УДК 519.612.4: 519.865: 331.554

01.00.00 Физико-математические науки

ЧИСЛЕННЫЙ АЛГОРИТМ В ЗАДАЧЕ САМООРГАНИЗАЦИИ ТРУДОВЫХ РЕСУРСОВ

Невечеря Артём Павлович
аспирант
Кубанский государственный университет, Краснодар, Россия

Предложен численный алгоритм решения задачи самоорганизации трудовых ресурсов. Под этой задачей подразумевается задача отыскания вероятностей устройства и увольнения специалистов в определённых отраслях внутри исследуемого рынка труда. При этом используется математическая модель динамики трудовых ресурсов. Полученная задача является некорректной, так как уравнений в системе, описывающей данную задачу, меньше, чем неизвестных. Разработанный с учётом предметной области алгоритм, позволяет гарантированно найти нормальное решение за конечное число итераций. Сам алгоритм поделён на два ключевых этапа. Изначально модифицированным методом Гаусса для недоопределённых систем находится безусловное нормальное решение поставленной задачи. В дальнейшем найденное решение проецируется в подпространство допустимых значений, после чего с помощью метода проекции градиентов находится нормальное решение задачи с учётом условий неотрицательности искомых значений. Предложенный алгоритм был успешно использован при разработке в среде программирования C++ приложения, ориентированного на решение задачи самоорганизации трудовых ресурсов. Сравнительный анализ быстродействия данного приложения и надстройки «Поиск решений» табличного процессора MS Excel показал, что одна и та же задача в реализованном автором приложении решается значительно быстрее, чем в табличном процессоре MS Excel при использовании указанной надстройки, что свидетельствует о высокой эффективности предложенного в данной работе алгоритма

Ключевые слова: РЫНОК ТРУДА, САМООРГАНИЗАЦИЯ, ДИНАМИКА ТРУДОВЫХ РЕСУРСОВ, ЧИСЛЕННЫЙ АЛГОРИТМ, МЕТОД ПРОЕКЦИИ ГРАДИЕНТА

UDC 519.612.4: 519.865: 331.554

Physical and mathematical sciences

A NUMERICAL ALGORITHM IN THE PROBLEM OF SELF-ORGANIZATION OF LABOR RESOURCES

Nevecherja Artjom Pavlovich
postgraduate student
Kuban State University, Krasnodar, Russia

In this article, there is a numerical method of solving the problem of self-organization of the labor resources. The problem deals with finding probabilities of hiring and the layoffs of specialists from the sectors of the labor market. A mathematical model of labor resources dynamics is used to solve this problem. The initial problem is incorrect, because number of equations of the descriptive system is less than number of unknown variables. A special algorithm is designed for guaranteed finding the normal solution in finite number of iterations. The algorithm is separated into two key stages. Initially, unconditional normal solution of the problem is found by applying the modified method of Gauss for underdetermined systems. Later, this solution is projected in the subspace of permissible values. After that, the normal solution of the problem with consideration of non-negativity of the desired values is being found by using the gradient projection method. The proposed algorithm has been successfully used to develop application in programming environment C++. This application is focused on solving of the problem of self-organization of the labor resources. Comparative analysis of speed of the application and add-ins MS Excel "Solver" showed that the same problem is solved much faster in the application designed by the author than in a table processor MS Excel when using the add-in "Solver". This demonstrates the high efficiency of the proposed method

Keywords: LABOR MARKET, SELF-ORGANIZATION, DYNAMICS OF LABOR RESOURCES, NUMERICAL ALGORITHM, GRADIENT PROJECTION METHOD

Введение

Задача самоорганизации трудовых ресурсов сводится к отысканию вероятностей устройства и увольнения работников на исследуемом рынке труда. На данный момент уже существует несколько подходов к решению этой задачи [1–3]. Ранее [4] автором была предложена математическая модель самоорганизации трудовых ресурсов, с помощью которой на основе статистических данных о количестве занятых и безработных, предоставляемых Федеральной службой государственной статистики [5], можно решать одну из актуальных задач современной межотраслевой экономики – задачу прогнозирования динамики трудовых ресурсов. Для решения этой задачи необходимы значения вероятностей динамики трудовых ресурсов за исследуемый промежуток времени. Для подсчёта вероятностей использовалась надстройка «Поиск решений» табличного процессора MS Excel. Получаемые результаты вычислений имели минимальную невязку, тем не менее, допустимая размерность задачи являлась ограниченной (не более 10-ти отраслей), время вычислений превосходило 30 минут.

В связи с этим возникла необходимость в разработке алгоритма, способного обойти указанное ограничение для рассматриваемой задачи.

В данной работе предложен численный алгоритм решения задачи самоорганизации трудовых ресурсов.

1. Математическая модель самоорганизации трудовых ресурсов

Балансовая математическая модель самоорганизации трудовых ресурсов выглядит следующим образом [4]:

$$N_1^{(i)}(t+1) = N_1^{(i)}(t) + \sum_{j=1}^{n} N_2^{(j)}(t) \cdot P_1^{(j,i)}(t) + \left[\Delta N_2^{(0)}(t) + N_2^{(0)}(t)\right] \cdot P_1^{(0,i)}(t) -$$

$$-N_1^{(i)}(t)\cdot\left[P_2^{(i)}(t)+P_3^{(i,n+1)}(t)\right],\quad i=\overline{1,n}, \tag{1}$$

$$N_2^{(i)}(t+1)=N_2^{(i)}(t)+N_1^{(i)}(t)\cdot P_2^{(i)}(t)-N_2^{(i)}(t)\cdot\sum_{j=1}^{n+1}P_1^{(i,j)}(t),\quad i=\overline{1,n}, \tag{2}$$

$$N_2^{(0)}(t+1)=N_2^{(0)}(t)+\Delta N_2^{(0)}(t)-\left[\Delta N_2^{(0)}(t)+N_2^{(0)}(t)\right]\cdot\sum_{j=1}^{n+1}P_1^{(0,j)}(t), \tag{3}$$

$$0\le P_2^{(i)}(t)\le 1,\quad i=\overline{1,n}, \tag{4}$$

$$0\le P_3^{(i,n+1)}(t)\le 1,\quad i=\overline{1,n}, \tag{5}$$

$$P_1^{(i,j)}(t)\ge 0,\quad i=\overline{0,n},\quad j=\overline{1,n+1}. \tag{6}$$

$$\sum_{j=1}^{n+1}P_1^{(i,j)}(t)\le 1,\quad i=\overline{0,n}. \tag{7}$$

Здесь t – номер года, n – количество отраслей на исследуемом рынке труда. Количественные величины: $N_1^{(i)}(t)$ – количество занятых в i-ой отрасли; $N_2^{(i)}(t)$ – количество безработных, последнее место работы которых было в i-ой отрасли; $N_2^{(0)}(t)$ – количество безработных, которые ранее не имели занятости на исследуемом рынке труда, $i=\overline{1,n}$; $\Delta N_2^{(0)}(t)$ – экзогенная величина, показывающая прирост трудоспособного населения в рассматриваемый период времени. По этим количественным величинам имеется ежегодная статистика, либо их можно по данной статистике оценить [2]. Вероятностные величины: $P_1^{(j,i)}(t)$ – вероятность того, что безработный, последнее место работы которого было в j-ой отрасли, найдёт работу в i-ой отрасли; $P_2^{(i)}(t)$ – вероятность того, что специалист, работающий в i-ой отрасли, будет уволен; $P_1^{(0,i)}(t)$ – вероятность того, что безработный, не имевший занятости на исследуемом рынке труда с момента последнего появления на данном рынке, найдёт работу в i-ой отрасли; $P_1^{(i,n+1)}(t)$ – вероятность того, что безработный, последнее место работы которого было в *i*-ой отрасли, покинет рынок труда; $P_1^{(0,n+1)}(t)$ – вероятность того, что безработный, ранее нигде не занятый на исследуемом рынке труда, покинет данный рынок; $P_3^{(i,n+1)}(t)$ – вероятность того, что специалист, работающий в момент времени *t* в *i*-ой отрасли, покинет рынок труда.

Представим математическую модель (1) – (7) в векторном виде. Для этого введём дополнительные понятия: $P_1^{(i,n+2)}(t)$ – вероятность того, что безработный, последнее место работы которого было в *i*-ой отрасли, за период времени $(t,t+1)$ останется безработным; $P_3^{(i,i)}(t)$ – вероятность того, что специалист, занятый в *i*-ой отрасли в момент времени *t*, в момент времени $t+1$ также будет занят в *i*-ой отрасли. Тогда справедливо следующее:

$$N = A \cdot P, \tag{9}$$

$$P \geq 0. \tag{10}$$

Здесь *N* следующий вектор:

$$N = \left(\tilde{N}, \underbrace{1,\ldots,1}_{2n+1} \right)^T, \tag{11}$$

где

$$\tilde{N} = \left(\Delta_1^1, \Delta_1^2, \ldots, \Delta_1^n, \Delta_2^1, \ldots, \Delta_2^n, \Delta_2^0 \right)^T,$$

$$\Delta_1^i = N_1^{(i)}(t+1) - N_1^{(i)}(t), \quad i = \overline{1,n},$$

$$\Delta_2^i = N_2^{(i)}(t+1) - N_2^{(i)}(t), \quad i = \overline{1,n}.$$

$$\Delta_2^0 = N_2^{(0)}(t+1) - N_2^{(0)}(t) - \Delta N_2^{(0)}(t).$$

Вектор *P* представляется следующим образом:

$$P=\left(\tilde{P},P_3^{(1,n+1)}(t),...,P_3^{(n,n+1)}(t),P_3^{(1,1)}(t),...,P_3^{(n,n)}(t)\right)^T, \qquad (12)$$

где

$$\tilde{P}=\left(P_1^{(0,1)}(t),...,P_1^{(0,n+2)}(t),...,P_1^{(n,1)}(t),...,P_1^{(n,n+2)}(t),P_2^{(1)}(t),...,P_2^{(n)}(t)\right)^T.$$

Матрица A определяется видом векторов N и P:

$$A=\begin{pmatrix} A_{1,1} & A_{1,2} & A_{1,3} & A_{1,4} \\ A_{2,1} & A_{2,2} & A_{2,3} & A_{2,4} \\ A_{3,1} & A_{3,2} & A_{3,3} & A_{3,4} \end{pmatrix},$$

где

$$\underset{(n+1)\times(n+2)}{A_{1,1}}=\begin{pmatrix} A_{1,1}^{(0)} & A_{1,1}^{(1)} & \cdots & A_{1,1}^{(n)} \end{pmatrix},$$

$$\underset{(2n+1)\times(n+1)}{A_{1,1}^{(0)}}=\begin{pmatrix} N_2^{(0)}(t)+\Delta N_2^{(0)}(t) & 0 & \cdots & 0 & 0 & 0 \\ 0 & N_2^{(0)}(t)+\Delta N_2^{(0)}(t) & \cdots & 0 & 0 & 0 \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ 0 & 0 & \cdots & N_2^{(0)}(t)+\Delta N_2^{(0)}(t) & 0 & 0 \\ 0 & 0 & \cdots & 0 & 0 & 0 \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ 0 & 0 & \cdots & 0 & 0 & 0 \\ N_2^{(0)}(t)+\Delta N_2^{(0)}(t) & N_2^{(0)}(t)+\Delta N_2^{(0)}(t) & \cdots & N_2^{(0)}(t)+\Delta N_2^{(0)}(t) & N_2^{(0)}(t)+\Delta N_2^{(0)}(t) & 0 \end{pmatrix},$$

$$A_{1,1}^{(i)}=\begin{pmatrix} A_{1,1}'^{(i)} \\ A_{1,1}''^{(i)} \\ A_{1,1}'''^{(i)} \end{pmatrix},\ i=\overline{1,n},\ \underset{n\times(n+2)}{A_{1,1}'^{(i)}}=\left(diag\left(N_2^{(1)}(t),N_2^{(2)}(t),\ldots,N_2^{(n)}(t)\right) \quad \theta_{n,2}\right),$$

$$\underset{n\times(n+2)}{A_{1,1}''^{(i)}}=\begin{pmatrix} 0 & 0 & \cdots & 0 & 0 & 0 & \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \\ -N_2^{(i)}(t) & -N_2^{(i)}(t) & \cdots & -N_2^{(i)}(t) & -N_2^{(i)}(t) & 0 & i\text{-ая строка} \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \\ 0 & 0 & \cdots & 0 & 0 & 0 & \end{pmatrix},$$

$$\underset{1\times(n+2)}{A_{1,1}'''^{(i)}}=\theta_{1,(n+2)},\quad \underset{(n+1)\times(n+2)}{A_{2,1}}=\begin{pmatrix} A_{2,1}^{(0)} & A_{2,1}^{(1)} & \cdots & A_{2,1}^{(n)} \end{pmatrix},$$

$$\underset{(n+1)\times(n+2)}{A_{2,1}^{(i)}}=\begin{pmatrix}0 & 0 & \cdots & 0 & 0 & 0 & \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \\ 1 & 1 & \cdots & 1 & 1 & 1 & (i+1)\text{-ая строка} \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \\ 0 & 0 & \cdots & 0 & 0 & 0 & \end{pmatrix},\ i=\overline{0,n},$$

$$\underset{n\times(n+2)(n+1)}{A_{3,1}}=\theta_{n,(n+2)(n+1)},\ A_{1,2}=\begin{pmatrix}A'_{1,2}\\ A''_{1,2}\\ A'''_{1,2}\end{pmatrix},\ \underset{n\times n}{A'_{1,2}}=diag\left(-N_1^{(1)}(t),-N_1^{(2)}(t),\ldots,-N_1^{(n)}(t)\right),$$

$$\underset{n\times n}{A''_{1,2}}=diag\left(N_1^{(1)}(t),N_1^{(2)}(t),\ldots,N_1^{(n)}(t)\right),\ \underset{1\times n}{A'''_{1,2}}=\theta_{1,n},\ \ \underset{(n+1)\times n}{A_{2,2}}=\theta_{(n+1),n},\ \ \underset{n\times n}{A_{3,2}}=E_n,$$

$$A_{1,3}=\begin{pmatrix}A'_{1,3}\\ A''_{1,3}\end{pmatrix},\ \underset{n\times n}{A'_{1,3}}=A'_{1,2},\ \ \underset{(n+1)\times n}{A''_{1,3}}=\theta_{(n+1),n},\ \ \underset{(n+1)\times n}{A_{2,3}}=\theta_{(n+1),n},\ \ \underset{n\times n}{A_{3,3}}=E_n,$$

$$\underset{(2n+1)\times n}{A_{1,4}}=\theta_{(2n+1),n},\ \underset{(n+1)\times n}{A_{2,4}}=\theta_{(n+1),n},\ \underset{n\times n}{A_{3,4}}=E_n.$$

Здесь $\theta_{l,k}$ – нулевая матрица с размерностью $l\times k$, E_l – квадратная единичная матрица с размерностью $l\times l$, $diag(a_1,a_2,\ldots,a_l)$ – квадратная диагональная матрица с размерностью $l\times l$ и элементами $a_1,\ a_2,\ldots,\ a_l$ на главной диагонали.

Заметим, что матрица A является матрицей полного ранга. Другими словами, все её строки линейно независимы.

2. Задача нахождения вероятностных параметров модели

Математическая модель (9), (10) позволяет по статистическим данным в моменты времени t и $t+1$ получить значения вероятностей $P_1^{(i,j)}(t)$, $P_2^{(k)}(t)$, $P_3^{(l,n+1)}(t)$, $i=\overline{0,n}$, $j=\overline{1,n+1}$, $k,l=\overline{1,n}$, что, в свою очередь, позволяет анализировать текущую ситуацию на исследуемом рынке труда, а также прогнозировать количество занятых и безработных [4].

Система, соответствующая задаче (9), (10) содержит $4n+2$ строки. Количество вероятностных параметров в (9), (10) равняется

$(n+1)(n+2)+3n=n^2+6n+2=m$. Таким образом, количество строк матрицы A при любом n будем меньше количества столбцов данной матрицы. Следовательно, задача отыскания $P_1^{(i,j)}(t)$, $P_2^{(k)}(t)$, $P_3^{(l,n+1)}(t)$, $i=\overline{0,n}$, $j=\overline{1,n+1}$, $k,l=\overline{1,n}$, соответствующих (9), (10) является некорректной. Её нормальным решением будем называть вектор [6]:

$$P_0=\lim_{\alpha\to 0}P_\alpha. \tag{14}$$

Здесь P_α доставляет на множестве *M* минимум функции $F_\alpha(P)$, где

$$M=\left\{P\in R^m,\ P_i\geq 0,\ i=\overline{1,m}\right\},$$

$$F_\alpha(P)=\left\|AP-N\right\|_1^2+\alpha\cdot\left\|P\right\|_2^2\quad \alpha>0. \tag{15}$$

Здесь $\|\,.\,\|_1$ и $\|\,.\,\|_2$ – евклидовы нормы в пространстве R^{4n+2} и R^m соответственно.

Для решения данной задачи воспользуемся следующим подходом:

1) Найдём безусловное нормальное решение, то есть минимальный по норме вектор *P*, удовлетворяющий равенству (9).

2) Проекцию данного безусловного нормального решения на множество *M*, будем считать начальным приближением при решении задачи (9), (10).

4) Для отыскания нормального решения, удовлетворяющего (9), (10), будем использовать метод проекции градиента.

2.1. Нахождение начального приближения

В задаче (9), (10) содержатся нижние ограничения (10) – области допустимых значений вероятностей построенной математической модели. Найдем начальное приближение задачи (9), (10), которое будет являться ее безусловным нормальным решением. Другими словами, рассмотрим СЛАУ с прямоугольной матрицей полного ранга

$$Ax = f \tag{16}$$

где

$$A = \left(a_{ij}\right),\ i = \overline{1,n},\ \ j = \overline{1,m},\ m > n,\ x \in R^m,\ \ f \in R^n.$$

Рассмотрим множество $S = \left\{x \in R^m : Ax = f\right\}$. Пусть множество S не пусто, тогда задача

$$\min_{x \in S} \|x\|^2$$

имеет единственное решение.

Воспользуемся методом Гаусса, модифицированным для недоопределённых систем.

Матрицу системы (16) приведём к ступенчатому виду, эти же преобразования нужно применять к столбцу свободных членов – вектору N (11). Получим:

$$\left(\begin{array}{ccccccc|c} 1 & 0 & \cdots & 0 & a_{1,n+1} & \cdots & a_{1,m} & f_1 \\ 0 & 1 & \cdots & 0 & a_{2,n+1} & \cdots & a_{2,m} & f_2 \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ 0 & 0 & \cdots & 1 & a_{n,n+1} & \cdots & a_{n,m} & f_n \end{array}\right)$$

Обозначим полученную систему – A', правую часть – f', $S' = \left\{x \in R^m : A'x = f'\right\}$.

Так как $S = S'$, то

$$\min_{x \in S} \|x\|^2 = \min_{x \in S'} \|x\|^2 \tag{17}$$

Найдем решение задачи (17). Пусть $x \in M'$, тогда

$$\|x\|^2 = \sum_{i=1}^{m} x_i^2 = \sum_{i=1}^{n} x_i^2 + \sum_{i=n+1}^{m} x_i^2 = \sum_{i=1}^{n}\left(f_i - \sum_{j=n+1}^{m} a_{ij}x_j\right) + \sum_{i=n+1}^{m} x_i^2 = \Phi\left(x_{n+1},\ldots,x_m\right),$$

$$\min_{x \in S'} \|x\|^2 = \min_{x \in S'} \Phi\left(x_{n+1},\ldots,x_m\right).$$

Запишем достаточные условия минимума линейного функционала $\Phi\left(x_{n+1},\ldots,x_m\right)$:

$$\frac{\partial\Phi}{\partial x_k}=0,\ \ k=\overline{n+1,m}.$$

Вычислим

$$\frac{\partial\Phi}{\partial x_k}=-2\sum_{i=1}^{n}\left[\left(f_i-\sum_{j=n+1}^{m}a_{ij}x_j\right)\cdot a_{ik}\right]+2x_k=0.$$

Для отыскания x_k, $k=\overline{n+1,m}$, получаем следующую СЛАУ:

$$\sum_{j=n+1}^{m}\sum_{i=1}^{n}a_{ij}a_{ik}x_j+x_k=\sum_{i=1}^{n}f_ia_{ik},\ \ k=\overline{n+1,m}.$$

Обозначив:

$$b_{kj}=\sum_{i=1}^{n}a_{ij}a_{ik},\ \ b_k=\sum_{i=1}^{n}f_ia_{ik},\ \ j,k=\overline{n+1,m},$$

получим

$$\sum_{j=n+1}^{m}b_{kj}x_j+x_k=b_k,\ \ k=\overline{n+1,m},$$

или

$$\left(B+E\right)y=b, \tag{18}$$

здесь $B=\begin{pmatrix} b_{(n+1),(n+1)} & \cdots & b_{(n+1),m} \\ \cdots & \cdots & \cdots \\ b_{m,(n+1)} & \cdots & b_{m,m}\end{pmatrix}$, $b=\begin{pmatrix} b_{n+1} \\ \cdots \\ b_m\end{pmatrix}$, $y=\begin{pmatrix} x_{n+1} \\ \cdots \\ x_m\end{pmatrix}$.

Заметим, что

$$b_{kj}=\sum_{i=1}^{n}a_{ij}a_{ik}=\left(a_j,a_k\right),\ \ b_k=\sum_{i=1}^{n}f_ia_{ik}=\left(f,a_k\right),$$

где

$$a_k=\begin{pmatrix} a_{1,k} \\ \cdots \\ a_{m,k}\end{pmatrix},\ \ f=\begin{pmatrix} f_1 \\ \cdots \\ f_m\end{pmatrix}.$$

Таким образом, решив СЛАУ (18), найдем минимальное по норме решение задачи (9), (10).

2.2. Градиентный метод решения задачи (9), (10)

Проекция на множество *M* решения системы (18) является начальным приближением при решении задачи (9), (10). Для нахождения нормального решения задачи (9), (10) воспользуемся градиентным методом.

При нахождении нормального решения задачи (9), (10) вектор решений после каждой итерации градиентного метода должен находиться в области допустимых значений (во множестве *M*). Стандартные безусловные градиентные методы [7] не подходят для данного случая. Поэтому построим следующий алгоритм нахождения решения:

1. Задаём $\alpha > 0$, $0 < \beta < 1$, $\varepsilon > 0$; полагаем $x^{(0)}$ равным спроецированному на множество *M* начальному приближению, найденному при решении (18); вычисляем по (15) $f\left(x^{(0)}\right)$, $f'\left(x^{(0)}\right)$; полагаем $k = 1$.

2. Проецируем антиградиент $(-f'\left(x^{(k)}\right))$ в область допустимых значений и вычисляем $\left\| f'\left(x^{(k)}\right) \right\|$. Полагаем $\lambda_k = \alpha$.

3. Вычисляем $\Delta x^{(k)} = -\lambda_k \dfrac{f'\left(x^{(k-1)}\right)}{\left\| f'\left(x^{(k-1)}\right) \right\|}$, $x^{(k)} = x^{(k-1)} + \Delta x^{(k)}$, $f\left(x^{(k)}\right)$.

4. Проверяем условие выбора λ_k: $f\left(x^{(k)}\right) < f\left(x^{(k-1)}\right)$.

Если оно выполняется, то осуществляем переход к п. 5 данного алгоритма. Иначе полагаем $\lambda_k = \beta\lambda_k$ и осуществляем переход к п. 3.

5. Полагаем $i = 0$, $x_i^{(k)} = x^{(k)}$.

6. Полагаем $i = i + 1$, вычисляем $x_i^{(k)} = x_{i-1}^{(k)} + \lambda_k$.

7. Если $i \geq 2$, тогда переходим к п. 8, в противном случае переходим п. 6.

8. Проверяем следующие условия:

$$\left[\begin{array}{l}\left\{\begin{array}{l} f\left(x_{i-1}^{(k)}\right) < f\left(x_{i-2}^{(k)}\right), \quad (19)\\ f\left(x_{i-1}^{(k)}\right) < f\left(x_{i}^{(k)}\right), \quad (20)\end{array}\right.\\ \quad L\left(x_{i}^{(k)}\right) < 0. \quad (21)\end{array}\right.$$

Здесь $L(x)$ принимает отрицательное значение тогда и только тогда, когда вектор x содержит хотя бы одну отрицательную компоненту. Если условия (19) – (21) выполняются, то, очевидно, оптимальное решение (для k-й итерации) будет находиться на интервале $\left(x_{i-2}^{(k)}, x_{i}^{(k)}\right)$. Опишем алгоритм нахождения решения на данном интервале:

8.1. Для дальнейшего приближения обозначим: $x_{i-2}^{(k)}$ как $x_{pred}^{(k)}$; $x_{i-1}^{(k)}$ – $x_{now}^{(k)}$; $x_{i}^{(k)}$ – $x_{next}^{(k)}$.

8.2. Вычисляем

$$x_{mid1}^{(k)} = \frac{x_{now}^{(k)} - x_{pred}^{(k)}}{2}, \; x_{mid2}^{(k)} = \frac{x_{next}^{(k)} - x_{now}^{(k)}}{2}.$$

Если $L\left(x_{pred}^{(k)}\right) < 0$, тогда переходим к нахождению неотрицательного решения методом дихотомии с краевыми точками $c = x_{pred}^{(k)}$, $a = x_{pred}^{(k)} - \left(x_{now}^{(k)} - x_{pred}^{(k)}\right) = 2x_{pred}^{(k)} - x_{now}^{(k)}$. Считая полученный вектор вектор-решением k-й итерации $x^{(k)}$, переходим к п. 9. Если $L\left(x_{pred}^{(k)}\right) \geq 0$ переходим к п. 8.3.

8.3. В полученной последовательности приближений $x_{pred}^{(k)}$, $x_{mid1}^{(k)}$, $x_{now}^{(k)}$, $x_{mid2}^{(k)}$, $x_{next}^{(k)}$ могут найтись три соседних точки $x_{i-1}^{(k)}$, $x_{i}^{(k)}$, $x_{i+1}^{(k)}$, для которых будут выполняться условия:

$$f\left(x_{i}^{(k)}\right) < f\left(x_{i-1}^{(k)}\right), \; f\left(x_{i}^{(k)}\right) < f\left(x_{i+1}^{(k)}\right).$$

В данном случае принимаем

$$x_{pred}^{(k)} = x_{i-1}^{(k)},\ x_{now}^{(k)} = x_{i}^{(k)},\ x_{next}^{(k)} = x_{i+1}^{(k)}.$$

Иначе:

$$x_{pred}^{(k)} = x_{now}^{(k)} \text{ и } x_{now}^{(k)} = x_{mid\,2}^{(k)}.$$

8.4. Если выполняется условие

$$\left| f\left(x_{next}^{(k)}\right) - f\left(x_{pred}^{(k)}\right) \right| < \varepsilon, \tag{24}$$

тогда вектор-решением k-й итерации $x^{(k)}$ будем считать вектор $x_{pred}^{(k)}$, если $L\left(x_{now}^{(k)}\right) < 0$, и $x_{now}^{(k)}$, в противном случае. Если (24) не выполняется, переходим к шагу 8.2.

9. Вычисляем $f'\left(x^{(k)}\right)$.

10. Проверяем условия:

$$\left[\begin{array}{l} \dfrac{1}{n}\sum\limits_{k=1}^{n}\left|g^{(k)}\right| < \varepsilon, \\ \dfrac{1}{n}\sum\limits_{k=1}^{n}\left|gp^{(k)}\right| < \varepsilon, \end{array} \right.$$

где $g^{(k)}$ – компоненты вектора антиградиента ($g^{(k)} = -f'\left(x^{(k)}\right)$), $gp^{(k)}$ – компоненты данного вектора, спроецированные в область допустимых значений (множество M).

Если они выполняются, то полагаем $x^* \cong x^{(k)}$, $f^* \cong f\left(x^{(k)}\right)$ и завершаем вычисления. Иначе полагаем $k = k + 1$ и осуществляем переход к п. 2.

Решением поставленной задачи будет вектор x^*.

По представленному алгоритму нахождения нормального решения задачи (9), (10) было написано приложение в среде программирования С++. Проведённые тесты показали, что при исследовании 10-и отраслевого рынка труда невязка решения при $\alpha = 0{,}001$ (9), полученная в реализованном приложении на C++, практически нулевая – не превышает 0.0001 (отношение невязки к объёму исследуемого рынка труда), и незначительно превосходит невязку решения, полученного с помощью табличного процессора MS Excel. Однако следует отметить скорость нахождения решения – для реализованного приложения она занимает около 15 секунд, в то время как при использовании надстройки «Поиск решений» (метод обобщённого приведённого градиента) табличного процессора MS Excel решение вычисляется около 30 минут. Также следует отметить, что реализованное приложение способно решать задачи с размерностью, превосходящую максимально допустимую размерность задачи при её решении в табличном процессоре MS Excel.

3. Применение разработанного метода на практике

Воспользуемся данными, предоставляемыми федеральной службой государственной статистики Российской Федерации [5]. В соотношениях (1) – (3) межотраслевой балансовой модели в качестве количественных характеристик используем данные по рынку труда, состоящему из следующих 10-и отраслей экономки РФ: №1 – «Сельское и лесное хозяйство, охота, рыболовство и рыбоводство», №2 – «Добыча полезных ископаемых», №3 – «Обрабатывающие производства», №4 – «Производство и распределение электроэнергии, газа и воды», №5 – «Строительство», №6 – «Оптовая и розничная торговля, ремонт автотранспортных средств, мотоциклов, бытовых изделий и предметов личного пользования, гостиницы и рестораны», №7 – в «Транспорт и связь», №8 – «Финансовая деятельность, операции с недвижимым имуществом, аренда и предоставление услуг», №9 – «Государственное управление и обеспечение военной безопасности, социальное обеспечение», №10 – «Образование». Распределение трудовых ресурсов по отраслям, участвовавших в производственном процессе в 2011 – 2013 гг., приведено в таблице 1.

Таблица 1. Распределение работающих специалистов по отраслям (в тыс. чел.) в 2011 – 2013 гг.

t	$N_1^{(1)}$	$N_1^{(2)}$	$N_1^{(3)}$	$N_1^{(4)}$	$N_1^{(5)}$	$N_1^{(6)}$	$N_1^{(7)}$	$N_1^{(8)}$	$N_1^{(9)}$	$N_1^{(10)}$
2011	5456,0	1417,1	10628,5	2267,4	5101,7	12754,2	6660,5	6164,5	5456,0	6518,8
2012	5222,8	1430,9	10731,8	2361,0	5294,4	13021,3	6725,3	6224,5	5365,9	6596,5
2013	4997,4	1570,6	10565,9	2284,5	5425,8	13100,3	6746,5	6425,2	5247,3	6532,3

Численность безработных, последнее место работы которых было в i-ой отрасли, оценим через соотношения численности выбывших работников списочного состава в процентах к среднесписочной численности работников в Российской Федерации по видам экономической деятельности за 2011 – 2013 гг. Приведённые оценочные значения содержаться в таблице 2.

Таблица 2. Оценочное количество безработных, последнее место работы которых было в i-ой отрасли (в тыс. чел.) в 2011 – 2013 гг.

t	$N_1^{(1)}$	$N_1^{(2)}$	$N_1^{(3)}$	$N_1^{(4)}$	$N_1^{(5)}$	$N_1^{(6)}$	$N_1^{(7)}$	$N_1^{(8)}$	$N_1^{(9)}$	$N_1^{(10)}$
2011	917,78	238,46	274,54	232,3	449,65	1067,37	265,74	520,05	160,15	174,23
2012	788,02	191,3	227,36	181,74	367,15	886,61	228,09	443,67	121,4	143,48
2013	843,99	205,16	219,76	180,33	378,92	841,07	213,19	443,17	126,31	162,08

Количество безработных на момент времени t, которые не были заняты каким-либо видом деятельности с момента последнего попадания на исследуемый 10-и отраслевой рынок труда, $N_2^{(0)}(t)$, в 2011 году равняется, примерно, 100 тысячам человек, в 2012 году – 113 тысячам (оценка данного фактора возможна за счёт анализа количества выпускников и мигрантов, поступивших к этому периоду и ориентированных на представленные отрасли). В течение 2011 – 2012 гг. на исследуемый рынок труда поступило (без учёта распределения этих безработных между отраслями за данный промежуток времени), приблизительно, 300 тысяч человек ($\Delta N_2^{(0)}(2011)=300$).

По приведённым данным за 2011 – 2012 гг. оценим значения вероятностей математической модели (9), (10). Результат приведён в таблицах 3, 4.

Таблица 3. Значения вероятностей устройства специалистов, последнее место работы которых было в i-ой отрасли, в j-ую отрасль (округлено до третьего знака после запятой)

$P_1^{(i,j)}$	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12
0	0,089	0,086	0,066	0,084	0,097	0,087	0,068	0,087	0,027	0,056	0,004	0,248
1	0,116	0,109	0,063	0,103	0,134	0,111	0,067	0,110	0,004	0,040	0,000	0,142
2	0,105	0,103	0,092	0,102	0,110	0,104	0,093	0,104	0,068	0,086	0,029	0,005
3	0,089	0,087	0,073	0,085	0,095	0,088	0,075	0,087	0,046	0,067	0,004	0,204
4	0,112	0,110	0,098	0,108	0,116	0,111	0,099	0,110	0,075	0,093	0,038	0,000
5	0,099	0,096	0,073	0,093	0,108	0,097	0,075	0,096	0,029	0,062	0,004	0,169
6	0,045	0,037	0,017	0,030	0,067	0,039	0,013	0,039	0,004	0,012	0,000	0,697
7	0,100	0,098	0,085	0,096	0,105	0,099	0,086	0,098	0,059	0,078	0,015	0,080
8	0,099	0,095	0,070	0,092	0,110	0,097	0,072	0,096	0,018	0,057	0,004	0,190
9	0,112	0,111	0,103	0,110	0,115	0,111	0,103	0,111	0,087	0,099	0,061	0,000
10	0,100	0,098	0,090	0,097	0,103	0,099	0,090	0,099	0,072	0,085	0,044	0,022

В таблице 3 вероятность, находящаяся в ячейке, расположенной на пересечении строки, крайняя левая ячейка которой содержит число i, и столбца, крайняя верхняя ячейка которого содержит число j, соответствует вероятности $P_1^{(j,i)}(t)$ – вероятность того, что безработный, последнее место работы которого было в j-ой отрасли, найдёт работу в i-ой отрасли. Уход в 11-ую отрасль соответствует уходу из исследуемого 10-и отраслевого рынка труда. В 12-ом столбце содержаться вероятности того, что безработный специалист, последнее место занятости которого было в i-ой отрасли, останется безработным.

В таблице 4 приведены вероятности того, что занятые на исследуемом рынке труда в 2011 году специалисты в 2012 году либо уволятся $\left(P_2^{(i)}\right)$, либо покинут исследуемый рынок труда $\left(P_3^{(i,i)}\right)$.

Таблица 4. Значения вероятностей увольнения работающего специалиста из *i*-ой отрасли и вероятности его ухода из исследуемого рынка труда (округлено до четвёртого знака после запятой)

P	i									
	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10
$P_2^{(i)}$	0,1204	0,1338	0,0160	0,0873	0,0570	0,0111	0,0309	0,0558	0,0258	0,0213
$P_3^{(i,11)}$	0,0000	0,1400	0,0017	0,0405	0,0000	0,0000	0,0037	0,0005	0,0144	0,0040
$P_3^{(i,i)}$	0,8796	0,7262	0,9823	0,8722	0,9430	0,9889	0,9653	0,9437	0,9598	0,9747

Заключение

В данной работе был предложен численный алгоритм решения задачи самоорганизации трудовых ресурсов. Алгоритм основан на численном методе оптимизации безусловным градиентным методом, но в отличии от него применим для рассматриваемой задачи, обладающей условиями неотрицательности искомых значений.

По предложенному алгоритму была написана программа в среде С++, показавшая его эффективность. По результатам проведённых тестовых расчётов был сделан вывод об устойчивости решения к размерности задачи.

Автор благодарит Анастасию Белашову за помощь при реализации алгоритма и проведении тестовых расчётов.

Литература

1. Семенчин Е.А., Невечеря А.П. Об обратной задаче в математической модели самоорганизации рынка труда // Фундаментальные исследования. – М.: Академия Естествознания, 2014. – № 6. – С. 1184 – 1190.

2. Семенчин Е.А., Зайцева И.В. Математическая модель самоорганизации рынка труда для двух отраслей экономики // Экономика и математические методы. – М.: Наука, 2004. – Т. 40. В. 4. – С. 137 – 139.

3. Семенчин Е.А., Зайцева И.В. Математическая модель самоорганизации рынка труда для нескольких отраслей экономики // Экономика и математические методы. – М.: Наука, 2007. – Т. 43. В. 1. – С. 133 – 136.

4. Невечеря А.П. Прогнозирование динамики трудовых ресурсов с помощью межотраслевой математической модели / А.П. Невечеря // Политематический сетевой электронный научный журнал Кубанского государственного аграрного университета (Научный журнал КубГАУ) [Электронный ресурс]. – Краснодар: КубГАУ, 2015. –

№05 (109). С. 560 – 572. – IDA [article ID]: 1091505033. – Режим доступа: http://ej.kubagro.ru/2015/05/pdf/33.pdf

5. Федеральная служба государственной статистики. [Электронный ресурс]. – Режим доступа: http://www.gks.ru

6. Тихонов А.Н., Арсенин В.Я. Методы решения некорректных задач. – М: Наука, 1979. – 285 с.

7. Васильев Ф.П. Численные методы решения экстремальных задач. – М.: Наука, 1988. – 522 с.

References

1. Semenchin E.A., Nevecherja A.P. Ob obratnoj zadache v matematicheskoj modeli samoorganizacii rynka truda // Fundamental'nye issledovanija. – M.: Akademija Estestvoznanija, 2014. – № 6. – S. 1184 – 1190.

2. Semenchin E.A., Zajceva I.V. Matematicheskaja model' samoorganizacii rynka truda dlja dvuh otraslej jekonomiki // Jekonomika i matematicheskie metody. – M.: Nauka, 2004. – T. 40. V. 4. – S. 137 – 139.

3. Semenchin E.A., Zajceva I.V. Matematicheskaja model' samoorganizacii rynka truda dlja neskol'kih otraslej jekonomiki // Jekonomika i matematicheskie metody. – M.: Nauka, 2007. – T. 43. V. 1. – S. 133 – 136.

4. Nevecherja A.P. Prognozirovanie dinamiki trudovyh resursov s pomoshh'ju mezhotraslevoj matematicheskoj modeli / A.P. Nevecherja // Politematicheskij setevoj jelektronnyj nauchnyj zhurnal Kubanskogo gosudarstvennogo agrarnogo universiteta (Nauchnyj zhurnal KubGAU) [Jelektronnyj resurs]. – Krasnodar: KubGAU, 2015. – №05 (109). S. 560 – 572. – IDA [article ID]: 1091505033. – Rezhim dostupa: http://ej.kubagro.ru/2015/05/pdf/33.pdf

5. Federal'naja sluzhba gosudarstvennoj statistiki. [Jelektronnyj resurs]. – Rezhim dostupa: http://www.gks.ru

6. Tihonov A.N., Arsenin V.Ja. Metody reshenija nekorrektnyh zadach. – M: Nauka, 1979. – 285 s.

7. Vasil'ev F.P. Chislennye metody reshenija jekstremal'nyh zadach. – M.: Nauka, 1988. – 522 s.