УДК 519.115.1

01.00.00 Физико-математические науки

АППРОКСИМАЦИЯ ФУНКЦИИ РАСПРЕДЕЛЕНИЯ ПРОСТЫХ ЧИСЕЛ $\pi(x)$

Верещака Максим Николаевич
магистрант
РИНЦ SPIN-код: 2086-7362

Лаптев Владимир Николаевич
к. т. н., доцент

Сергеев Александр Эдуардович
к. ф.-м. н., доцент

Сергеев Эдуард Александрович
к. ф.-м. н., доцент
Кубанский государственный университет, Краснодар, Россия

В этой статье мы обсуждаем различные вопросы, связанные с формулами аппроксимирующими функцию распределения простых чисел pi(x). Этим вопросом занимались многие ученые, но точной функции, хорошо приближающую функцию pi(x) всем ряде натуральных чисел нет. Основываясь на некоторых гипотезах, мы приводим новую функцию s(x) очень хорошо приближающую pi(x). Приведенные в статье гипотезы настолько важны, что их числовая проверка и уточнение для отрезков длины большей 10^{14} – одно из магистральных направлений, связанных с проблемой аппроксимации функции pi(x) на всем ряде натуральных чисел. Проведя анализ поведения и построения многих функций, мы основе этого строим функцию s(x), которая достаточно хорошо аппроксимирует функцию pi(x) на всем ряде натуральных чисел. Мы также приводим таблицу значений для x, не превосходящих 10^{22} для разности s(x) - pi(x)

Ключевые слова: ПРОСТЫЕ ЧИСЛА, РАСПРЕДЕЛЕНИЕ, ФУНКЦИЯ МЕБИУСА, ФУНКЦИЯ РИМАНА, МЕТОД ЧЕБЫШЕВА, АППРОКСИМАЦИЯ

UDC 519.115.1

Physical-Mathematical sciences

ON THE NUMERATIONS OF THE FINITE PARTIALLY ORDERED SETS

Vereshchaka Maxim Nikolaevich
master student

Laptev Vladimir Nikolaevich
Cand. Tech. Sci., associate Professor

Sergeev Alexandr Eduardovich
Cand. Phys.-Math. Sci., associate Professor

Sergeev Eduard Alexandrovich
Cand. Phys.-Math. Sci., associate Professor
Kuban State University, Krasnodar, Russia

In this article, we discuss various issues related to the formulas approximating the distribution function of prime numbers pi(x). This question has occupied many scholars, but the exact function is well approximated function pi(x) over the number of positive integers not. Based on certain hypotheses, we present a new function s(x) is very well approximated pi(x). The above article hypotheses are so important that their numerical validation and refinement for the lengths of the segments more in 10^{14} - one of the main areas related to the problem of approximation of the function pi(x) throughout the series of natural numbers. After analyzing the behaviors and constructs many functions, we are building the basis of the function s(x), which is well approximates the function pi(x) throughout the series of natural numbers. We also present a table of values for x, less or equal 10^{22} for the difference of s(x) - pi(x)

Keywords: PRIME NUMBERS, DISTRIBUTION, MEBIUS FUNCTION, RIEMANN FUNCTION, CHEBYSHOV METHOD, APPROXIMATION

Аппроксимация функции распределения простых чисел $\pi(x)$

Пусть $\pi(x)$ означает число простых чисел в натуральном ряде не превосходящем x. Вопрос о распределении простых чисел в натуральном ряде давно интересует математиков, во всяком случае древнегреческий ученый Эратосфен(III век до н.э.) нашел метод подсчета числа простых чисел, не превосходящих x с помощью так называемого теперь решета Эратосфена.

Еще Евклидом было изящно и просто, доказано, что не существует наибольшего простого числа. После Евклида Леонард Эйлер (1707-1783) первый из математиков наметил новый плодотворный подход к изучению вопроса о распределении простых чисел, введя в рассмотрение свою знаменитую формулу:

$$\zeta(s) = \sum_n \frac{1}{n^s} = \prod_p (1 - p^{-s})^{-1}, \qquad (1)$$

где s - натуральное число, а произведение распространено на все простые числа p.

А.М. Лежандр(1752-1833) в 1798 году в своей книге "Теория чисел" предположил, исходя из вычислений, что функция $\frac{x}{lnx}$ удовлетворительно приближает $\pi(x)$ в пределах таблиц простых чисел того времени, т.е. до $x10^6$. Позже в 1808 году лежандр обнаружил, что функция $\frac{x}{lnx - 1{,}08366}$ наилучшим образом приближает $\pi(x)$ в пределах таблиц.

Приблизительно в эти годы К.Ф. Гаусс(1777-1855) составляюю таблицы простых чисел пришел к выводу, что интегральный логарифм $Li(x) = \int_2^x \frac{dt}{lnt}$ лучше приближает $\pi(x)$, чем $\frac{x}{lnx}$ и попутно отметил, что $Li(x) > \pi(x)$ для всех $x300000$. Гаусс не опубликовал своих выводов, а лишь высказал их в 1848 году в письме к немецкому астроному И. Энке(1791-1865).

П.Л. Чебышев(1821-1894) в знаметином мемуаре 1848 года [1][18], предложил новый подход к исследованию функции $\pi(x)$ и ее аппроксимаций. В частности он доказал, что если пределы $\lim_{x\to\infty} \frac{\pi(x)}{Li(x)}$ и

$\lim\limits_{x\to\infty}\frac{\pi(x)}{\frac{x}{lnx}}$ существуют, то оба они равны единице, причем если существует один, предел, то существует и другой. Это так называемый асимптотический закон распределения простых чисел, глобальное и важное утверждение. Лишь в 1896 году Ж. Адамар (1865-1963) и независимо от него Валле Пуссен (1866-1962) с помощью теории функций комплексного переменного доказали асимптотический закон распределения простых чисел.

После этого сразу возникла проблема оценки разности $\pi(x)-Li(x)$ и Валле Пуссен в 1899 году доказал, что $\pi(x)-Li(x)=\delta(xe^{-\alpha\sqrt{log\,x}})$. Результат Валле-Пуссена впоследствии неоднократно улучшался. И.М. Виноградов (1891-1983) ввел в 1958 году в теорию чисео свои методы оценок тригонометрических сумм, которые позволили ему и его ученику Н.М. Коробову улучшить оценку Валле Пуссена: $\pi(x)-Li(x)=\delta(xe^{-\sqrt{log\,x}^{\beta}})$, при любой постоянной $\beta<0.6$. В 2002 году Фордом [2] с помощью метода Виноградова [15][16] получен такой результат

$$\pi(x)-Li(x)=\delta(xe^{-0.2098\frac{(log\,x)^{\frac{3}{5}}}{(log\,log\,x)^{0.2}}}).$$

В 1949 году А. Сельберг (1917-2007) и П. Эрдеш (1913-1996), основываясь на известных фактах теории чисел и лемме, открытой Сельбергом, доказали разными путями асимптотический закон распределеемя простых чисел, не используя теорию функций комплексного переменного. Это было сенсацией в математическом мире, так как существовало мнение, что эту фундаментальную теорему теории простых чисел нельзя доказать без теорем функций комплексного перменного, без результатов римана. Доказательство Сельберга изложено в [3].

П.Л. Чебышев в свое мемуаре 1848 года показал, что функция Лежандра для аппроксимации $\pi(x)$ на всем ряде натуральных чисел должна быть заменена на $\frac{x}{ln x-1}$, которая наилучшим образом приближает $\pi(x)$ среди выражений вида $\frac{x}{\ln x-c}$. Кроме того в мемуаре Чебышева содержится замечательная теорема V, в которой утверждается, что если функция $\pi(x)$ может быть выражена верно до количеств порядка $\frac{x}{(log\, x)^n}$ включительно, то такое выражение для есть:

$$\frac{x}{log\, x}+\frac{1*2*x}{(log\, x)^2}+...+\frac{1*2*...*n*x}{(log\, x)^n}.$$

Если принять во внимание, что $Li(x)=\frac{x}{log\, x}+\frac{1*2*x}{(log\, x)^2}+...+\frac{(n-1)*x}{(log\, x)^n}+...,$ то становится ясно, что $Li(x)$ должна хорошо аппроксимировать $\pi(x)$ на всем ряде натуральных чисел и это самая простая среди такого рода функция. Поэтому чтобы получить новые функции хорошо аппроксимирующие $\pi(x)$ надо осуществить соответствующие конструкции, привлекая и функцию $Li(x)$. Так действовали, например, Б. Риман (1826-1866) и С. Рамануджан (1887-1920) [4]. Известно, что Риман был знаком с мемуарами Чебышева по теории чисел [5].

Опишем конструкцию римана, приведшую его к знаменитой функции $R(x)$ удивительно хорошо аппроксимирующей $\pi(x)$ особенно для значений $x10^9$. Исходя из эвристических положений Риман рассматривает функцию $\Pi(x)$:

$$\Pi(x)=\pi(x)+\frac{1}{2}\pi(x^{\frac{1}{2}})+\frac{1}{3}\pi(x^{\frac{1}{3}})+....$$

Затем с помощью формулы обращения Мебиуса получает выражение для $\pi(x)$:

$$\pi(x) = \sum_{m=1}^{\infty} \frac{\mu(m)}{m} \Pi(x^{\frac{1}{m}}), \tag{2}$$

где $\mu(m)$ - функция Мебиуса. Наконец, в выражении (2) $\Pi(x)$ заменяется на $Li(x)$ и получается приблизительное равенство:

$$\pi(x) \approx Li(x) - \frac{1}{2}Li(x^{\frac{1}{2}}) - \frac{1}{3}Li(x^{\frac{1}{3}}) - \frac{1}{5}Li(x^{\frac{1}{5}}) + \frac{1}{6}Li(x^{\frac{1}{6}}) - ... \tag{3}$$

Замену $\Pi(x)$ на $Li(x)$ Риман обосновал с помощью равенства (4), которое в 1895 году было доказано Мангомдтом:

$$\Pi(x) = Li(x) - \sum_{\rho} Li(x^{\rho}) - log2 + \int_{x}^{\infty} \frac{dt}{t(t^2-1)logt}, \ x > 1, \tag{4}$$

где ρ - нетривиальные нули дзета функции Римана. В равенстве (4) $Li(x)$- главное слагаемое, поэтому $\Pi(x) \approx Li(x)$, и тогда получаем из (2) приближенное равенство (3). В честь римана правую часть равенства (3) называют функцией Римана $R(x)$:

$$R(x) = Li(x) - \frac{1}{2}Li(x^{\frac{1}{2}}) - \frac{1}{3}Li(x^{\frac{1}{3}}) - .... \tag{5}$$

Таким образом, $\pi(x) \approx R(x)$, $Li(x) \approx R(x)$ и величина разности $\pi(x) - R(x)$ зависит от величины $\pi(x) - Li(x)$, т.е. от расположения нетривиальных нулей дзета функции Римана на комплексной плоскости.

В пределах таблиц $x10^2 4$ функция $R(x)$ лучше приближает $\pi(x)$, чем $Li(x)$, причем в этом случае выполняются неравенства:

$$Li(x) > \pi(x) \ , \ |\pi(x) - Li(x)| > |\pi(x) - R(x)|$$

и разность $\pi(x) - R(x)$ частно меняет знак с увеличением x. В тоже время, как заметил Ингам(1900-1967) [6] на всем ряде натуральных чисел преимущества $R(x)$ перед $Li(x)$ в аппроксимации $\pi(x)$ иллюзорны, вследствии осцилирующего вклада второго слагаемого в равенстве (4), т.е. вследствии вклада нетривиальных нулей дзета функции Римана.

Тривиальные нули ρ функции Римана есть все отрицательные четные числа $-2,-4,-6,...$, а нетривиальные нули $\rho = \alpha + i\beta$ все являются комплексными числами, которые в комплексной плоскости находятся в полосе $0 < \sigma < 1$. Вмесете с нулем $\rho = \alpha + i\beta$ нулями дзета функции являются также числа $1-\rho$ и $1-\bar{\rho} = 1-\alpha + i\beta$. Поэтому все нули находятся на прямой $\sigma = \frac{1}{2}$ или расположены парами симметрично относительно этой прямой.

Риман предположил в своей знаменитой гипотезе, что все нетривиальные комплексные нули дзета функции имеют вид $\rho = \frac{1}{2} + i\beta$. В настоящее время с помощью компьютеров вычислены биллионы нетривиальных нулей дзета функции Римана и все они подтверждают гипотезу Римана.

Известно [6],[7],[8],[9], что если θ – верхний передел вещественной части α нетривиальных нулей $\rho = \alpha + i\beta$ дзета функции Римана, то выполняется асимптотическое равенство:

$$\pi(x) = Li(x) + O(x^{\theta} log\, x). \tag{6}$$

Поэтому, если гипотеза Римана верна, то $\theta = \frac{1}{2}$ и получаем

$$\pi(x) = Li(x) + O(x^{\frac{1}{2}} log\, x). \tag{7}$$

Оценка (7) очень хороша, так как известно, что равенство (8) неверно при $\theta < 0.5$:

$$\pi(x) = Li(x) + O(x^{\theta}). \tag{8}$$

В 1914 году Г. Харди(1877-1947) доказал, что бесконечно много нулей $\rho = \alpha + i\beta$ дзета функции имеет $\alpha = \frac{1}{2}$, но никому не удается доказать, что нет нетривиальных нулей с $\sigma \neq \frac{1}{2}$.

Хотя в пределах существующих таблиц разность $Li(x) - \pi(x)$ положительна и быстро растет с увеличением x, но неожиданно Д. Литтлвуд(1885-1977) доказал в 1914 году, что разность $Li(x) - \pi(x)$ с возрастанием x бесконечное число раз меняет знак, принимая значения как большие чем $x^{0.5-\varepsilon}$, так и меньшие $x^{0.5-\varepsilon}$ при любом $\varepsilon > 0$ [3]. Из результата Литтлвуда следует, что в асимптотическом равенстве (7) постоянную $\frac{1}{2}$ в показателе остаточного члена нельзя заменить на меньшую постоянную.

Литтлвуду не удалось указать ни одного числа E для которого $\pi(E) > Li(E)$ и первую границу для существования этого числа в определенном интервале указал в 1955 Скьюз [10], доказав, что $log_{10}log_{10}log_{10}E < 3$. Число Скьюза невероятно велико и в 1966 году Леман [11] снизил верхнюю границу E установив, что $E < 1.65\times10^{1165}$. В 1987 году Риэле [12] получил $E < 6.69\times10^{370}$ и в 2000 Бэйз и Хадсон [13] доказали $E < 1.40\times10^{316}$. Итак верхняя граница для числа E получена. Первая нижняя граница для E установлена Гауссом: $E > 3000000$. В настоящее время известно, что $E > 10^{20}$. В ближайшее время хотя бы одно E вряд ли будет обнаружено, если наименьшее существующее число имеет порядок 10^{300} или даже 10^{150}, то современным компьютерам для его обнаружения понадобится не один десясок лет работы.

В 2006 году Т. Котик [14] предпринял в течении полугода численную проверку на отрезке $[2,10^{14}]$ точности аппроксимации посредством трех функций $Li(x), Li(x)-\frac{1}{2}Li(x^{\frac{1}{2}})$ и функции Римана $R(x)$. Им получены интересные числовые и графические оценки, позволившие ему высказать следующие замечательные гипотезы.

Гипотеза 1. Для всех $x \geq 2$ выполняются неравенства:

$$|\pi(x)-Li(x)| < \sqrt{x}$$

$$|\pi(x)-Li(x)+\frac{1}{2}Li(\sqrt{x})| < \sqrt{x} \quad |\pi(x)-R(x)| < \sqrt{x}$$

Гипотеза 2.

$$|\int_2^x \pi(u)-Li(u)+\frac{1}{2}Li(\sqrt{u})du| < |\int_2^x \pi(u)-Li(u)du| \text{ для всех } x > 2222$$

$$\int_2^x |\pi(u)-R(u)du| < |\int_2^x \pi(u)-Li(u)du| \text{ для всех } x>4003$$

Гипотеза 3. Для всех $x \geq 2$ выполняются неравенства:

$$-\frac{2}{5}x^{\frac{3}{2}} < \int_2^x \pi(u)-Li(u)du < 0$$

$$-\frac{1}{5}x^{\frac{3}{2}} < \int_2^x \pi(u)-Li(u)+\frac{1}{2}Li(\sqrt{u})du < \frac{1}{5}x^{\frac{3}{2}}$$

$$|\int_2^x |\pi(u)-R(u)du| < \frac{1}{5}x^{\frac{3}{2}}$$

Гипотеза 1 фактически утверждает, что функция Римана не дает наилучшую оценку для разности $|\pi(x)-Li(x)|$, а оценка этой разности в гипотезе 1 наилучашая из возможных.

Согласно гипотезе 2 получаем, что в среднем на всем ряде натуральных чисел функции $Li(x)-\frac{1}{2}Li(\sqrt{x})$ и $R(x)$ лучше приближают $\pi(x)$ чем $Li(x)$.

Эти гипотезы настолько важны, что их числовая проверка и уточнение для отрезков $[x,N], N>10^{14}$ – одно из магистральных направлений, связанных с проблемой аппроксимации функции $\pi(x)$ на всем ряде натуральных чисел.

Используя преобразования, связанные с функцией мы можем конструировать бесконечно много функций хорошо аппроксимирующих для которых будут выполнятся гипотезы аналогичные предыдущим. Например, можно исследовать аппроксимации:

$$\pi(x) \approx Li(x)-\frac{1}{2}Li(\sqrt{x})-\frac{1}{3}Li(x^{\frac{1}{3}})$$

$$\pi(x) \approx Li(x)-\frac{11}{18}Li(\sqrt{x})$$

и так далее.

Принимая во внимание гипотезу 1, мы можем ожидать, что функция $Li(x)-(x^{\frac{11}{\sigma}})$ будет хорошо аппроксимировать $\pi(x)$ на всем ряде натуральных чисел при надлежащем выборе функции $\sigma(x)$. Мы выбираем $\sigma(x)$ в виде:

$$\sigma(x) = 2 + \frac{e^2}{lg\,x}$$

где $e = 2.718281828459...$, $lg\,x$ логарифм по основанию 10 и получаем функцию $S_0(x) = Li(x)-(x^{\frac{11}{\sigma}})$ действительно хорошо аппроксимирующую в пределах таблицы, а если гипотеза 1 верна, то и на всем ряде натуральных чисел. Заметим, что в [18] содержится аналогичная аппроксимирующая функция $S(x)$.

x	П(x)	Li(x)	So(x)	So(x)-П(x)	Li(x)-П(x)
10^3	168	178	173	5	10
10^4	1229	1246	1235	6	17
10^5	9592	9630	9603	11	38
10^6	78498	78628	78556	58	130
10^7	664579	664918	664723	144	339
10^8	5761455	5762209	5761664	209	754
10^9	50847534	50849235	50847685	151	1701
10^10	455052511	455055615	455051137	-1374	3104
10^11	4118054813	4118066401	4118053304	-1509	11588
10^12	37607912018	37607950281	37607911592	-426	38263
10^13	346065536839	346065645810	346065530587	-6252	108971
10^14	3204941750802	3204942065692	3204941720202	-30600	314890
10^15	29844570422669	29844571475288	29844570433442	10773	1052619
10^16	279238341033925	279238344248557	279238341091611	57686	3214632
10^17	2623557157654230	2623557165610820	2623557156005270	-1648959	7956589
10^18	24739954287740800	24739954309690400	24739954280359800	-7381032	21949556
10^19	234057667276344000	234057667376222000	234057667286384000	10039968	99877760
10^20	2220819602560910000	2220819602783660000	2220819602507750000	-53165312	222744576
10^21	21127269486018700000	21127269486616100000	21127269485766700000	-251990016	597393408
10^22	201467286689315000000	201467286691248000000	201467286688627000000	-687931392	1932361728
10^23	1925320391606800000000	1925320391614050000000	1925320391605950000000	-848035840	7250378752
10^24	18435599767349200000000	18435599767366300000000	18435599767341200000000	-7923040256	17148411904

Таблица значений некоторых функций, подсчитывающих количество простых чисел до заданного, и их разности

Литература

1. Виноградов И.М. Новая оценка значений функции$$ // Изв. АНСССР Сер. матем: 1958. Т22.с. 161-164
2. Дербишир Простая одержимость, М. Астрель, 2010.
3. Иванец Х., Ковальский Э. Аналитическая теория чисел, М. МЦНМО, 2014.
4. Ингам А.Е., Распределение простых чисел, М. УРСС, 2005.
5. Прахар К. Распределение просых чисел, М. Мир, 1967.
6. Сергеев Э.А. Элементы теории чисел, КубГУ, Краснодар, 1998.
7. Сергеев Э.А., Сергеев А.Э., Лаптев В.Н. Теоремы П.Л. Чебышева о рапределении простых чисел и некоторые проблемы, связанные с ними. //политематический сетевой электронный научный журнал КубГАУ, 113(09), 2015.
8. Сергеев Э.А., Сергеев А.Э., Лаптев В.Н. Основная теорема арифметики и некоторые ее приложения // политематический сетевой электронный научный журнал КубГАУ, 113(09), 2015.
9. Трост Э. Простые числа, М. 1959.
10. Харди Г. Двенадцать лекций о Рамануджане, М. 2002.
11. Чебышев П.Л. Полное собрание сочинений, Том 1, М-Л, 1944.
12. Чубариков В.Н. Проблемы распределения простых чисел, связанные с классическеими теоремами П.Л. Чебышева // Вестн. Моск ун-та сер. 1. Математика, Механика. 1991, №5,19-24.
13. Ford K. Vinogradov's integral and bounts for Riemann zeta function, Proc. London Math. Soc. 85, 565-633(2002)
14. Bays C., Hudson R. A new bound for the smallest x with $$. Math. Comp.69, 1285-1296(2000).
15. Kotnok T. The prime-countiong function and its analytic approximations, Adv.Comput. Math.(2008)29:55-70
16. Lehman R.S. On the difference $$. Acta Arithm 11. 397-410 (1966).
17. Riele H.J.J On the sign of difference $$. Math. Comp. 48, 323-328(1987).
18. Skewes S. On the difference $$.Proc. London Math/ Soc 5 (3), 48-70 (1955).

References

1. Vinogradov I.M. Novaja ocenka znachenij funkcii$$ // Izv. ANSSSR Ser. matem: 1958. T22.s. 161-164
2. Derbishir Prostaja oderzhimost', M. Astrel', 2010.
3. Ivanec H., Koval'skij Je. Analiticheskaja teorija chisel, M. MCNMO, 2014.
4. Ingam A.E., Raspredelenie prostyh chisel, M. URSS, 2005.
5. Prahar K. Raspredelenie prosyh chisel, M. Mir, 1967.
6. Sergeev Je.A. Jelementy teorii chisel, KubGU, Krasnodar, 1998.
7. Sergeev Je.A., Sergeev A.Je., Laptev V.N. Teoremy P.L. Chebysheva o rapredelenii prostyh chisel i nekotorye problemy, svjazannye s nimi. //politematicheskij setevoj jelektronnyj nauchnyj zhurnal KubGAU, 113(09), 2015.
8. Sergeev Je.A., Sergeev A.Je., Laptev V.N. Osnovnaja teorema arifmetiki i nekotorye ee prilozhenija // politematicheskij setevoj jelektronnyj nauchnyj zhurnal KubGAU, 113(09), 2015.
9. Trost Je. Prostye chisla, M. 1959.
10. Hardi G. Dvenadcat' lekcij o Ramanudzhane, M. 2002.
11. Chebyshev P.L. Polnoe sobranie sochinenij, Tom 1, M-L, 1944.

12. Chubarikov V.N. Problemy raspredelenija prostyh chisel, svjazannye s klassicheskeimi teoremami P.L. Chebysheva // Vestn. Mosk un-ta ser. 1. Matematika, Mehanika. 1991, №5,19-24.
13. Ford K. Vinogradov's integral and bounts for Riemann zeta function, Proc. London Math. Soc. 85, 565-633(2002)
14. Bays C., Hudson R. A new bound for the smallest x with $$. Math. Comp.69, 1285-1296(2000).
15. Kotnok T. The prime-countiong function and its analytic approximations, Adv.Comput. Math.(2008)29:55-70
16. Lehman R.S. On the difference $$. Acta Arithm 11. 397-410 (1966).
17. Riele H.J.J On the sign of difference $$. Math. Comp. 48, 323-328(1987).
18. Skewes S. On the difference $$.Proc. London Math/ Soc 5 (3), 48-70 (1955).