

УДК 515.1+530.1

UDC 515.1+530.1

01.00.00 Физико-математические науки

Physics and mathematics

**ДИНАМИКА ЧАСТИЦ В МЕТРИКЕ С
ЛОГАРИФМИЧЕСКИМ ПОТЕНЦИАЛОМ****PARTICLE DYNAMICS IN METRICS WITH
LOGARITHMIC POTENTIAL**

Трунев Александр Петрович
к.ф.-м.н., Ph.D., директор
Scopus Author ID: 6603801161
SPIN-код автора: 4945-6530

Alexander Trunev
Cand.Phys.-Math.Sci., Ph.D., C.E.O.
Scopus Author ID: 6603801161

*A&E Trounev IT Consulting, Торонто, Канада**A&E Trounev IT Consulting, Toronto, Canada*

В работе рассмотрена проблема моделирования движения частиц в единой теории поля в 6D, в теории супергравитации в 112D и в метрике галактик. Исследована центрально-симметрическая метрика в 112-мерном римановом пространстве, зависящая от радиальной координаты, времени и 110 углов. Выведена система уравнений, описывающих угловое движение на гиперсфере произвольной размерности N. Показано, что движение на гиперсфере зависит от 2(N-1) сингулярных точек. Установлен общий характер релятивистского движения на гиперсфере при его отображении на плоскости и в трехмерном пространстве. Показано, что движение определяется отражением от особых точек, что при отображении движения на плоскости приводит в некоторых случаях к сгущению траекторий в окрестности сторон прямоугольника. В 6D исследована метрика, описывающая случай движения с двумя центрами симметрии. Показано, что в такой метрике существует класс точных решений, логарифмически зависящих от координат центров гравитации. Обнаружено, что в такой системе существует движение со сгущением траекторий вокруг сторон прямоугольника, что объясняется рассеянием пробных частиц на источниках гравитации. Указан общий характер углового движения на гиперсфере и радиального движения в 6D в метрике с логарифмическим потенциалом. Доказано, что аналогичные решения с логарифмическим потенциалом существуют в метрике галактик в метрической теории гравитации Эйнштейна. Обсуждается связь полученных решений с нелинейной электродинамикой, с теорией взаимодействия кварков и с теорией Янга-Миллса

Particle dynamics in metrics with logarithmic potential
The work considers the problem of modeling the motion of particles in a unified field theory to 6D, in theory, supergravity in the 112D and metric galaxies. We have investigated a centrally symmetric metric in the 112-dimensional Riemannian space, which depends on the radial coordinate, time, and 110 angles. We present a system of equations describing the angular movement on a hypersphere of any dimension N. It is shown that the motion on the hypersphere depends on the 2 (N-1) of singular points. We have installed general nature of relativistic motion on a hypersphere when it is displayed on the plane and in three-dimensional space. It is shown that the motion determined by the reflection from the singular points that of motion on the plane in some cases leads to thickening of the trajectories in the neighborhood of sides of the rectangle. The 6D investigated metric describing the case of motion with two centers of symmetry. It is shown that in such a metric exists a class of exact solutions, logarithmically dependent on the gravity centers of origin. It is found that in this system there is a motion with condensation paths around the sides of the rectangle, due to scattering of test particles gravity sources. We set the general nature of angular motion on a hypersphere and radial movements in 6D in the metric of a logarithmic potential. It is proved that similar solutions with logarithmic potential exist in galaxies metric in the metric of Einstein's theory of gravity. The article also describes the connection of the solutions to the nonlinear electrodynamics, and with a theory of quark interactions and Yang-Mills theory

Ключевые слова: ЕДИНАЯ ТЕОРИЯ ПОЛЯ,
ОБЩАЯ ТЕОРИЯ ОТНОСИТЕЛЬНОСТИ,
СУПЕРГРАВИТАЦИЯ

Keywords: GENERAL RELATIVITY,
SUPERGRAVITY, UNIFIED FIELD THEORY

Введение

Проблема описания динамики частиц в системах, содержащих множество центров гравитации актуальна в астрофизике в задачах

моделирования нейтронных звезд, а также в современной квантовой теории поля [1-5].

В общей теории относительности возникла проблема объединения метрической теории гравитации Эйнштейна с теорией Максвелла [6-11]. Как известно, наиболее просто такое объединение достигается в 5-мерном пространстве-времени [7-11]. В современных теориях супергравитации число измерений пространства-времени еще не установлено, а широко используемые теории сформулированы в пространствах 5, 10 или 11 измерений [12-13].

В [14] рассматривается геометрия риманова 112-мерного пространства с общим гравитационным полем. Показано, что физические законы во всех мирах отображают единое движение, охватывающее маркеры движения в форме элементарных частиц и атомов в 112-мерном пространстве.

В работе [15] обсуждается вариант метрической теории взаимодействий, в которой предполагается, что физические константы обусловлены наличием дополнительных измерений пространства-времени. Дана оценка числа физических констант на основе теории супергравитации в 112D.

В [16] рассматривается вариант единой теории поля. Дано обобщение единой теории поля в 5D [11], в 6D [6] и в многомерных пространствах с произвольной размерностью [17-19] на пространство 112D.

В настоящей работе исследована проблема описания движения частиц в единой теории поля в 6D, в теории супергравитации в 112D и в метрике галактик. Выведена система уравнений, описывающих угловое движение на гиперсфере произвольной размерности N . Показано, что движение на гиперсфере зависит от $2(N-1)$ сингулярных точек. Установлен общий характер движения на гиперсфере при его отображении на

плоскости и в трехмерном пространстве. Показано, что движение на гиперсфере определяется отражением от особых точек, что при отображении движения на плоскости в некоторых случаях приводит к сгущению траекторий в окрестности сторон прямоугольника.

В 6D исследована метрика, описывающая случай движения с двумя центрами симметрии. Показано, что в такой метрике существует класс точных решений, зависящих логарифмически от координат центров гравитации, что является обобщением метрики Шварцшильда на случай N черных дыр. Обнаружено, что в такой системе существует движение со сгущением траекторий вокруг сторон прямоугольника, что объясняется рассеянием пробных частиц на источниках гравитации. Указан общий характер углового движения на гиперсфере и радиального движения в 6D в метрике с логарифмическим потенциалом. Доказано, что аналогичные решения с логарифмическим потенциалом существуют в метрике галактик в метрической теории гравитации Эйнштейна. Обсуждается связь полученных решений с нелинейной электродинамикой, с теорией взаимодействия кварков и с теорией Янга-Миллса.

Гравитация в 112D

Рассмотрим обобщение уравнений Эйнштейна для пустого пространства на случай произвольного числа измерений [14-19]:

$$\begin{aligned} R_{\mu\nu} - \frac{1}{2} g_{\mu\nu} R &= k g_{\mu\nu} \\ \frac{8\pi G}{c^4} T_{\mu\nu} &= g_{\mu\nu} (k - \Lambda) \end{aligned} \quad (1)$$

Здесь k – некоторая функция, зависящая от размерности пространства, $R_{\mu\nu}, g_{\mu\nu}, T_{\mu\nu}$ – тензор Риччи, метрический тензор и тензор энергии-импульса; Λ, G, c – космологическая постоянная Эйнштейна, гравитационная постоянная и скорость света соответственно.

Отметим, что первым уравнением (1) определяется метрика пространства-времени, а вторым уравнением задается распределение материи, которое соответствует этой метрике. Эта гипотеза согласуется с теорией происхождения материи из гравитационного поля [3-4], но без специального предположения о наличии сингулярности метрики.

В общем случае имеют место соотношения

$$\begin{aligned}
 R_{ik} &= R_{ijk}^j, \quad R = g^{ik} R_{ik}, \\
 R_{\beta\gamma\delta}^\alpha &= \frac{\partial \Gamma_{\beta\delta}^\alpha}{\partial x^\gamma} - \frac{\partial \Gamma_{\beta\gamma}^\alpha}{\partial x^\delta} + \Gamma_{\beta\delta}^\mu \Gamma_{\mu\gamma}^\alpha - \Gamma_{\beta\gamma}^\mu \Gamma_{\mu\delta}^\alpha, \\
 \Gamma_{jk}^i &= \frac{1}{2} g^{is} \left(\frac{\partial g_{sj}}{\partial x^k} + \frac{\partial g_{sk}}{\partial x^j} - \frac{\partial g_{jk}}{\partial x^s} \right)
 \end{aligned} \tag{2}$$

$R_{\beta\gamma\delta}^\alpha$ - тензор Римана, Γ_{kl}^i – символы Кристоффеля второго рода.

Отметим, что в модели (1) сохраняются все результаты, связанные с определением, так называемых пространств Эйнштейна [20-21], поскольку соответствующие метрики являются решением первого уравнения (1).

В метрической теории существует два основных типа законов физики. Первый тип законов вытекает из равенства нулю ковариантной производной метрического тензора:

$$Dg_{ik} = 0 \rightarrow \frac{\partial g_{ik}}{\partial x^l} - g_{mk} \Gamma_{il}^m - g_{im} \Gamma_{kl}^m = 0 \tag{3}$$

В стандартной теории поля [22] из уравнений (3) выводится связь символов Кристоффеля с метрическим тензором в форме

$$\Gamma_{kl}^i = \frac{1}{2} g^{im} \left(\frac{\partial g_{mk}}{\partial x^l} + \frac{\partial g_{ml}}{\partial x^k} - \frac{\partial g_{kl}}{\partial x^i} \right)$$

Дальнейшее развитие теории строится на определении тензора кривизны и тензора Риччи в соответствии с выражениями (2). Заметим, что в общей теории относительности предполагается, что тензор энергии импульса материи связан с тензором Эйнштейна уравнением Эйнштейна [22].

Однако уравнения (3) также являются фундаментальными, если их рассматривать при заданных функциях Γ_{kl}^i . Действительно, в этом случае можно определить и метрический тензор, интегрируя уравнения (3), и тензор Римана, используя выражения (2), и тензор энергии-импульса материи на основе уравнения Эйнштейна.

Второй тип законов вытекает из равенства нулю ковариантной производной скорости,

$$Du^i = 0 \rightarrow \frac{d^2 x^\mu}{ds^2} + \Gamma_{\nu\lambda}^\mu \frac{dx^\nu}{ds} \frac{dx^\lambda}{ds} = 0 \quad (4)$$

Отметим, что совокупность законов физики в форме (3)-(4) при заданных функциях Γ_{kl}^i полностью описывает динамику полей и частиц в многомерных пространствах.

Центрально-симметрические метрики

В работах [14-19] представлена модель гравитации в многомерных пространствах размерностью D с метрикой

$$ds^2 = \psi(t, r)dt^2 - p(\psi)dr^2 - d\phi_1^2 - \sin^2 \phi_1 d\phi_2^2 - \sin^2 \phi_1 \sin^2 \phi_2 d\phi_3^2 - \dots - \sin^2 \phi_1 \sin^2 \phi_2 \dots \sin^2 \phi_{N-1} d\phi_N^2 \quad (5)$$

Здесь $\phi_1, \phi_2, \dots, \phi_N$ - углы на единичной сфере, погруженной в $D - 1$ мерное пространство. Метрика (5) описывает многие важные случаи симметрии, используемые в физике элементарных частиц и в теории супергравитации. Например, 3-х сфера используется для представления $Sp(1) \cong SO(4) / SO(3) \cong SU(2)$ симметрии; 5-сфера описывает $SO(6) / SO(5) = SU(3) / SU(2)$ и т.п. Такой подход позволяет охватить все многообразие материи, которую производит фабрика природы, путем выбора уравнения состояния $p = p(\psi)$.

Уравнения поля в метрике (5) сводятся к одному уравнению второго порядка [14-19]

$$-p'\psi_{tt} + \psi_{rr} = -Kp\psi - \frac{pp' - 2p''p\psi + p'^2\psi}{2p\psi} \psi_t^2 + \frac{p + p'\psi}{2p\psi} \psi_r^2 \quad (6)$$

В общем случае параметры модели и скалярная кривизна зависят только от размерности пространства, имеем

$$\begin{aligned} k &= D(D-5)/2 + 3, \\ K &= 2(D-3), \\ R &= -D^2 + 3D \end{aligned} \quad (7)$$

Уравнение Гамильтона-Якоби в метрике (5) имеет вид

$$\begin{aligned} &\frac{1}{\psi} \left(\frac{\partial S}{\partial t} \right)^2 - \frac{1}{p} \left(\frac{\partial S}{\partial r} \right)^2 - \left(\frac{\partial S}{\partial \phi_1} \right)^2 - \sin^{-2} \phi_1 \left(\frac{\partial S}{\partial \phi_2} \right)^2 - \\ &\sin^{-2} \phi_1 \sin^{-2} \phi_2 \left(\frac{\partial S}{\partial \phi_3} \right)^2 - \dots - \sin^{-2} \phi_1 \sin^{-2} \phi_2 \dots \sin^{-2} \phi_{N-1} \left(\frac{\partial S}{\partial \phi_N} \right)^2 = 0 \end{aligned} \quad (8)$$

Уравнение (8) можно проинтегрировать при некоторых предположениях, используя метод, рассмотренный в работах [6, 14-19].

В шестимерном пространстве с сигнатурой метрики (+,+,+,±,-,-) можно построить естественное обобщение метрики (5) на случай наличия двух центров симметрии в виде [6]

$$ds^2 = \psi(t,r)dt^2 + d\chi_1^2 + \sin^2 \chi_1 d\chi_2^2 - p(\psi)dr^2 - d\phi_1^2 - \sin^2 \phi_1 d\phi_2^2 \quad (9)$$

Здесь $\chi_1, \chi_2, \phi_1, \phi_2$ - углы на единичных сферах, погруженных в трехмерные пространства; t, r - координаты, связанные со временем и расстоянием соответственно.

Рассмотрим гравитацию в пространствах с метрикой (9). Заметим, что только четыре компоненты тензора Эйнштейна в метрике (9) отличны от нуля:

$$G_{ik} = R_{ik} - \frac{1}{2} R g_{ik} = G_{22} \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & \sin^2 \chi_2 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & -\sin^2 \phi_2 \end{pmatrix} \quad (10)$$

Следовательно, в этом случае в первом уравнении (1) следует положить $k = 0$, тогда уравнения поля в метрике (9) сводятся к одному уравнению второго порядка $G_{22} = 0$. Отсюда находим

$$-p' \psi_{tt} + \psi_{rr} = -\frac{pp' - 2p''p\psi + p'^2\psi}{2p\psi} \psi_t^2 + \frac{p + p'\psi}{2p\psi} \psi_r^2 \quad (11)$$

В частном случае, полагая в уравнении (11) $p(\psi) = -\psi, \psi = e^u$, имеем уравнение Лапласа

$$u_{tt} + u_{rr} = 0 \quad (12)$$

В другом частном случае, полагая в (11) $p(\psi) = \psi, \psi = e^w$, приходим к волновому уравнению [6]

$$w_{tt} - w_{rr} = 0 \quad (13)$$

Отметим, что метрика (9), в которой уравнения поля сводятся к волновому уравнению (13) была исследована в работах [6, 23]. В настоящей работе исследована динамика частиц в метрике (9) в случае, когда уравнение (11) сводится к уравнению Лапласа (12).

Динамика частиц на гиперсфере

Заметим, что движение частиц в метрике (5) разделяется на радиальное движение и движение на сфере, которое в общем случае можно исследовать независимо от радиального движения. Будем предполагать, что существуют такие частицы, которые движутся в метрике (5) на гиперсфере с числом углов $N = 110$. Как известно, движение массивных

частиц в гравитационном поле в общем случае описывается уравнением (4). Пронумеруем координаты метрики (5) следующим образом

$$\phi_1, \phi_2, \dots, \phi_N, x_{N+1}, x_{N+2}.$$

Система уравнений (4) в метрике (5) имеет вид [14]

$$\frac{d^2 \phi_i}{ds^2} + 2 \frac{d\phi_i}{ds} \sum_{j=1}^{i-1} \frac{d\phi_j}{ds} \cot \phi_j - \cos \phi_i \sin \phi_i \sum_{j=i+1}^N \frac{d\phi_j}{ds} \frac{d\phi_j}{ds} \prod_{k=i+1}^{j-1} \sin^2 \phi_k = 0, \quad i = 1, \dots, N. \quad (14)$$

Отметим, что в силу уравнений (14) все углы связаны между собой. Поэтому движение вдоль каждого угла может влиять на динамику всей системы. Это влияние является особенно сильным в окрестности полюсов системы, где $\phi_i \rightarrow 0, \pi$, при этом $\cot \phi_i \rightarrow \pm\infty$. Согласно системе уравнений (14) число таких полюсов равно $2(N-1)$.

Поскольку система уравнений (14) зависит от начальных данных, полагая в начальный момент времени $\phi_2(0) = \pi/2, \dot{\phi}_2(0) = 0$, во все последующие моменты времени имеем $\phi_2(t) = \pi/2, \dot{\phi}_2(t) = 0$. Но тогда, согласно (14), угол ϕ_2 выпадает из системы, а порядок системы понижается.

Используя это свойство системы уравнений (14) можно исследовать динамику некоторой подсистемы меньшего размера. В работе [14] исследованы подсистемы с числом угловых координат $N = 5; 8; 38; 71$, которые описывают взаимное влияние 2, 3, 13 и 24 миров соответственно.

На рисунке 1 представлены результаты моделирования динамики частиц на гиперсфере в случае 20 углов, что соответствует взаимодействию семи миров в теории [14-16]. Отметим, что проекции траектории частиц на плоскости образуют своеобразные фигуры похожие на прямоугольники. В трехмерном пространстве эти фигуры образуют коридоры, аналогичные тем, которые были получены нами в теории Янга-Миллса – рис. 2. В этом случае траектории частиц на некоторых участках состоят как бы из прямых линий, которые при большом увеличении

выглядят как бруски прямоугольного сечения, на которые навиты линии, образующиеся при колебаниях в трех плоскостях – смотрите правый верхний рис. 2.

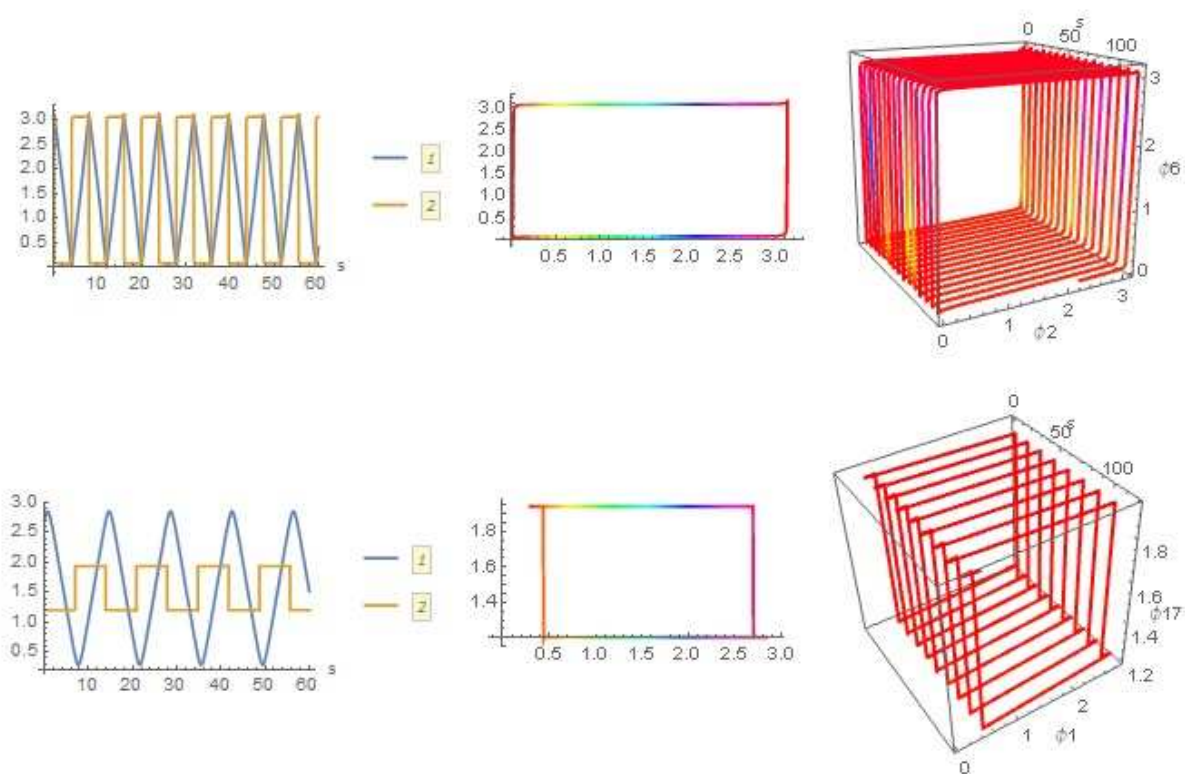


Рис. 1. Зависимости углов от параметра s , траектории плоского и трехмерного движения на гиперсфере для $N=20$.

В общем случае, согласно (4), движение в пространстве зависит от функций Γ_{kl}^i – символов Кристоффеля второго рода. Чтобы отобразить движение в многомерных пространствах в рамках четырехмерного пространства-времени необходимо осуществить компактификацию. В многомерной теории гравитации компактификация достигается путем задания условия периодичности (цилиндричности) по одной или нескольким координатам [7-11, 15, 25-26].

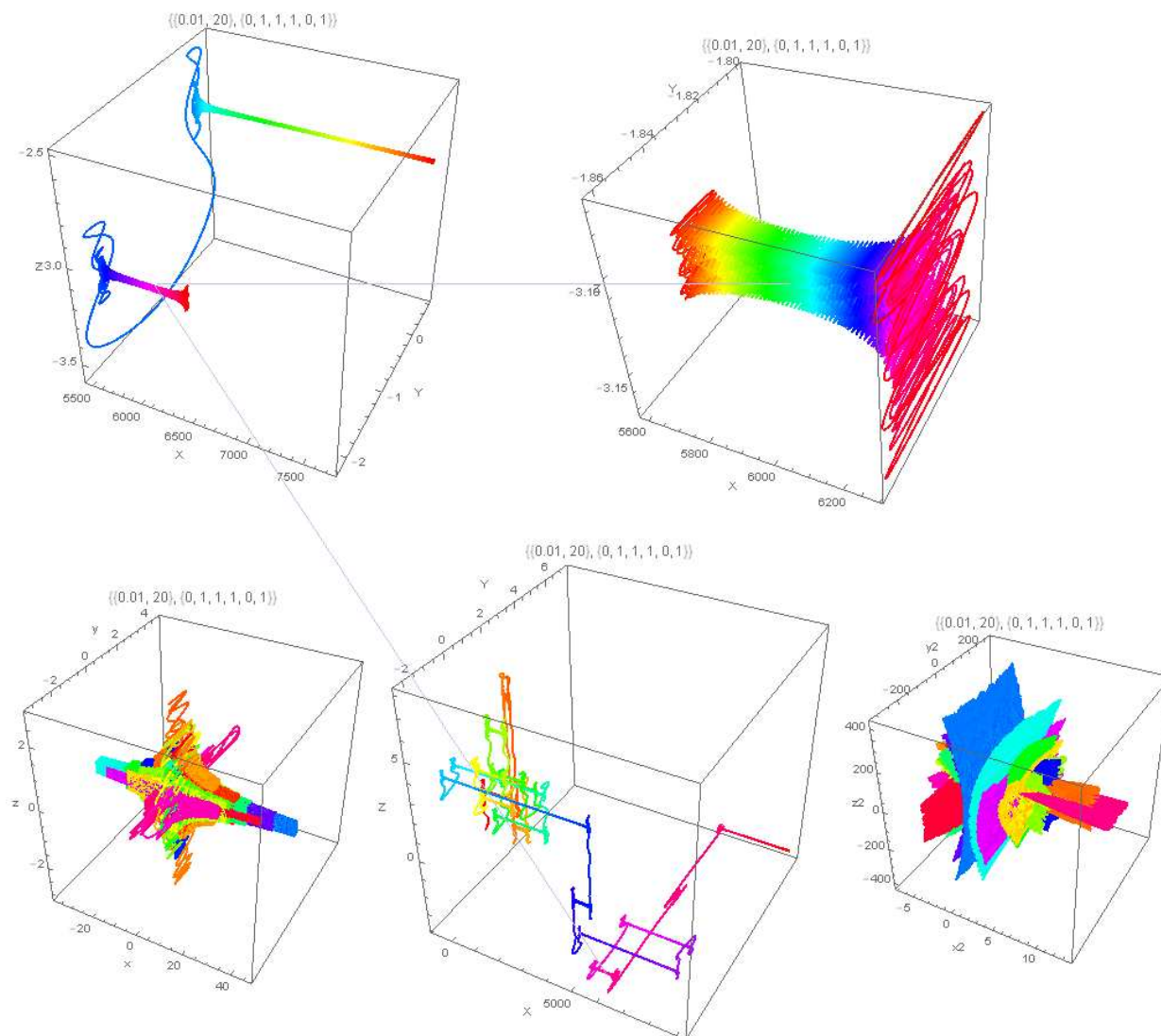


Рис. 2. Динамика полей Янга-Миллса и траектории частиц в модели [24].

Предложенный нами способ отображения движения на гиперсфере путем комбинации углов [14] отличается наглядностью, что позволяет сопоставить многомерное движение с известными в физике движениями в четырехмерном пространстве-времени – рис. 1-2. Ниже будет показано, что движения, аналогичные представленным на рис. 1, существуют в 6D, а также в метрике галактик [27].

Такое отображение многомерного движения возможно в том случае, если дополнительные измерения пространства не свернуты, как это

предполагается в стандартной теории [12-13], а, напротив, доступны наблюдению.

Проблема же заключается в том, что наблюдатель не располагает необходимыми приборами для наблюдения многомерного движения. В проекции на плоскость или в 3D движение выглядит так, что наблюдатель вынужден предполагать наличие центров гравитации, электрических зарядов, сильных и слабых взаимодействий. Тогда как в действительности система уравнений (14), описывающая движение на гиперсфере, уже содержит особенности, которые можно связать с наличием зарядов или центров гравитации. Для доказательства перепишем уравнение (14) в виде

$$\frac{d^2\phi_i}{ds^2} + 2\frac{d\phi_i}{ds} \frac{d}{ds} \sum_{j=1}^{i-1} \ln(\sin\phi_j) - \cos\phi_i \sin\phi_i \sum_{j=i+1}^N \frac{d\phi_j}{ds} \frac{d\phi_j}{ds} \prod_{k=i+1}^{j-1} \sin^2\phi_k = 0, \quad i=1, \dots, N. \quad (14a)$$

Отсюда следует, что в особых точках $\phi_j \rightarrow 0, \pi$ решение системы (14a) зависит от логарифмических потенциалов $\ln(\sin\phi_j) \approx \ln\phi_j$, которые, как будет показано ниже, могут быть связаны с наличием центров гравитации или зарядов.

Динамика частиц в 6D

Рассмотрим динамику частиц в метрике (9) в частном случае $p(\psi) = -\psi, \psi = e^u$, когда уравнения поля сводятся к уравнению Лапласа (12). В этом случае система уравнений (4) приводится к виду

$$\begin{aligned} \frac{d^2t}{ds^2} + \frac{dt}{ds} \frac{dr}{ds} \frac{\partial u}{\partial r} + \frac{1}{2}(t_s^2 - r_s^2) \frac{\partial u}{\partial t} &= 0, \\ \frac{d^2r}{ds^2} + \frac{dt}{ds} \frac{dr}{ds} \frac{\partial u}{\partial t} + \frac{1}{2}(r_s^2 - t_s^2) \frac{\partial u}{\partial r} &= 0, \\ \frac{d^2\chi_1}{ds^2} = 0, \quad \frac{d^2\chi_2}{ds^2} + \frac{d\chi_2}{ds} \frac{d\chi_2}{ds} \cot\chi_2 &= 0, \\ \frac{d^2\phi_1}{ds^2} = 0, \quad \frac{d^2\phi_2}{ds^2} + \frac{d\phi_2}{ds} \frac{d\phi_2}{ds} \cot\phi_2 &= 0. \end{aligned} \quad (15)$$

Здесь обозначено $t_s = dt / ds, r_s = dr / ds$.

Решение уравнения (12), описывающее N центров гравитации на плоскости имеет вид

$$u = -\sum_{j=1}^N \ln \sqrt{(t-t_j)^2 + (r-r_j)^2} \quad (16)$$

Из уравнений (15) видно, что движение в 6D в метрике (9) разделяется на движение на двух сферах и на движение в плоскости (r, t) . В качестве координаты времени может быть выбран любой из углов или параметр s - рис. 3-4.

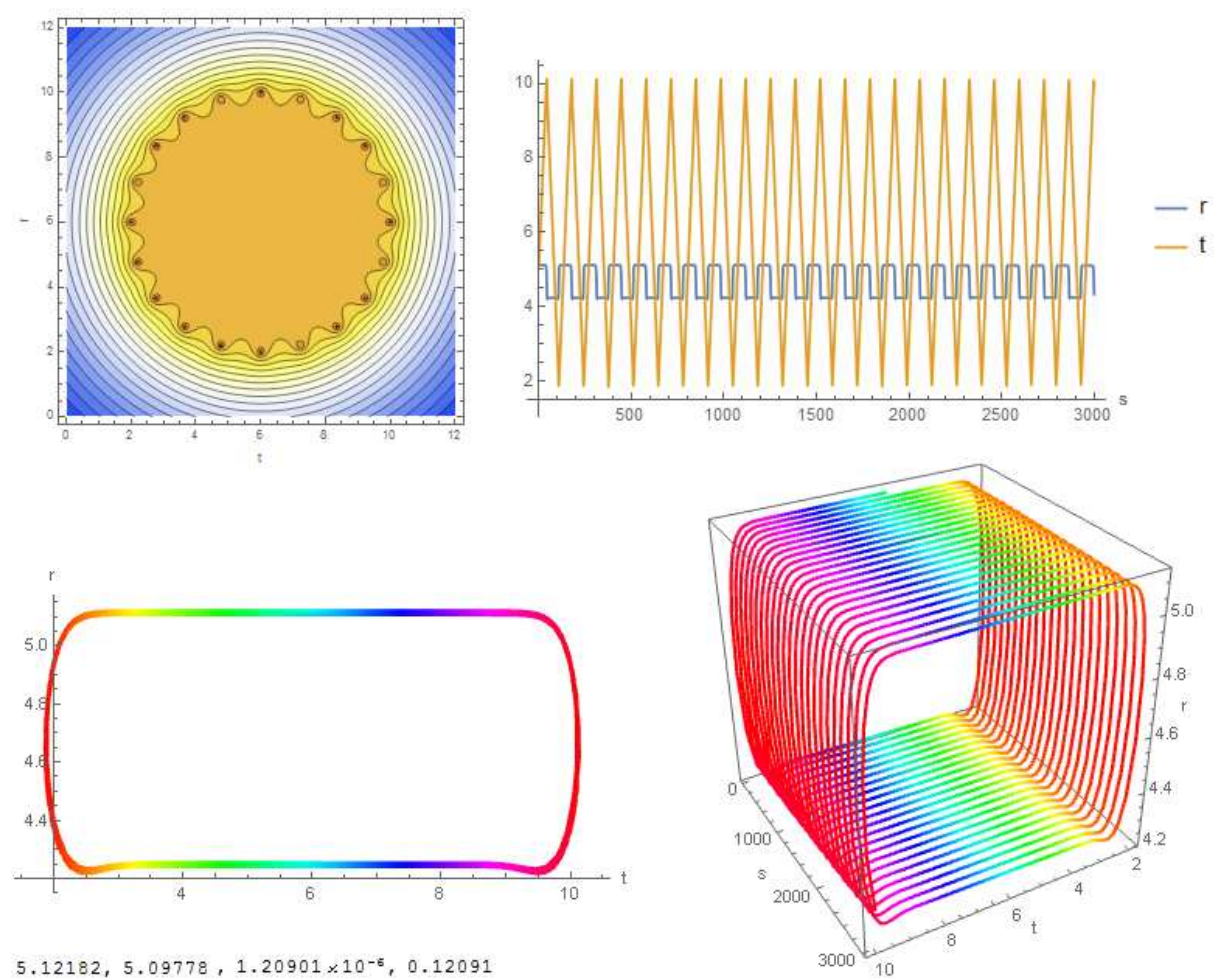


Рис. 3. Линии уровня функции $u(r,t)$, зависимость координат (r,t) от параметра s , траектории плоского и трехмерного движения в 6D в метрике (9) с потенциалом (16) для $N = 20$. Начальная скорость $dr / dt = 10^{-5}$.

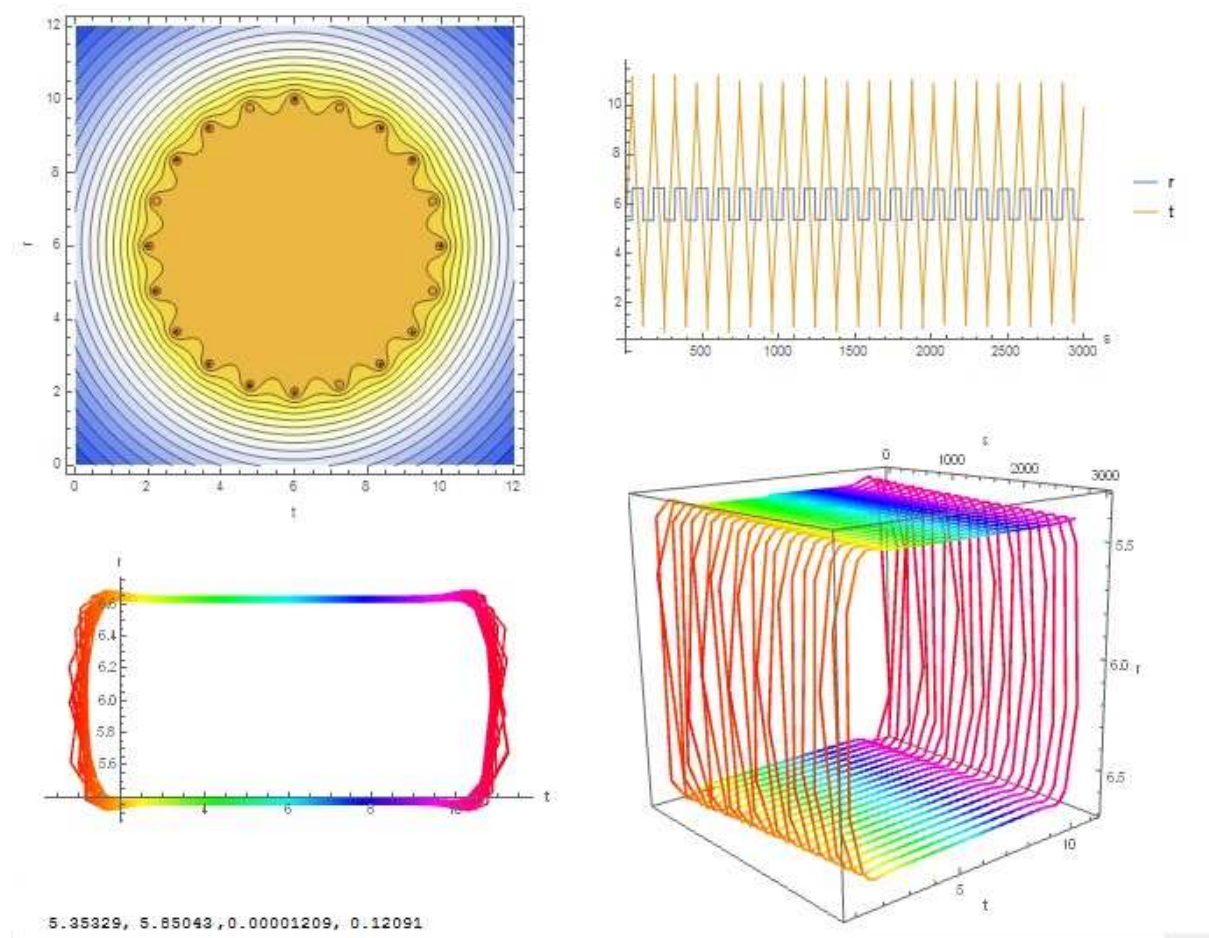


Рис. 4. Линии уровня функции $u(r,t)$, зависимость координат (r,t) от параметра s , траектории плоского и трехмерного движения в $6D$ в метрике (9) с потенциалом (16) для $N = 20$. Начальная скорость $dr / dt = 10^{-4}$.

На рис 3-4 представлены зависимости радиальных координат от параметра s , траектории плоского и трехмерного движения в метрике (9) с потенциалом (16) с числом $N = 20$. Отметим, что в этих примерах 20 центров гравитации расположены равномерно по окружности радиуса 4, описанной вокруг точки $(6,6)$.

Отметим сходство траекторий представленных на рис. 4-5 и на рис. 1-2. Это сходство обусловлено сходством динамических моделей (14) и (15)-(16). В системе уравнений (14) есть особые точки, где $\phi_i \rightarrow 0, \pi$, при

этом $\cot \phi_i \rightarrow \pm\infty$. В системе (15)-(16) этим точкам соответствуют логарифмические особенности функции $u(r,t)$.

В работе [27] было получено решение уравнений поля в общей теории относительности, описывающее метрику галактик и содержащее логарифмическую особенность. Покажем, что в общей теории относительности в четырехмерном пространстве-времени существует решение уравнений поля типа (16).

Аксиально-симметрические поля и метрики галактик

Гравитационные поля, обладающие осевой симметрией, рассматривались в работах [20-21, 27-30] и других. Метрика таких пространств, при некоторых предположениях может быть приведена к виду [20-21]

$$ds^2 = e^\mu dt^2 - e^{-\mu} (e^\nu d\rho^2 + e^\nu dz^2) - e^{-\mu} \rho^2 d\phi^2 \quad (17)$$

Здесь $\mu = \mu(\rho, x^3), \nu = \nu(\rho, x^3)$ - функции, удовлетворяющие уравнениям Эйнштейна, $\rho = \sqrt{x^{1^2} + x^{2^2}}, z = x^3$.

Вычисляя компоненты тензора Эйнштейна $G_{\alpha\beta} = R_{\alpha\beta} - \frac{1}{2}Rg_{\alpha\beta}$ в метрике (17) и полагая для вакуума $G_{\alpha\beta} = R_{\alpha\beta} - \frac{1}{2}Rg_{\alpha\beta} = 0$, находим уравнения поля:

$$\begin{aligned} \omega_1 &= \frac{\partial^2 \mu}{\partial \rho^2} + \frac{1}{\rho} \frac{\partial \mu}{\partial \rho} + \frac{\partial^2 \mu}{\partial x^{3^2}} = 0, \\ \omega_2 &= \frac{\partial \nu}{\partial \rho} - \frac{\rho}{2} \left[\left(\frac{\partial \mu}{\partial \rho} \right)^2 - \left(\frac{\partial \mu}{\partial x^3} \right)^2 \right] = 0, \\ \omega_3 &= \frac{\partial \nu}{\partial x^3} - \rho \frac{\partial \mu}{\partial \rho} \frac{\partial \mu}{\partial x^3} = 0, \\ \omega_4 &= \frac{\partial^2 \nu}{\partial \rho^2} + \frac{\partial^2 \nu}{\partial x^{3^2}} + \frac{1}{2} \left[\left(\frac{\partial \mu}{\partial \rho} \right)^2 + \left(\frac{\partial \mu}{\partial x^3} \right)^2 \right] = 0. \end{aligned} \quad (18)$$

Можно проверить, что не все уравнения (18) являются независимыми и что выполняются следующие два соотношения [20]

$$\omega_4 \equiv \frac{\partial \omega_2}{\partial \rho} + \frac{\partial \omega_3}{\partial x^3} + \rho \omega_1 \frac{\partial \mu}{\partial \rho}, \quad \rho \omega_1 \frac{\partial \mu}{\partial x^3} \equiv \frac{\partial \omega_2}{\partial x^3} - \frac{\partial \omega_3}{\partial \rho} \quad (19)$$

Следовательно, можно в качестве системы уравнений для определения двух функций $\mu = \mu(\rho, x^3), \nu = \nu(\rho, x^3)$ выбрать, например, первое и третье уравнения (18), имеем

$$\begin{aligned} \frac{\partial^2 \mu}{\partial \rho^2} + \frac{1}{\rho} \frac{\partial \mu}{\partial \rho} + \frac{\partial^2 \mu}{\partial x^3{}^2} &= 0, \\ \frac{\partial^2 \nu}{\partial \rho^2} + \frac{\partial^2 \nu}{\partial x^3{}^2} + \frac{1}{2} \left[\left(\frac{\partial \mu}{\partial \rho} \right)^2 + \left(\frac{\partial \mu}{\partial x^3} \right)^2 \right] &= 0. \end{aligned} \quad (20)$$

Отметим, что в нерелятивистском пределе потенциал $\mu = 2\varphi/c^2$, где φ - гравитационный потенциал в теории гравитации Ньютона. Из второго уравнения (20) находим оценку $\nu \sim \mu^2 = 4\varphi^2/c^4$. В галактиках параметр орбитальной скорости и гравитационный потенциал связаны между собой, что позволяет оценить величину $\mu = 2\varphi/c^2 \sim 10^{-6}$. В таком случае в первом приближении можно пренебречь малой величиной $\nu \sim \mu^2 \sim 10^{-12}$. В результате, как и в теории гравитации Ньютона, приходим к уравнению Лапласа для определения гравитационного потенциала.

Рассмотрим уравнение движения тела в гравитационном поле в нерелятивистском приближении, имеем

$$\frac{d\mathbf{v}}{dt} = -\nabla \varphi \quad (21)$$

Условие равновесия тел на круговых орбитах имеет вид

$$\frac{v^2}{\rho} = \frac{\partial \varphi}{\partial \rho} \quad (22)$$

Отсюда находим зависимость потенциала от радиальной координаты

$$\varphi(\rho) = \int_{\rho_0}^{\rho} \frac{v^2}{\rho} d\rho + \varphi_0 \quad (23)$$

Путем обработки данных [31-32] для 50 галактик было установлено, что наилучшее соответствие со всей совокупностью данных получается в том случае, когда зависимость потенциала от радиальной координаты можно представить в форме [27, 30]

$$\varphi(\rho,0) = -\frac{m}{\rho} + a \ln \rho + b\rho^2 + k\rho + \varphi_0 \quad (24)$$

Здесь a, b, k, m, φ_0 - некоторые константы, характеризующие распределение гравитационного потенциала в галактике.

На рис. 5 представлены результаты моделирования распределения гравитационных потенциалов в галактиках NGC 0000, NGC 0253, NGC 0660, NGC 0891 по данным скорости вращения [31-32] согласно (23)-(24). Отметим, что параметры a, b, k, m, φ_0 вычисляются по методу, описанному в [30]. Первые два слагаемых в правой части (24) отвечают условиям в центре галактики, в квадратичный потенциал связан с течением в кластере [33].

Из данных, приведенных на рис. 5, следует, что логарифмический потенциал является составной частью гравитационного потенциала галактик. Прямой проверкой можно убедиться, что потенциал типа (16) удовлетворяет первому уравнению (20), имеем

$$\mu = \sum_{j=1}^N a_j \ln \sqrt{(\rho - \rho_j)^2 + (z - z_j)^2} \quad (25)$$

Для определения траекторий релятивистских частиц используем уравнение (4) в метрике (17) с потенциалом (25). Символы Кристоффеля вычисляются в метрике (17) согласно

$$\begin{aligned} \Gamma_{10}^0 &= \frac{\mu_\rho}{2}, \Gamma_{20}^0 = \frac{\mu_z}{2}, \\ \Gamma_{00}^1 &= \frac{\mu_\rho}{2} e^{2\mu-v}, \Gamma_{11}^1 = \frac{v_\rho - \mu_\rho}{2}, \Gamma_{21}^1 = \frac{v_z - \mu_z}{2}, \Gamma_{22}^1 = \frac{-v_\rho + \mu_\rho}{2}, \Gamma_{33}^1 = \frac{r\mu_\rho - 2}{2} re^{-v}, \\ \Gamma_{00}^2 &= \frac{\mu_z}{2} e^{2\mu-v}, \Gamma_{11}^2 = \frac{-v_z + \mu_z}{2}, \Gamma_{21}^2 = \frac{v_\rho - \mu_\rho}{2}, \Gamma_{22}^2 = \frac{v_z - \mu_z}{2}, \Gamma_{33}^2 = \frac{r^2 \mu_z}{2} e^{-v}, \\ \Gamma_{31}^3 &= \frac{1}{\rho} - \frac{\mu_\rho}{2}, \Gamma_{32}^3 = -\frac{\mu_z}{2} \end{aligned} \quad (26)$$

Здесь индексы 0,1,2,3 соответствуют координатам t, ρ, z, ϕ . Отметим, что производные v_ρ, v_z вычисляются согласно второму и третьему уравнениям (18).

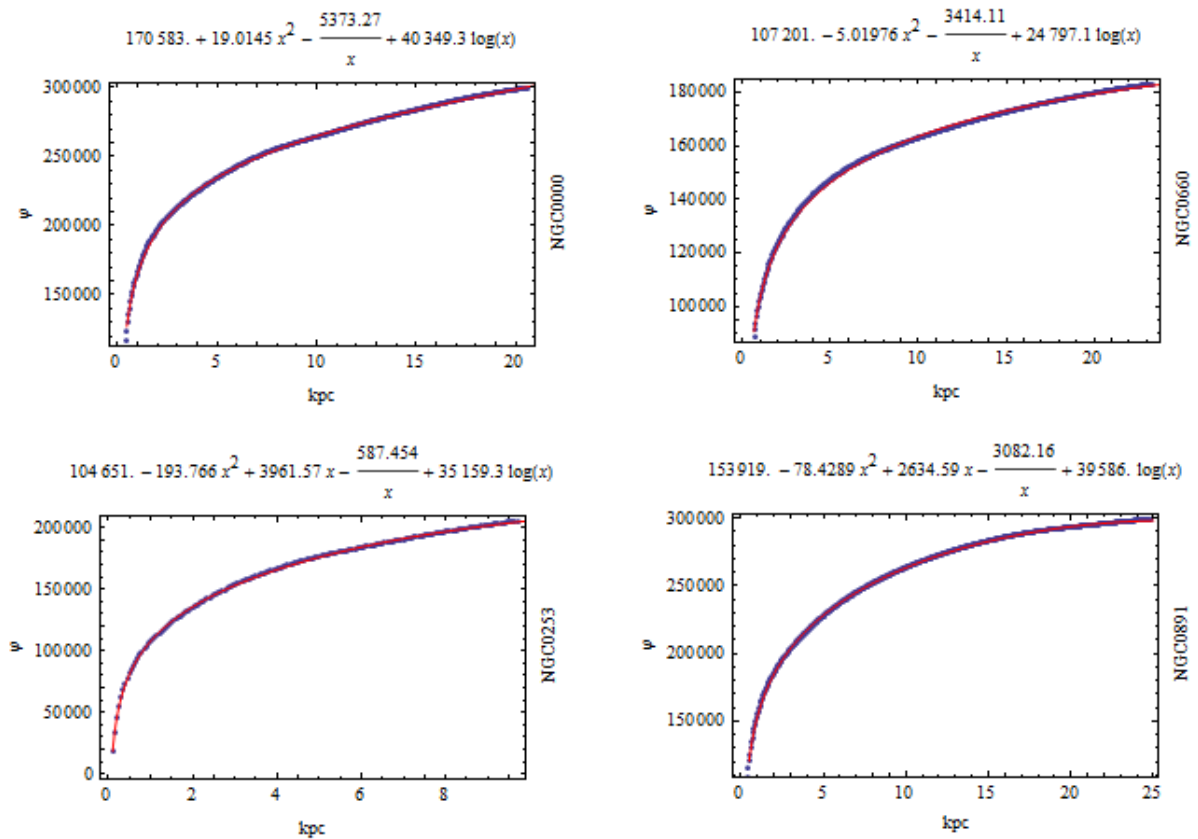


Рис. 5. Зависимость гравитационного потенциала ($\text{км}^2/\text{с}^2$) от радиальной координаты (кпс) в галактиках NGC 0000, NGC 0253, NGC 0660, NGC 0891 по данным [31-32] (точки) и по модели (10) (сплошные линии).

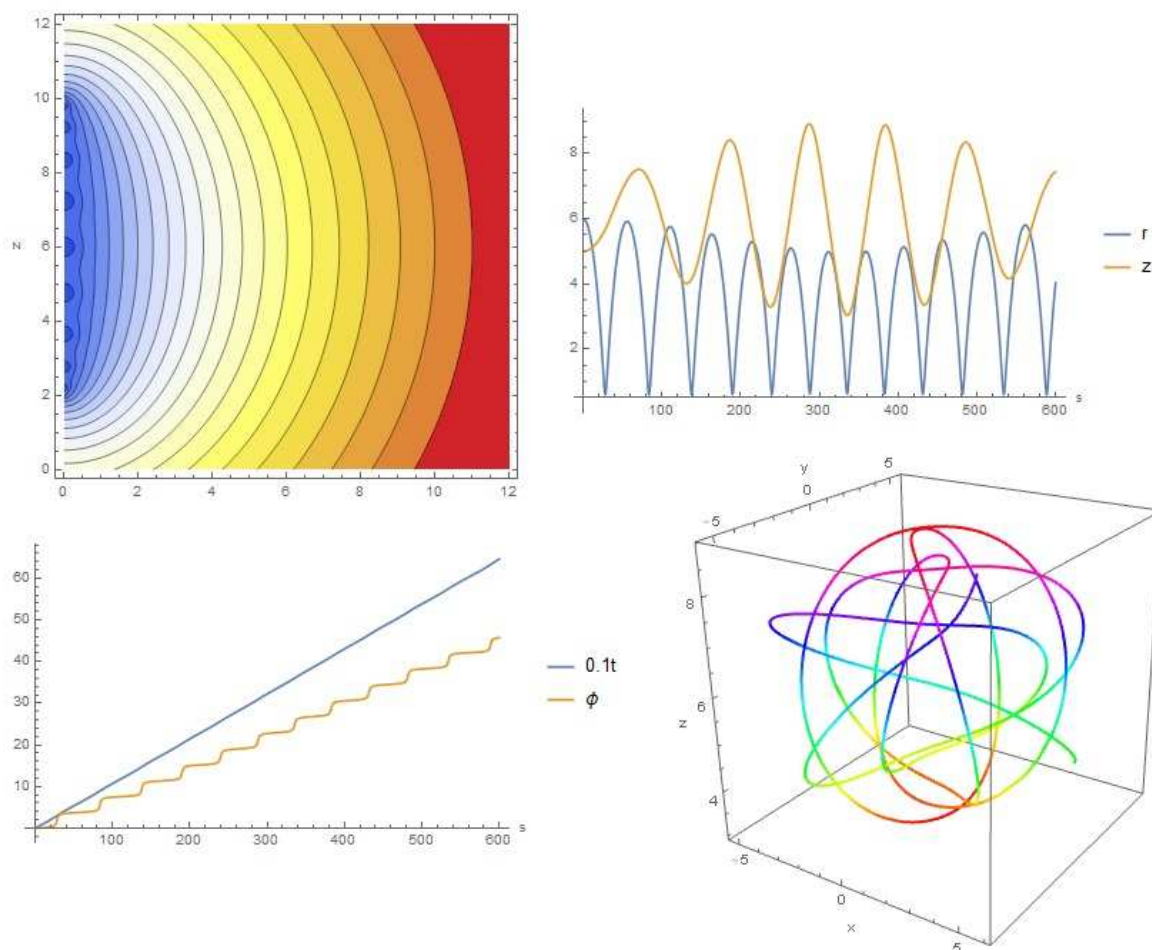


Рис. 6. Линии уровня функции $\mu(r,z)$, зависимость координат (t, r, z, ϕ) от параметра s , траектории трехмерного движения в 4D в метрике (17) с потенциалом (25) с числом источников $N = 20$.

Рассмотрим уравнения движения (4) с коэффициентами аффинной связности (26) в первом приближении по малому параметру $\nu \sim \mu^2 \sim 10^{-12}$, имеем

$$\begin{aligned}
 \frac{d^2 t}{ds^2} + \frac{dt}{ds} \frac{dr}{ds} \frac{\partial \mu}{\partial r} + \frac{dt}{ds} \frac{dz}{ds} \frac{\partial \mu}{\partial z} &= 0, \\
 \frac{d^2 r}{ds^2} - r \phi_s^2 - \frac{dz}{ds} \frac{dr}{ds} \frac{\partial \mu}{\partial z} + \frac{1}{2} (t_s^2 + z_s^2 + r^2 \phi_s^2 - r_s^2) \frac{\partial \mu}{\partial r} &= 0, \\
 \frac{d^2 z}{ds^2} + \frac{dz}{ds} \frac{dr}{ds} \frac{\partial \mu}{\partial r} + \frac{1}{2} (t_s^2 - z_s^2 + r^2 \phi_s^2 + r_s^2) \frac{\partial \mu}{\partial z} &= 0, \\
 \frac{d^2 \phi}{ds^2} = \frac{d\phi}{ds} \frac{dr}{ds} \frac{\partial \mu}{\partial r} + \frac{d\phi}{ds} \frac{dz}{ds} \frac{\partial \mu}{\partial z} - \frac{2}{r} \frac{dr}{ds} &.
 \end{aligned}
 \tag{27}$$

Здесь $r = \rho, t_s = dt / ds, r_s = dr / ds, z_s = dz / ds, \phi_s = d\phi / ds$. Система уравнений (27) решалась численно. На рис. 6 приведены типичные траектории движения частиц в метрике (17) с потенциалом (25), вычисленные для начальных данных:

$$\begin{aligned} a_i &= 0.01, i = 1, \dots, 20; \\ t(0) &= 0, t'(0) = 1., r(0) = 6, r'(0) = 10^{-3}, \\ z(0) &= 5, z'(0) = 10^{-3}, \phi(0) = 0, \phi'(0) = 10^{-2} \end{aligned} \quad (28)$$

Отметим, что траектория движения частицы в 3D заполняет сферу, чем, возможно, объясняется наличие в природе шаровых скоплений. Таким образом, мы показали, что гравитационный потенциал (25), содержащий только логарифмические особенности, может быть центром притяжения звезд, которые в этом случае образуют шаровые скопления.

Аналогия движения на гиперсфере и в 6D, отмеченная выше распространяется также на движение в метрике (17) – рис. 7. Однако в случае движения в 3D в поле с потенциалом (25) с источниками, распределенными по окружности в сечении в плоскости (r, z) , траектории заполняют тор, что объясняется структурой поверхностей равного уровня потенциала $\mu(r, z)$ - рис. 7.

Тем не менее, сохраняется сходство траекторий на гиперсфере и в 3D, образующих своеобразные многоугольники. Это сходство объясняется наличием в моделях движения частиц (14а) и (27) логарифмического потенциала, а также тем, что этих две различные на первый взгляд модели происходят из одного уравнения (4).

Как известно, в квантовой электродинамике широко используются асимптотические формулы с логарифмической асимптотикой, связывающие «затравочный» и истинный заряды и т.п. [34]. В работе [27] была указана связь логарифмического потенциала (25) с законом Ампера в электродинамике. Действительно, компонента векторного потенциала

прямолинейного провода с током на большом удалении от системы ведет себя как логарифмическая функция.

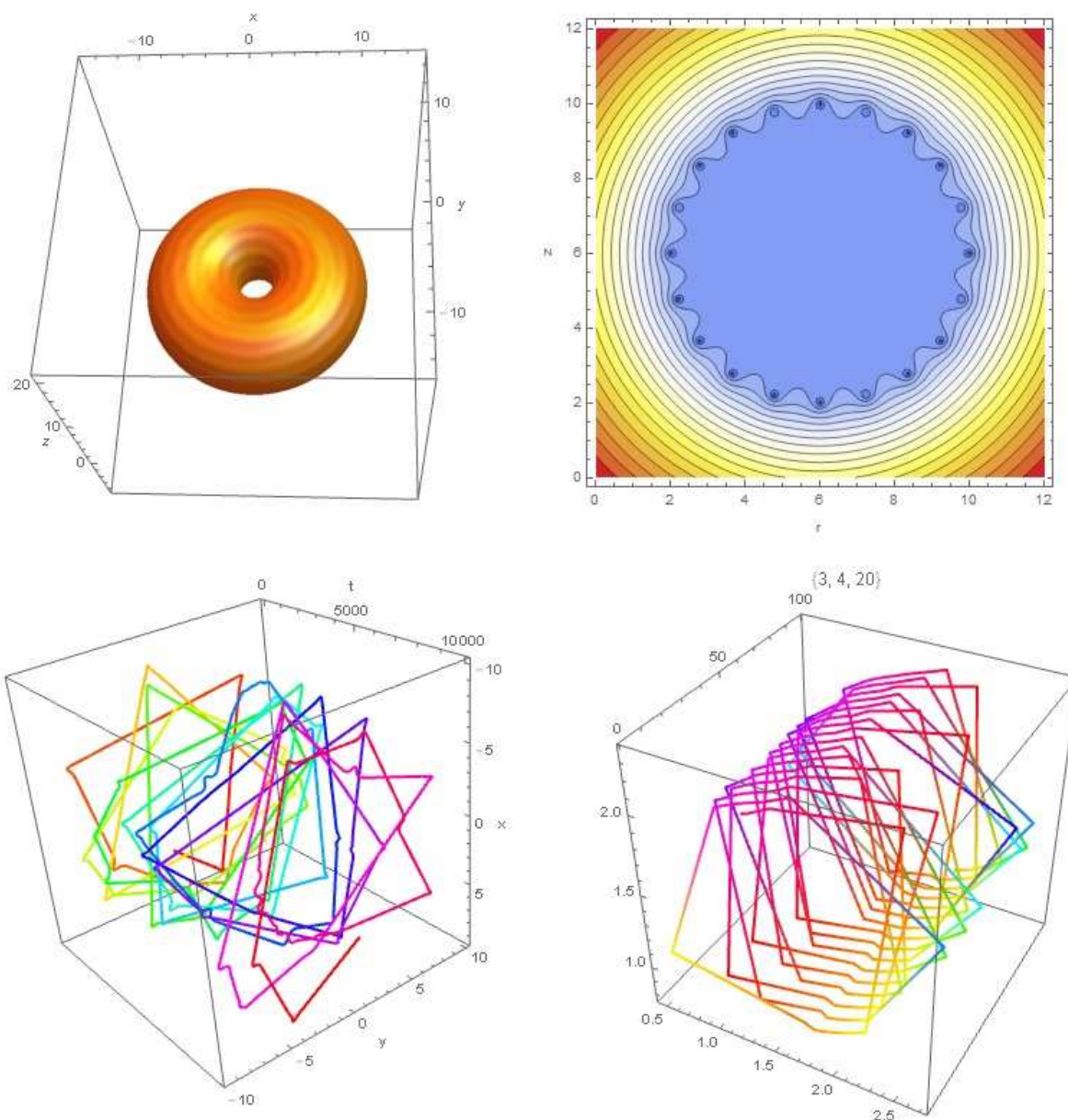


Рис. 7. Поверхности и линии уровня функции $\mu(r,z)$, траектории движения в метрике (17) с потенциалом (25) (внизу слева) и в метрике (5) на гиперсфере с числом углов $N = 20$.

В работе [35] логарифмический потенциал был использован для моделирования структуры электрического заряда. В работах [36-37] и других исследованы варианты логарифмической электродинамики, в

которой функция Лагранжа системы зависит от логарифма линейной комбинации инвариантов электромагнитного поля.

Логарифмический потенциал также используется в теории взаимодействия кварков [38-41]. Все это указывает на особую роль логарифмических потенциалов (16), (25), рассмотренных выше, а также связанных с ними моделей движения релятивистских частиц на гиперсфере в метрике (5), в 6D и в метрике галактик.

Наконец, заметим, что метрика галактик (17) с потенциалом (25) является обобщение метрики Шварцшильда на случай произвольного распределения статически уравновешенных источников. Равновесие в такой системе, как было показано в [27], достигается за счет релятивистских эффектов, обусловленных наличием сингулярных источников и потенциала $\nu(r, z)$, не имеющего классического аналога. Представляется интересным проследить слияние двух источников в метрике (17) с порождением гравитационных волн, типа [42]. Однако решение этой задачи выходит за рамки настоящей работы.

Библиографический список

1. Oppenheimer J.R., Volkoff G.M. On Massive Neutron Cores//Phys. Rev., 55(4), 374-381, 1939.
2. Einstein A., Infeld L. Gravitational Equations and the Problems of Motion //Ann.Math., 1940,41, 455—464;
3. Einstein A., Infeld L. On the Motion of Particles in General Relativity Theory// Canad. J. Math., 1949, 1, 209—241.
4. Chris Quigg. Gauge Theories of the Strong, Weak, and Electromagnetic Interactions. Advanced Book Classics. - Westview Press. ISBN 0-201-32832-1, 1997.
5. Schwartz M. D. Quantum Field Theory and the Standard Model. - Cambridge University Press, 1 ed., 2013.
6. Трунев А.П. Риманова геометрия и единая теория поля в 6D / А.П. Трунев // Политематический сетевой электронный научный журнал Кубанского государственного аграрного университета (Научный журнал КубГАУ) [Электронный ресурс]. – Краснодар: КубГАУ, 2015. – №01(105). С. 161 – 186. – IDA [article ID]: 1051501008. – Режим доступа: <http://ej.kubagro.ru/2015/01/pdf/08.pdf>
7. Kaluza Theodor. Zum Unitätsproblem in der Physik// Sitzungsber. Preuss. Akad. Wiss. Berlin. (Math. Phys.), 966–972. 1921.

8. Einstein A. Zu Kaluzas Theorie des Zusammenhangs von Gravitation und Elektrizitat// Sitzungsber. preuss. Akad. Wiss., phys.-math. Kl., 1927, 23—25; Альберт Эйнштейн. Собрание научных трудов. Т. 2. – М., Наука, 1966, с. 83.
9. Einstein A., Bargmann V., and Bergmann P. On Five-dimensional Representation of Gravitation and Electricity/ Theodore von Karman Anniversary Volume, Pasadena, Calif. Inst. Technol., 1941, 212—225; Альберт Эйнштейн. Собрание научных трудов. Т. 2. – М., Наука, 1966, с. 543.
10. Румер Ю. Б. Исследования по 5-оптике. – М., Гостехиздат, 1956. 152 с.
11. Трунев А.П. Фундаментальные взаимодействия в теории Калуцы-Клейна// Политематический сетевой электронный научный журнал Кубанского государственного аграрного университета (Научный журнал КубГАУ) [Электронный ресурс]. – Краснодар: КубГАУ, 2011. – №07(071). С. 502 – 527. – Шифр Информрегистра: 0421100012\0252, IDA [article ID]: 0711107039. – Режим доступа: <http://ej.kubagro.ru/2011/07/pdf/39.pdf> .
12. Pran Nath. Twenty Years of SUGRA// arXiv:hep-ph/0307123v2, 20 Jul 2003.
13. Bernard de Wit, Jan Louis. Supersymmetry and Dualities in various dimensions// arXiv: hep-th/9801132v2, 18 Feb 1998.
14. Трунев А.П. Супергравитация в 112D / А.П. Трунев // Политематический сетевой электронный научный журнал Кубанского государственного аграрного университета (Научный журнал КубГАУ) [Электронный ресурс]. – Краснодар: КубГАУ, 2016. – №03(117). С. 1263 – 12184. – IDA [article ID]: 1171603082. – Режим доступа: <http://ej.kubagro.ru/2016/03/pdf/82.pdf>
15. Трунев А.П. Теория физических констант и супергравитация в 112D / А.П. Трунев // Политематический сетевой электронный научный журнал Кубанского государственного аграрного университета (Научный журнал КубГАУ) [Электронный ресурс]. – Краснодар: КубГАУ, 2016. – №04(118). Режим доступа: <http://ej.kubagro.ru/2016/04/pdf/78.pdf>
16. Трунев А.П. Единая теория поля и супергравитация в 112D / А.П. Трунев // Политематический сетевой электронный научный журнал Кубанского государственного аграрного университета (Научный журнал КубГАУ) [Электронный ресурс]. – Краснодар: КубГАУ, 2016. – №05(119). С. 1390 – 1419. – IDA [article ID]: 1191605094. – Режим доступа: <http://ej.kubagro.ru/2016/05/pdf/94.pdf>, 1,875 у.п.л.
17. Трунев А.П. Гравитационные волны и квантовая теория Шредингера / А.П. Трунев // Политематический сетевой электронный научный журнал Кубанского государственного аграрного университета (Научный журнал КубГАУ) [Электронный ресурс]. – Краснодар: КубГАУ, 2014. – №02(096). С. 1189 – 1206. – IDA [article ID]: 0961402081. – Режим доступа: <http://ej.kubagro.ru/2014/02/pdf/81.pdf>
18. Трунев А.П. Gravitational waves and quantum theory / А.П. Трунев // Политематический сетевой электронный научный журнал Кубанского государственного аграрного университета (Научный журнал КубГАУ) [Электронный ресурс]. – Краснодар: КубГАУ, 2014. – №02(096). С. 1146 – 1161. – IDA [article ID]: 0961402078. – Режим доступа: <http://ej.kubagro.ru/2014/02/pdf/78.pdf>
19. Трунев А.П. Геометрическая турбулентность и квантовая теория. – Palmarium Academic Publishing, ISBN 978-3-639-72485-1, 2015, 232 с.
20. Petrov A.Z. New methods in general relativity. - Moscow: Nauka, 1966.

21. Hans Stephani, Dietrich Kramer, Malcolm MacCallum, Cornelius Hoenselaers, Eduard Herltet. *Exact Solutions to Einstein's Field Equations*. Second Edition. Cambridge University Press. ISBN 0-521-46136-7, 2003.
22. Landau L.D., Lifshitz E.M. *The Classical Theory of Fields*. Vol. 2 (3rd ed.). - Pergamon Press, ISBN 978-0-08-016019-1, 1971.
23. Трунев А.П. Электрический заряд в 6D / А.П. Трунев // Политематический сетевой электронный научный журнал Кубанского государственного аграрного университета (Научный журнал КубГАУ) [Электронный ресурс]. – Краснодар: КубГАУ, 2014. – №10(104). С. 2154 – 2177. – IDA [article ID]: 1041410152. – Режим доступа: <http://ej.kubagro.ru/2014/10/pdf/152.pdf>
24. Трунев А.П. Моделирование нелинейных цветовых колебаний в теории Янга-Миллса // Политематический сетевой электронный научный журнал Кубанского государственного аграрного университета (Научный журнал КубГАУ) [Электронный ресурс]. – Краснодар: КубГАУ, 2015. – №06(110). С. 1654 – 1673. – IDA [article ID]: 1101506108. – Режим доступа: <http://ej.kubagro.ru/2015/06/pdf/108.pdf>
25. Hai Lin, Baosen Wu, Shing-Tung Yau. *Heterotic String Compactification and new Vector Bundles*// arXiv:1412.8000v1 [hep-th] 26 Dec 2014.
26. Braun V, Candelas P., Davies R. *A Three-Generation Calabi-Yau Manifold with Small Hodge Numbers*// arXiv:0910.5464v1, 28 Oct, 2009.
27. Трунев А.П. Динамика релятивистских частиц в метрике галактик / А.П. Трунев // Политематический сетевой электронный научный журнал Кубанского государственного аграрного университета (Научный журнал КубГАУ) [Электронный ресурс]. – Краснодар: КубГАУ, 2016. – №02(116). С. 1619 – 1641. – IDA [article ID]: 1161602101. – Режим доступа: <http://ej.kubagro.ru/2016/02/pdf/101.pdf>
28. Weyl H., *Zur Gravitationstheorie*, Ann. Phys. 54, 1917; Weyl H., *Bemerkung uber die axialsymmetrischen Losungen der Einsteinschen Gravitationsgleichungen*, Ann. Phys. 59, 1919.
29. Levi-Civita T. *ds2 Einsteiniani in campi Newtoniani*, Atti Accad. Naz. dei Lincei 27, fasc. 7—8, Roma, 1918; *ds2 Einsteiniani in campi Newtoniani*, Atti Accad. Naz. Lincei 28, 1919.
30. Трунев А.П. Общая теория относительности и метрика галактик / А.П. Трунев // Политематический сетевой электронный научный журнал Кубанского государственного аграрного университета (Научный журнал КубГАУ) [Электронный ресурс]. – Краснодар: КубГАУ, 2013. – №10(094). С. 360 – 384. – IDA [article ID]: 0941310027. – Режим доступа: <http://ej.kubagro.ru/2013/10/pdf/27.pdf>
31. Yoshiaki Sofue and Vera Rubin. *Rotation Curves of Spiral Galaxies*// Ann. Rev. Astron. Astrophys. 39 (2001) 137-174.
32. Sofue Y. 1999. Publ. Astron. Soc. Japan. 51:445// <http://www.ioa.s.u-tokyo.ac.jp/~sofue/h-rot.htm>
33. Трунев А.П. Метрика местного суперкластера галактик и общая теория относительности / А.П. Трунев // Политематический сетевой электронный научный журнал Кубанского государственного аграрного университета (Научный журнал КубГАУ) [Электронный ресурс]. – Краснодар: КубГАУ, 2013. – №10(094). С. 893 – 916. – IDA [article ID]: 0941310061. – Режим доступа: <http://ej.kubagro.ru/2013/10/pdf/61.pdf>
34. Ландау Л.Д., Лифшиц Е.М. *Теоретическая физика: Учебное пособие*. В 10 т. Т. IV/В.Б. Берестецкий, Е.М. Лифшиц, Л.П. Питаевский. Квантовая

- электродинамика. – 3-е изд., испр. – М.: Наука, Гл. Ред. Физ.-мат. Лит., 1989, - 728 с.
35. Dzhunushaliev V., Zloshchastiev K. G. Singularity-free model of electric charge in physical vacuum: Non-zero spatial extent and mass generation// arXiv: 1204.6380v5, 27 Mar, 2013.
 36. Patricio Gaete, Jose Helayël-Neto. Finite Field-Energy and Inter particle Potential in Logarithmic Electrodynamics// Eur. Phys. J., C 74, 2816, 2014.
 37. Kruglov S.I. On Generalized Logarithmic Electrodynamics//arXiv:1411.7741v3, 8 Feb, 2015.
 38. Quigg C., Rosner Jonathan L. Quarkonium level spacings//Physics Letters B, Volume 71, Issue 1, p. 153-157.
 39. Khelashvili A. A., Khmaladze V. Yu., Chachava N. D. Many-particle problem with logarithmic potentials and its application to quark bound states// Theoretical and Mathematical Physics, January 1985, Volume 62, Issue 1, pp 90-95.
 40. Киселев В.В., Лиходеев А.К. Барионы с двумя тяжелыми кварками//УФН, Том 172, №5, 2002.
 41. Patricio Gaete. On finite interquark potential in $D = 3$ driven by minimal length//arXiv: 1407.0407v1, 1 Jul 2014.
 42. Abbott B.P. et al. Observation of Gravitational Waves from a Binary Black Hole Merger// Phys. Rev. Let., PRL 116, 061102, 12 Feb., 2016.

References

1. Oppenheimer J.R., Volkoff G.M. On Massive Neutron Cores//Phys. Rev., 55(4), 374-381, 1939.
2. Einstein A., Infeld L. Gravitational Equations and the Problems of Motion //Ann.Math., 1940,41, 455—464;
3. Einstein A., Infeld L. On the Motion of Particles in General Relativity Theory// Canad. J. Math., 1949, 1, 209—241.
4. Chris Quigg. Gauge Theories of the Strong, Weak, and Electromagnetic Interactions. Advanced Book Classics. - Westview Press. ISBN 0-201-32832-1, 1997.
5. Schwartz M. D. Quantum Field Theory and the Standard Model. - Cambridge University Press, 1 ed., 2013.
6. Trunev A.P. Rimanova geometrija i edinaja teorija polja v 6D / A.P. Trunev // Politematiceskij setevoj jelektronnyj nauchnyj zhurnal Kubanskogo gosudarstvennogo agrarnogo universiteta (Nauchnyj zhurnal KubGAU) [Jelektronnyj resurs]. – Krasnodar: KubGAU, 2015. – №01(105). S. 161 – 186. – IDA [article ID]: 1051501008. – Rezhim dostupa: <http://ej.kubagro.ru/2015/01/pdf/08.pdf>
7. Kaluza Theodor. Zum Unitätsproblem in der Physik// Sitzungsber. Preuss. Akad. Wiss. Berlin. (Math. Phys.), 966–972. 1921.
8. Einstein A. Zu Kaluzas Theorie des Zusammenhangs von Gravitation und Elektrizitat// Sitzungsber. preuss. Akad. Wiss., phys.-math. Kl., 1927, 23—25; Al'bert Jejnshstejn. Sobranie nauchnyh trudov. T. 2. – M., Nauka, 1966, s. 83.
9. Einstein A., Bargmann V., and Bergmann P. On Five-dimensional Representation of Gravitation and Electricity/ Theodore von Karman Anniversary Volume, Pasadena, Calif. Inst. Technol., 1941, 212—225; Al'bert Jejnshstejn. Sobranie nauchnyh trudov. T. 2. – M., Nauka, 1966, s. 543.
10. Rumer Ju. B. Issledovanija po 5-optike. – M., Gostehizdat, 1956. 152 s.
11. Trunev A.P. Fundamental'nye vzaimodejstvija v teorii Kalucy-Klejna// Politematiceskij setevoj jelektronnyj nauchnyj zhurnal Kubanskogo gosudarstvennogo

- agrarnogo universiteta (Nauchnyj zhurnal KubGAU) [Jelektronnyj resurs]. – Krasnodar: KubGAU, 2011. – №07(071). S. 502 – 527. – Shifr Informregistra: 0421100012/0252, IDA [article ID]: 0711107039. – Rezhim dostupa: <http://ej.kubagro.ru/2011/07/pdf/39.pdf> .
12. Pran Nath. Twenty Years of SUGRA// arXiv:hep-ph/0307123v2, 20 Jul 2003.
13. Bernard de Wit, Jan Louis. Supersymmetry and Dualities in various dimensions// arXiv: hep-th/9801132v2, 18 Feb 1998.
14. Trunev A.P. Supergravitacija v 112D / A.P. Trunev // Politematiceskij setevoj jelektronnyj nauchnyj zhurnal Kubanskogo gosudarstvennogo agrarnogo universiteta (Nauchnyj zhurnal KubGAU) [Jelektronnyj resurs]. – Krasnodar: KubGAU, 2016. – №03(117). S. 1263 – 12184. – IDA [article ID]: 1171603082. – Rezhim dostupa: <http://ej.kubagro.ru/2016/03/pdf/82.pdf>
15. Trunev A.P. Teorija fiziceskih konstant i supergravitacija v 112D / A.P. Trunev // Politematiceskij setevoj jelektronnyj nauchnyj zhurnal Kubanskogo gosudarstvennogo agrarnogo universiteta (Nauchnyj zhurnal KubGAU) [Jelektronnyj resurs]. – Krasnodar: KubGAU, 2016. – №04(118). Rezhim dostupa: <http://ej.kubagro.ru/2016/04/pdf/78.pdf>
16. Trunev A.P. Edinaja teorija polja i supergravitacija v 112D / A.P. Trunev // Politematiceskij setevoj jelektronnyj nauchnyj zhurnal Kubanskogo gosudarstvennogo agrarnogo universiteta (Nauchnyj zhurnal KubGAU) [Jelektronnyj resurs]. – Krasnodar: KubGAU, 2016. – №05(119). S. 1390 – 1419. – IDA [article ID]: 1191605094. – Rezhim dostupa: <http://ej.kubagro.ru/2016/05/pdf/94.pdf>, 1,875 u.p.l.
17. Trunev A.P. Gravitacionnye volny i kvantovaja teorija Shredingera / A.P. Trunev // Politematiceskij setevoj jelektronnyj nauchnyj zhurnal Kubanskogo gosudarstvennogo agrarnogo universiteta (Nauchnyj zhurnal KubGAU) [Jelektronnyj resurs]. – Krasnodar: KubGAU, 2014. – №02(096). S. 1189 – 1206. – IDA [article ID]: 0961402081. – Rezhim dostupa: <http://ej.kubagro.ru/2014/02/pdf/81.pdf>
18. Trunev A.P. Gravitational waves and quantum theory / A.P. Trunev // Politematiceskij setevoj jelektronnyj nauchnyj zhurnal Kubanskogo gosudarstvennogo agrarnogo universiteta (Nauchnyj zhurnal KubGAU) [Jelektronnyj resurs]. – Krasnodar: KubGAU, 2014. – №02(096). S. 1146 – 1161. – IDA [article ID]: 0961402078. – Rezhim dostupa: <http://ej.kubagro.ru/2014/02/pdf/78.pdf>
19. Trunev A.P. Geometricheskaja turbulentsnost' i kvantovaja teorija. – Palmarium Academic Publishing, ISBN 978-3-639-72485-1, 2015, 232 s.
20. Petrov A.Z. New methods in general relativity. - Moscow: Nauka, 1966.
21. Hans Stephani, Dietrich Kramer, Malcolm MacCallum, Cornelius Hoenselaers, Eduard Herltet. Exact Solutions to Einstein's Field Equations. Second Edition. Cambridge University Press. ISBN 0-521-46136-7, 2003.
22. Landau L.D., Lifshitz E.M. The Classical Theory of Fields. Vol. 2 (3rd ed.). - Pergamon Press, ISBN 978-0-08-016019-1, 1971.
23. Trunev A.P. Jelektricheskiy zarjad v 6D / A.P. Trunev // Politematiceskij setevoj jelektronnyj nauchnyj zhurnal Kubanskogo gosudarstvennogo agrarnogo universiteta (Nauchnyj zhurnal KubGAU) [Jelektronnyj resurs]. – Krasnodar: KubGAU, 2014. – №10(104). S. 2154 – 2177. – IDA [article ID]: 1041410152. – Rezhim dostupa: <http://ej.kubagro.ru/2014/10/pdf/152.pdf>
24. Trunev A.P. Modelirovanie nelinejnyh cvetovyh kolebanij v teorii Janga-Millsa // Politematiceskij setevoj jelektronnyj nauchnyj zhurnal Kubanskogo gosudarstvennogo agrarnogo universiteta (Nauchnyj zhurnal KubGAU) [Jelektronnyj resurs]. – Krasnodar: KubGAU, 2015. – №06(110). S. 1654 – 1673. – IDA [article ID]: 1101506108. – Rezhim dostupa: <http://ej.kubagro.ru/2015/06/pdf/108.pdf>
25. Hai Lin, Baosen Wu, Shing-Tung Yau. Heterotic String Compactification and new Vector Bundles// arXiv:1412.8000v1 [hep-th] 26 Dec 2014.

26. Braun V, Candelas P., Davies R. A Three-Generation Calabi-Yau Manifold with Small Hodge Numbers// arXiv:0910.5464v1, 28 Oct, 2009.
27. Trunев A.P. Dinamika reljativistskih chastic v metrike galaktik / A.P. Trunев // Politematicheskij setevoj jelektronnyj nauchnyj zhurnal Kubanskogo gosudarstvennogo agrarnogo universiteta (Nauchnyj zhurnal KubGAU) [Jelektronnyj resurs]. – Krasnodar: KubGAU, 2016. – №02(116). S. 1619 – 1641. – IDA [article ID]: 1161602101. – Rezhim dostupa: <http://ej.kubagro.ru/2016/02/pdf/101.pdf>
28. Weyl H., Zur Gravitationstheorie, Ann. Phys. 54, 1917; Weyl H., Bemerkung uber die axialsymmetrischen Losungen der Einsteinschen Gravitationsgleichungen, Ann. Phys. 59, 1919.
29. Levi-Sivita T. ds2 Einsteiniani in campi Newtoniani, Atti Accad. Naz. dei Lincei 27, fasc. 7—8, Roma, 1918; ds2 Einsteiniani in campi Newtoniani, Atti Accad. Naz. Lincei 28, 1919.
30. Trunев A.P. Obshhaja teorija odnositel'nosti i metrika galaktik / A.P. Trunев // Politematicheskij setevoj jelektronnyj nauchnyj zhurnal Kubanskogo gosudarstvennogo agrarnogo universiteta (Nauchnyj zhurnal KubGAU) [Jelektronnyj resurs]. – Krasnodar: KubGAU, 2013. – №10(094). S. 360 – 384. – IDA [article ID]: 0941310027. – Rezhim dostupa: <http://ej.kubagro.ru/2013/10/pdf/27.pdf>
31. Yoshiaki Sofue and Vera Rubin. Rotation Curves of Spiral Galaxies// Ann. Rev. Astron. Astrophys. 39 (2001) 137-174.
32. Sofue Y. 1999. Publ. Astron. Soc. Japan. 51:445// <http://www.ioa.s.u-tokyo.ac.jp/~sofue/h-rot.htm>
33. Trunев A.P. Metrika mestnogo superklastera galaktik i obshhaja teorija odnositel'nosti / A.P. Trunев // Politematicheskij setevoj jelektronnyj nauchnyj zhurnal Kubanskogo gosudarstvennogo agrarnogo universiteta (Nauchnyj zhurnal KubGAU) [Jelektronnyj resurs]. – Krasnodar: KubGAU, 2013. – №10(094). S. 893 – 916. – IDA [article ID]: 0941310061. – Rezhim dostupa: <http://ej.kubagro.ru/2013/10/pdf/61.pdf>
34. Landau L.D., Lifshic E.M. Teoreticheskaja fizika: Uchebnoe posobie. V 10 t. T. IV/V.B. Beresteckij, E.M. Lifshic, L.P. Pitaevskij. Kvantovaja jelektrodinamika. – 3-e izd., ispr. – M.: Nauka, Gl. Red. Fiz.-mat. Lit., 1989, - 728 s.
35. Dzhunushaliev V., Zloshchastiev K. G. Singularity-free model of electric charge in physical vacuum: Non-zero spatial extent and mass generation// arXiv: 1204.6380v5, 27 Mar, 2013.
36. Patricio Gaete, Jose Helayjol-Neto. Finite Field-Energy and Inter particle Potential in Logarithmic Electrodynamics// Eur. Phys. J., C 74, 2816, 2014.
37. Kruglov S.I. On Generalized Logarithmic Electrodynamics//arXiv:1411.7741v3, 8 Feb, 2015.
38. Quigg C., Rosner Jonathan L. Quarkonium level spacings//Physics Letters B, Volume 71, Issue 1, p. 153-157.
39. Khelashvili A. A., Khmaladze V. Yu., Chachava N. D. Many-particle problem with logarithmic potentials and its application to quark bound states// Theoretical and Mathematical Physics, January 1985, Volume 62, Issue 1, pp 90-95.
40. Kiselev V.V., Lihodeev A.K. Bariony s dvumja tjazhelymi kvarkami//UFN, Tom 172, №5, 2002.
41. Patricio Gaete. On finite interquark potential in $D = 3$ driven by minimal length//arXiv: 1407.0407v1, 1 Jul 2014.
42. Abbott B.P. et al. Observation of Gravitational Waves from a Binary Black Hole Merger// Phys. Rev. Let., PRL 116, 061102, 12 Feb., 2016.