулярностями поля в потоках Риччи позволяет детально исследовать влияние параметров задачи на частоту и амплитуду гравитационных волн.



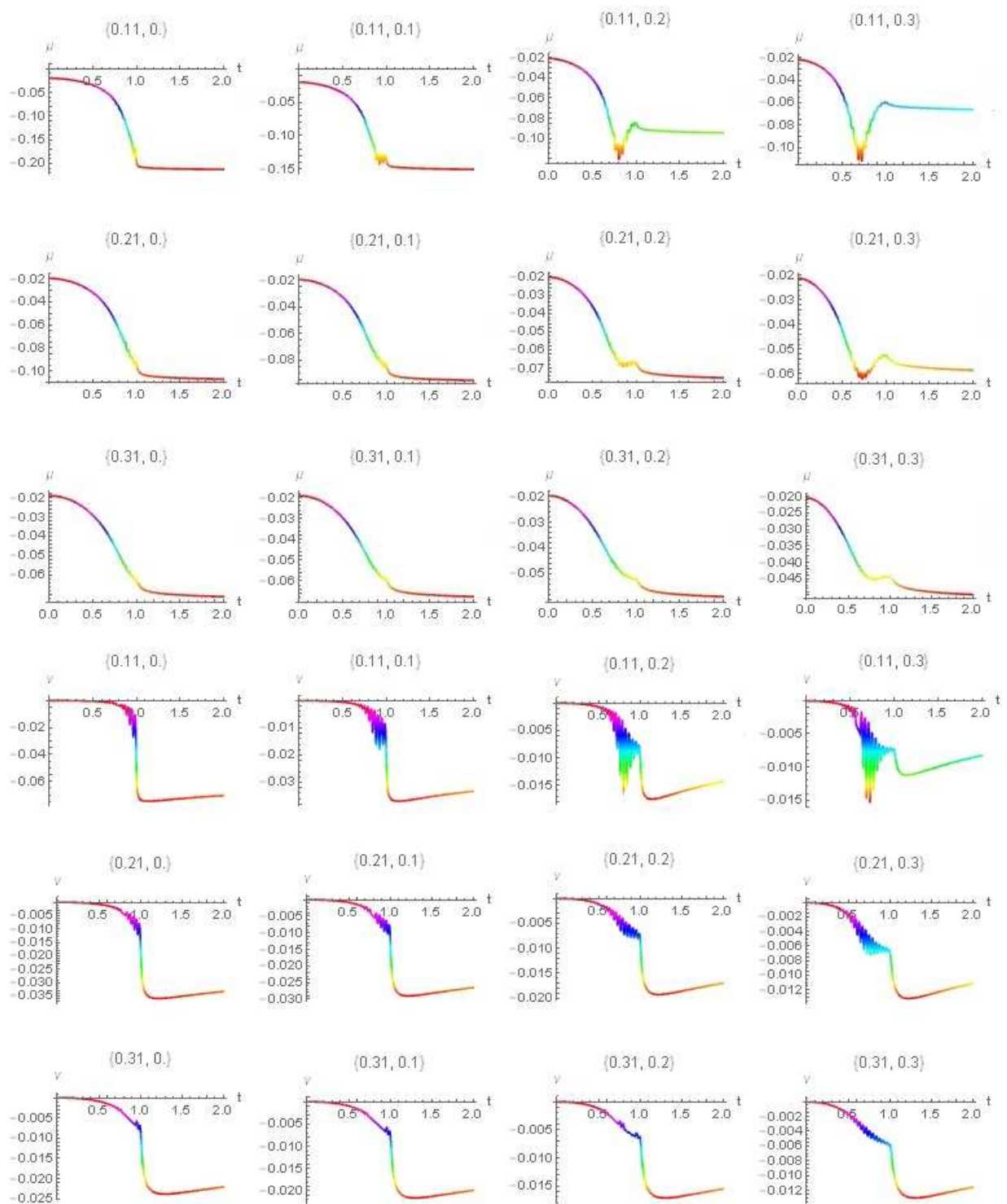


Рис. 4. Зависимости гравитационных потенциалов от времени в различных точках  $\{\rho, z\}$  (координаты точек указаны над рисунками).

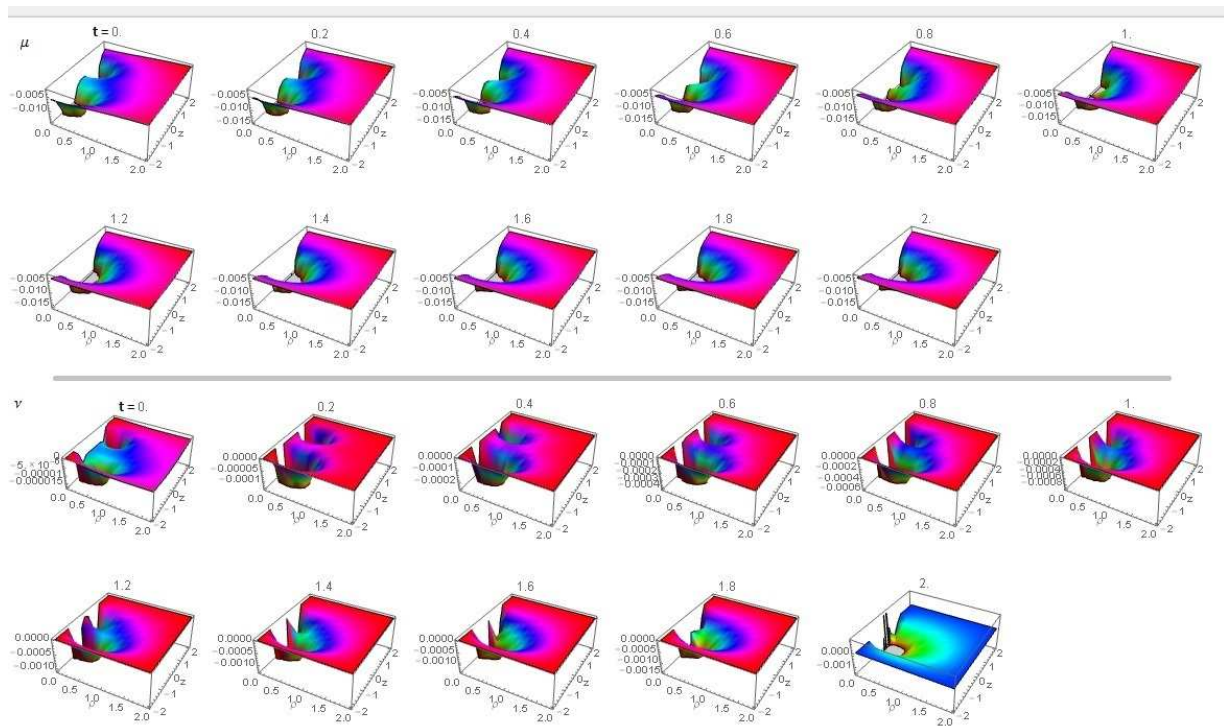


Рис. 5. Распределение гравитационных потенциалов в различные моменты времени при столкновении и слиянии частиц неравной массы в потоках Риччи: параметр времени указан над рисунками.

Амплитуда и период колебания волн зависят от скорости и массы частиц – рис 6. Так при увеличении скорости частиц в два раза период колебаний уменьшается в 2 раза, что видно из сравнения зависимостей потенциала  $V$  от времени, приведенных в нижней части рис. 6. При увеличении массы амплитуда колебаний потенциала  $V$  увеличивается пропорционально произведению масс частиц-  $m_1 m_2$ .

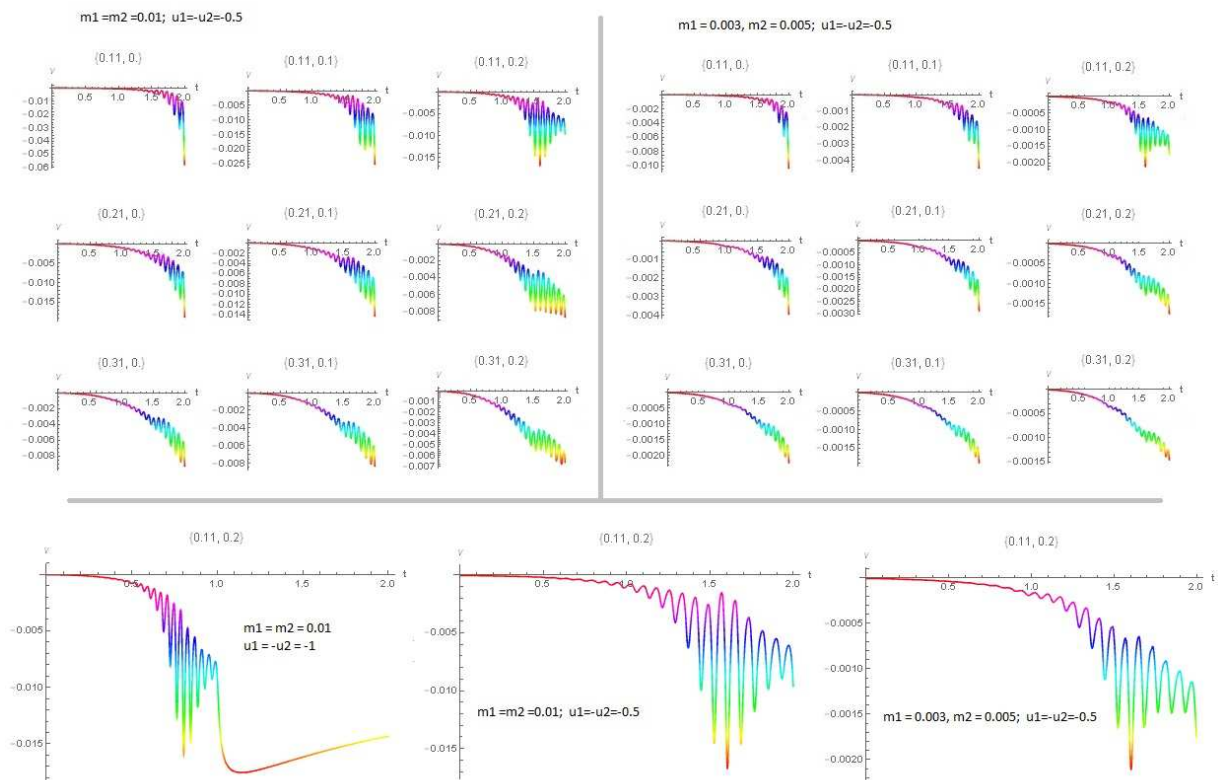


Рис. 6. Зависимости параметров гравитационных волн при изменении массы и скорости частиц.

Заметим, что наряду с системой уравнений (11) должны также выполняться второе и третье уравнения системы (3). Очевидно, однако, что указанные уравнения не могут выполняться на произвольных решениях системы уравнений (11). Можно предположить, что возникающая при этом невязка должна компенсироваться в силу уравнения Эйнштейна (1) некоторым тензором энергии-импульса  $\tau_{ik}$ , что интерпретируется, как энергия гравитационных волн, свободно распространяющихся за пределы системы.



### Гравитационные волны в потоках Риччи

Для описания процесса распространения волн используем стандартную модель [15], имеем

$$\nabla^2 \psi_i^k - (\psi_i^k)_{,tt} = \frac{16\pi G}{c^4} \tau_i^k \quad (15)$$

Из уравнения (1) имеем для тензора в правой части (14) следующее соотношение

$$G_{ik} = \frac{8\pi G}{c^4} \tau_{ik} \quad (16)$$

Наконец, производя вычисления, находим в метрике (2) с учетом уравнений (11) компоненты тензора Эйнштейна

$$G_{11} = \frac{1}{2} \frac{\partial}{\partial t} e^{2\mu-\nu}, G_{22} = \frac{\omega_2}{2\rho}, G_{23} = G_{32} = \frac{\omega_3}{2\rho}, G_{44} = -\frac{\rho^2}{2} \frac{\partial}{\partial t} e^{-\nu} \quad (17)$$

На рис. 8 представлены данные по распределению компоненты тензора Эйнштейна  $G_{11}$  в пространстве и времени в задаче с данными (13) в варианте слияния сингулярностей. Из этих данных следует, что источник гравитационных волн воспроизводит колебания гравитационных потенциалов во всей области интегрирования. Следовательно, гравитационные волны, излучаемые системой согласно (15), несут на себе отпечаток колебаний источника, которые по своему характеру и структуре вполне подобны гравитационным волнам, возникающим при слиянии черных дыр [10-12] и нейтронных звезд [31].

Используя (16) преобразуем уравнение (15) к виду удобному для численного интегрирования:

$$\nabla^2 \psi_i^k - (\psi_i^k)_{,tt} = 2g^{jk} G_{ij} \quad (18)$$

Учитывая выражения (17), распишем систему (18) покомпонентно, имеем

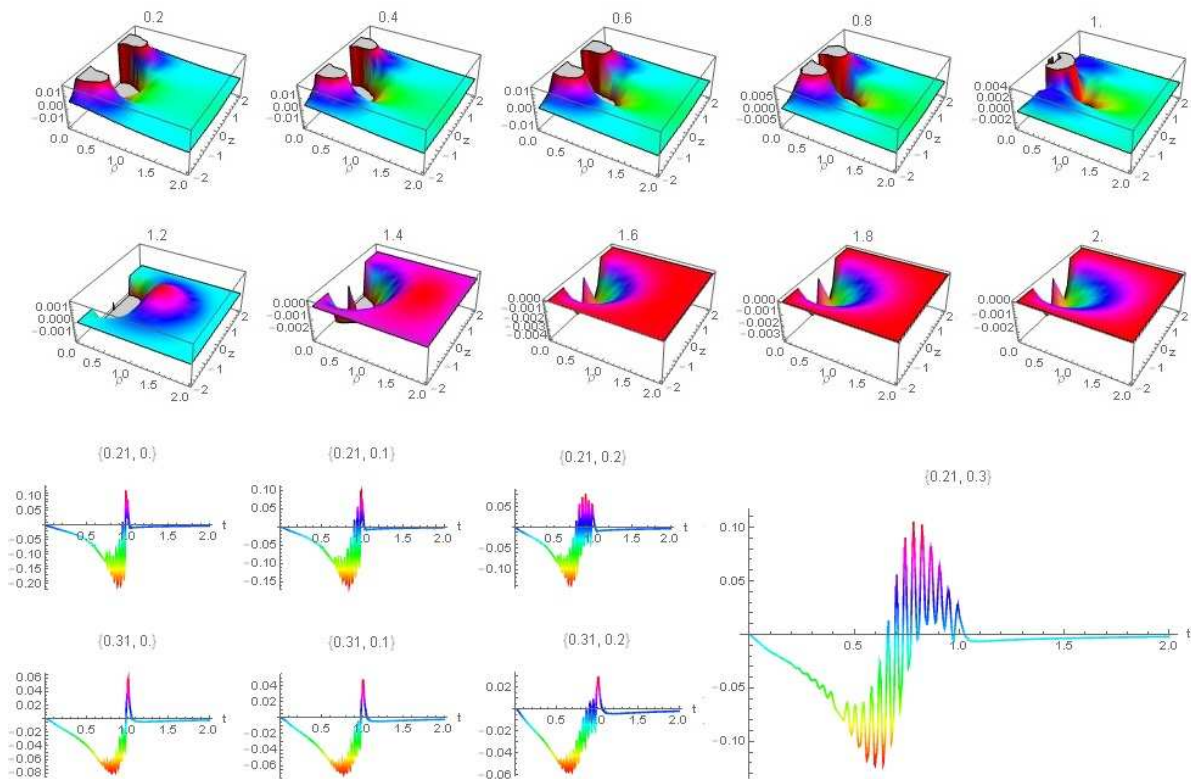


Рис. 7. Пространственно-временное распределение компоненты тензора Эйнштейна  $G_{11}$  при столкновении и слиянии частиц в потоках Риччи.

$$\begin{aligned} \nabla^2 \psi_1^1 - (\psi_1^1)_{,tt} &= e^{-\mu} \frac{\partial}{\partial t} e^{2\mu-\nu}, \quad \nabla^2 \psi_2^2 - (\psi_2^2)_{,tt} = -\frac{\omega_2}{\rho} e^{-\nu}, \\ \nabla^2 \psi_3^3 - (\psi_3^3)_{,tt} &= -\frac{\omega_3}{\rho} e^{-\nu}, \quad \nabla^2 \psi_4^4 - (\psi_4^4)_{,tt} = e^{\mu} \frac{\partial}{\partial t} e^{-\nu} \end{aligned} \quad (19)$$

Система уравнений (19) позволяет определить распределение полей в дальней зоне, где метрика (2) стремится к галилеевой метрике [15]. Однако решение этой задачи выходит за рамки настоящей работы.

### Библиографический список

1. Einstein A., Infeld L., Hoffmann B. Gravitational Equations and Problems of Motion//Ann. Math., 39, 65-100, 1938.
2. Einstein A., Infeld L. Gravitational Equations and Problems of Motion II//Ann. Math., 41, 455-564, 1940.
3. Einstein A., Infeld L. On the Motion of Particles in General Relativity Theory// Canad. J. Math., 1, 209—241, 1949.
4. Silberstein L. Two-Centers Solution of the Gravitational Field Equations, and the Need for a Reformed Theory of Matter//Phys. Rev. 49, 268, 1936.
5. Einstein A., Rosen N. Two-Body Problem in General Relativity Theory//Phys. Rev. 49, 404 – Published 1 March 1936.
6. Einstein A. Demonstration of the Non-existence of Gravitational Fields with a Non-vanishing Total Mass free Singularities// Revista Univ. nac. Tucuman, ser A, 2, N 1-2, 11-15, 1941.
7. Einstein A., Pauli W. Non-existence of Regular Stationary Solutions of Relativistic Field Equation// Ann. Math., 44,131-137, 1943.
8. Schwarzschild K. Uber das Gravitations-feld eines Massenpunktes nach der Einsteinschen Theorie// Sitzungsberichte der Königlich Preussischen Akademie der Wissenschaften zu Berlin, Phys.-Math. Klasse, 189–196 (1916); On the Gravitational Field of a Mass Point according to Einstein's Theory//arXiv: physics/9905030v1 [physics.hist-ph] 12 May 1999.
9. Трунев А.П. Динамика релятивистских частиц в метрике галактик / А.П. Трунев // Политематический сетевой электронный научный журнал Кубанского государственного аграрного университета (Научный журнал КубГАУ) [Электронный ресурс]. – Краснодар: КубГАУ, 2016. – №02(116). С. 1619 – 1641. – IDA [article ID]: 1161602101. – Режим доступа: <http://ej.kubagro.ru/2016/02/pdf/101.pdf>.
10. Abbott B.P. et al. Observation of Gravitational Waves from a Binary Black Hole Merger// Phys. Rev. Let., PRL 116, 061102, 12 Feb., 2016.
11. Abbott B.P. et al. Properties of the binary black hole merger GW150914/The LIGO Scientific Collaboration and The Virgo Collaboration, 11 Feb 2016; arXiv:1602.03840.
12. Abbott B.P. et al. The basic physics of the binary black hole merger GW150914/The LIGO Scientific Collaboration and The Virgo Collaboration, Aug 5 2016; arXiv:1608.01940.
13. Synge J.L. Relativity: the General Theory. - Amsterdam, 1960.
14. Petrov A.Z. New methods in general relativity. - Moscow: Nauka, 1966.
15. Landau L.D., Lifshitz E.M. The Classical Theory of Fields. Vol. 2 (3rd ed.). Pergamon Press. ISBN 978-0-08-016019-1, 1971.
16. Hans Stephani, Dietrich Kramer, Malcolm MacCallum, Cornelius Hoenselaers, Eduard Herltet. Exact Solutions to Einstein's Field Equations. Second Edition. Cambridge University Press. ISBN 0-521-46136-7, 2003.
17. Трунев А.П. Общая теория относительности и метрика галактик / А.П. Трунев // Политематический сетевой электронный научный журнал Кубанского государственного аграрного университета (Научный журнал КубГАУ) [Электронный ресурс]. – Краснодар: КубГАУ, 2013. – №10(094). С. 360 – 384. – IDA [article ID]: 0941310027. – Режим доступа: <http://ej.kubagro.ru/2013/10/pdf/27.pdf>

18. Трунев А.П. Логарифмический закон в динамических системах от кварков до галактик / А.П. Трунев // Политематический сетевой электронный научный журнал Кубанского государственного аграрного университета (Научный журнал КубГАУ) [Электронный ресурс]. – Краснодар: КубГАУ, 2016. – №06(120). С. 1470 – 1494. – IDA [article ID]: 1201606099. – Режим доступа: <http://ej.kubagro.ru/2016/06/pdf/99.pdf>
19. Hamilton R.S. Three manifolds with positive Ricci curvature// *Jour. Diff. Geom.* 17, 255-306, 1982.
20. Hamilton R.S. Four manifolds with positive curvature operator. *Jour. Diff. Geom.* 24, 153-179, 1986.
21. Hamilton R.S. The Ricci flow on surfaces// *Contemp. Math.* 71, 237-261, 1988.
22. Hamilton R.S. The Harnack estimate for the Ricci flow// *Jour. Diff. Geom.* 37, 225-243, 1993.
23. Hamilton R.S. A compactness property for solutions of the Ricci flow// *Amer. Jour. Math.* 117, 545-572, 1995.
24. Perelman G. The entropy formula for the Ricci flow and its geometric applications// *arXiv:math/0211159*, 11 Nov 2002.
25. Perelman G. Finite extinction time for the solutions to the Ricci flow on certain three-manifolds//*arXiv:math/0307245*, 17 Jul 2003.
26. Perelman G. Ricci flow with surgery on three-manifolds//*arXiv:math/0303109*, 10 Mar 2003.
27. Akbar M.M., MacCallum M.A.H. Static Axisymmetric Einstein Equations in Vacuum: Symmetry, New Solutions and Ricci Solitons//*arXiv:1508.05196*, 21 Aug 2015.
28. Akbar M.M., Woolgar E. Ricci Solitons and Einstein-Scalar Field Theory//*arXiv:0808.3126*, 12 Jan 2009.
29. Трунев А.П. Геометрическая турбулентность / А.П. Трунев // Политематический сетевой электронный научный журнал Кубанского государственного аграрного университета (Научный журнал КубГАУ) [Электронный ресурс]. – Краснодар: КубГАУ, 2014. – №05(099). С. 1003 – 1023. – IDA [article ID]: 0991405069. – Режим доступа: <http://ej.kubagro.ru/2014/05/pdf/69.pdf>
30. Трунев А.П. Геометрическая турбулентность и квантовая теория. – Palmarium Academic Publishing, ISBN 978-3-639-72485-1, 2015, 232 с.
31. Maione F., De Pietri R., Loffler F. Binary neutron star merger simulations with different initial orbital frequency and equation of state// *arXiv: 1605.03424v1*, 11 may 2016.

## References

1. Einstein A., Infeld L., Hoffmann B. Gravitational Equations and Problems of Motion//*Ann. Math.*, 39, 65-100, 1938.
2. Einstein A., Infeld L. Gravitational Equations and Problems of Motion II//*Ann. Math.*, 41, 455-564, 1940.
3. Einstein A., Infeld L. On the Motion of Particles in General Relativity Theory// *Canad. J. Math.*, 1, 209—241, 1949.
4. Silberstein L. Two-Centers Solution of the Gravitational Field Equations, and the Need for a Reformed Theory of Matter//*Phys. Rev.* 49, 268, 1936.
5. Einstein A., Rosen N. Two-Body Problem in General Relativity Theory//*Phys. Rev.* 49, 404 – Published 1 March 1936.

6. Einstein A. Demonstration of the Non-existence of Gravitational Fields with a Non-vanishing Total Mass free Singularities// *Revista Univ. nac. Tucuman, ser A*, 2, N 1-2, 11-15, 1941.

7. Einstein A., Pauli W. Non-existence of Regular Stationary Solutions of Relativistic Field Equation// *Ann. Math.*, 44,131-137, 1943.

8. Schwarzschild K. Uber das Gravitations-feld eines Massenpunktes nach der Einsteinschen Theorie// *Sitzungsberichte der Königlich Preussischen Akademie der Wissenschaften zu Berlin, Phys.-Math. Klasse*, 189–196 (1916); On the Gravitational Field of a Mass Point according to Einstein's Theory//arXiv: physics/9905030v1 [physics.hist-ph] 12 May 1999.

9. Trunев A.P. Dinamika reljativistskih chastic v metrike galaktik / A.P. Trunев // *Politematicheskij setevoj jelektronnyj nauchnyj zhurnal Kubanskogo gosudarstvennogo agrarnogo universiteta (Nauchnyj zhurnal KubGAU) [Jelektronnyj resurs]*. – Krasnodar: KubGAU, 2016. – №02(116). S. 1619 – 1641. – IDA [article ID]: 1161602101. – Rezhim dostupa: <http://ej.kubagro.ru/2016/02/pdf/101.pdf>.

10. Abbott B.P. et al. Observation of Gravitational Waves from a Binary Black Hole Merger// *Phys. Rev. Let., PRL* 116, 061102, 12 Feb., 2016.

11. Abbott B.P. et al. Properties of the binary black hole merger GW150914/The LIGO Scientific Collaboration and The Virgo Collaboration, 11 Feb 2016; arXiv:1602.03840.

12. Abbott B.P. et al. The basic physics of the binary black hole merger GW150914/The LIGO Scientific Collaboration and The Virgo Collaboration, Aug 5 2016; arXiv:1608.01940.

13. Synge J.L. *Relativity: the General Theory*. - Amsterdam, 1960.

14. Petrov A.Z. *New methods in general relativity*. - Moscow: Nauka, 1966.

15. Landau L.D., Lifshitz E.M. *The Classical Theory of Fields*. Vol. 2 (3rd ed.). Pergamon Press. ISBN 978-0-08-016019-1, 1971.

16. Hans Stephani, Dietrich Kramer, Malcolm MacCallum, Cornelius Hoenselaers, Eduard Herltet. *Exact Solutions to Einstein's Field Equations*. Second Edition. Cambridge University Press. ISBN 0-521-46136-7, 2003.

17. Trunев A.P. Obshhaja teorija odnositel'nosti i metrika galaktik / A.P. Trunев // *Politematicheskij setevoj jelektronnyj nauchnyj zhurnal Kubanskogo gosudarstvennogo agrarnogo universiteta (Nauchnyj zhurnal KubGAU) [Jelektronnyj resurs]*. – Krasnodar: KubGAU, 2013. – №10(094). S. 360 – 384. – IDA [article ID]: 0941310027. – Rezhim dostupa: <http://ej.kubagro.ru/2013/10/pdf/27.pdf>

18. Trunев A.P. Logarifmicheskij zakon v dinamicheskikh sistemah ot kvarkov do galaktik / A.P. Trunев // *Politematicheskij setevoj jelektronnyj nauchnyj zhurnal Kubanskogo gosudarstvennogo agrarnogo universiteta (Nauchnyj zhurnal KubGAU) [Jelektronnyj resurs]*. – Krasnodar: KubGAU, 2016. – №06(120). S. 1470 – 1494. – IDA [article ID]: 1201606099. – Rezhim dostupa: <http://ej.kubagro.ru/2016/06/pdf/99.pdf>

19. Hamilton R.S. Three manifolds with positive Ricci curvature// *Jour. Diff. Geom.* 17, 255-306, 1982.

20. Hamilton R.S. Four manifolds with positive curvature operator. *Jour. Diff. Geom.* 24, 153-179, 1986.

21. Hamilton R.S. The Ricci flow on surfaces// *Contemp. Math.* 71, 237-261, 1988.

22. Hamilton R.S. The Harnack estimate for the Ricci flow// *Jour. Diff. Geom.* 37, 225-243, 1993.

23. Hamilton R.S. A compactness property for solutions of the Ricci flow// *Amer. Jour. Math.* 117, 545-572, 1995.

24. Perelman G. The entropy formula for the Ricci flow and its geometric applications// arXiv:math/0211159, 11 Nov 2002.
25. Perelman G. Finite extinction time for the solutions to the Ricci flow on certain three-manifolds//arXiv:math/0307245, 17 Jul 2003.
26. Perelman G. Ricci flow with surgery on three-manifolds//arXiv:math/0303109, 10 Mar 2003.
27. Akbar M.M., MacCallum M.A.H. Static Axisymmetric Einstein Equations in Vacuum: Symmetry, New Solutions and Ricci Solitons//arXiv:1508.05196, 21 Aug 2015.
28. Akbar M.M., Woolgar E. Ricci Solitons and Einstein-Scalar Field Theory//arXiv:0808.3126, 12 Jan 2009.
29. Trunev A.P. Geometricheskaja turbulentsnost' / A.P. Trunev // Politematicheskij setevoj jelektronnyj nauchnyj zhurnal Kubanskogo gosudarstvennogo agrarnogo universiteta (Nauchnyj zhurnal KubGAU) [Jelektronnyj resurs]. – Krasnodar: KubGAU, 2014. – №05(099). S. 1003 – 1023. – IDA [article ID]: 0991405069. – Rezhim dostupa: <http://ej.kubagro.ru/2014/05/pdf/69.pdf>
30. Trunev A.P. Geometricheskaja turbulentsnost' i kvantovaja teorija. – Palmarium Academic Publishing, ISBN 978-3-639-72485-1, 2015, 232 s.
31. Maione F., De Pietri R., Loffler F. Binary neutron star merger simulations with different initial orbital frequency and equation of state// arXiv: 1605.03424v1, 11 may 2016.