УДК 517.98: 330.4

01.00.00 Физико-математические науки

ОБРАТНЫЕ ЗАДАЧИ ОПТИМАЛЬНОЙ ОДНОШАГОВОЙ И МНОГОШАГОВОЙ ФИЛЬТРАЦИЙ ОШИБОК ИЗМЕРЕНИЙ ВЕКТОРА

Лайпанова Зульфа Мисаровна
к.ф.-м.н., доцент

Урусова Аза Сейпуловна
доцент
Карачаево-Черкесский государственный университет им. У.Д. Алиева, Карачаевск, КЧР, Россия, ул. Ленина,29

На практике часто возникают задачи определения состояния системы по результатам различных измерений. Измерения обычно сопровождаются случайными ошибками, поэтому следует говорить не об определении состояния системы, а о его оценивании путем стохастической обработки результатов измерений. В монографии Е.А. Семенчина и З.М. Лайпановой была исследована одношаговая фильтрация ошибок измерений вектора спроса в балансовой модели Леонтьева, а также многошаговая оптимальная фильтрация ошибок измерений вектора спроса. В этой статье поставлены и исследованы обратные задачи оптимальной одношаговой и многошаговой фильтрации ошибок измерений вектора спроса. Предлагается методом условной оптимизации и по заданным и известной помехе определить (оценить) элементы матрицы для одношаговой фильтрации ошибок измерений и для многошаговой фильтрации: по заданным переменным и известной помехе определить элементы матрицы. Решение обратной задачи сводится к решению задач условной оптимизации, которое легко определяется в среде MS Excel. Результаты исследований, изложенные в этой статье, представляют значительный интерес в прикладных исследованиях. В статье также сформулирована и предложена методика решения обратной динамической модели Леонтьева

Ключевые слова: ПРЯМЫЕ И ОБРАТНЫЕ ЗАДАЧИ, ПОМЕХИ, КВАДРАТИЧНОЕ ПРОГРАММИРОВАНИЕ, МАТЕМАТИЧЕСКОЕ МОДЕЛИРОВАНИЕ, ДИФФЕРЕНЦИАЛЬНЫЕ УРАВНЕНИЯ

UDC 517.98: 330.4

Physical-Mathematical sciences

THE INVERSE PROBLEM OF OPTIMAL ONE-STEP AND MULTI-STEP FILTERING OF MEASUREMENT ERRORS IN THE VECTOR

Laipanova Zulfa Misarovna
Candidate of Phys.-Math.Sci, associate professor

Urusova Aza Saipulovna
associate Professor
Karachay-Chercassian state University. U. D. Aliev, Karachaevsk, Karachay-Cherkessia, Russia, Lenina str., 29

In practice, we often encounter the problem of determining a system state based on results of various measurements. Measurements are usually accompanied by random errors; therefore, we should not talk about the definition of the system state but its estimation through stochastic processing of measurement results. In the monograph by E. A. Semenchina and M. Z. Laipanova [1] it was investigated for one-step filtering of the measurement errors of the vector of demand in balance model of Leontiev, as well as multistage optimal filtering of measurement errors of the vector of demand. In this article, we have delivered and investigated the inverse problem for the optimal one-step and multi-step filtering of the measurement errors of the vector of demand. For its solution, the authors propose the method of conditional optimization and using given and known disturbance to determine (estimate) the matrix elements for one-step filtering of measurement errors and for multi-stage filtration: for given variables and known disturbance to determine the elements of the matrix. The solution of the inverse problem is reduced to the solution of constrained optimization problems, which is easily determined using in MS Excel. The results of the research have been outlined in this article, they are of considerable interest in applied researches. The article also formulated and the proposed method of solution of inverse in a dynamic Leontiev model

Keywords: DIRECT AND INVERSE PROBLEMS, NOISE, QUADRATIC PROGRAMMING, MATHEMATICAL MODELING, DIFFERENTIAL EQUATIONS

Введение

В монографии Е.А. Семенчина и З.М. Лайпановой [1] была исследована одношаговая фильтрация ошибок измерений вектора спроса в балансовой модели Леонтьева, а также многошаговая оптимальная фильтрация ошибок измерений вектора спроса.

В этой статье сформулированы прямая и обратная задачи в рамках изучаемой модели с одношаговой и многошаговой фильтрацией ошибок измерений вектора спроса в балансовой модели Леонтьева и обратная задача динамической модели Леонтьева, приведены методики решений поставленных обратных задач.

Цель проведённых исследований – разработать методы решения обратных задач для статической балансовой и динамической модели Леонтьева. Использовать полученные результаты для анализа и прогноза развития экономики Северо-Кавказского федерального округа в целом и Карачаево-Черкесской республики, в частности.

1.Постановка задачи для одношаговой фильтрации

Экономико-математическая балансовая модель Леонтьева имеет вид [1,2,3]:

$$x = Ax + f, \quad x \geq \bar{0}, \qquad (1)$$

где

$A-$ заданная технологическая матрица размера $n \times n$;

$f-$ известный вектор спроса размерности n;

$x-$ неизвестный вектор валового производства (выпуска) размерности n;

$\bar{0}-$ нулевой вектор размерности n.

Экономико-математическую балансовую модель Леонтьева (1) представим в виде в виде систем линейных алгебраических уравнений

$$Bx = f, \quad B = E - A, \quad x \geq 0 \quad , \qquad (2)$$

где

$$B = \begin{pmatrix} b_{11} & b_{12} & \dots & b_{1n} \\ b_{21} & b_{22} & \dots & b_{2n} \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ b_{n1} & b_{n2} & \dots & b_{nn} \end{pmatrix}, \quad x = \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ \vdots \\ x_n \end{pmatrix}, \quad f = \begin{pmatrix} f_1 \\ f_2 \\ \vdots \\ f_n \end{pmatrix},$$

т.е. B– матрица размера $n \times n$, x, f – вектор-столбцы размерности n.

В работе [3] решена обратная задача: по заданным значениям

$$x_0 = \begin{pmatrix} x_1^0 \\ x_2^0 \\ \vdots \\ x_n^0 \end{pmatrix}, \quad f_0 = \begin{pmatrix} f_1^0 \\ f_2^0 \\ \vdots \\ f_n^0 \end{pmatrix} \tag{3}$$

определялась матрица B.

Реально элементы $f_i, \; i = 1,\dots,n,$ вектора f не могут быть заданы абсолютно точно, а с некоторыми ошибками, которые, вообще говоря, имеют случайный характер. Поэтому (2), с учётом ошибок измерений f, можно формально представить в виде:

$$Bx + v = f, \quad x \ge 0, \tag{4}$$

где $v = \begin{pmatrix} v_1 \\ v_2 \\ \vdots \\ v_n \end{pmatrix}$ – случайный вектор-столбец ошибок измерений элементов A и f размерности n (вектор помех).

Вектор помех v удовлетворяет следующим условиям [4]:

1. Математическое ожидание v равно нулю:

$Mv = 0$.

2. Известна симметричная положительно определённая матрица ковариаций размера $n \times n$ вектора v:

$$R = M\,(v \cdot v^T)\,.$$

3. Задан вектор ψ размерности n, представляющий собой математическое ожидание (начальное приближение, априорную оценку, прогнозное значение) вектора x из (4):

$$\psi = Mx.$$

4. Задана априорная ковариационная матрица N ошибок решения (размера $n \times n$, симметричная, положительно определённая):

$$N = M[(x-\psi)(x-\psi)^T].$$

В монографии Семенчина Е.А. и Лайпановой З.М. [1] была найдена оценка γ путем решения следующей задачи квадратичного программирования: по измеренному f найти неотрицательный вектор γ, учитывающий результаты измерений f и доставляющий минимум $M|\gamma - x|^2$, где x – решение системы (2).

Данная задача представляет задачу оптимальной линейной фильтрации. Согласно [4, 7] она может быть сведена к решению следующей задачи квадратичного программирования:

$$(Bx - f)^T R^{-1}(Bx - f) + (x-\psi)^T N^{-1}(x-\psi) \to \min_x, \quad x \geq 0. \quad (5)$$

При случайном v указанным методом определить B из соотношения (4) очевидно, невозможно.

В данной работе исследуем следующую обратную задачу: по заданным x, f и известной помехе v определить (оценить) элементы матрицы B.

2. Метод решения поставленной задачи

Для решения данной обратной задачи воспользуемся методом фильтрации («подавления») помехи («шума») v в системе (4), описанным [1,4]. Согласно этому методу оптимальную в среднеквадратическом оценку $\bar{x}_0$ вектора x_0 определяем из соотношения:

$$\bar{x}_0 = \psi + (N^{-1} + B^T \cdot R^{-1} \cdot B)^{-1} \cdot B^T R^{-1}(f - B\psi),$$

или

$$(N^{-1} + B^T \cdot R^{-1} \cdot B)(\bar{x}_0 - \psi) = B^T R^{-1}(f - B\psi), \quad (6)$$

где ψ – априорная оценка (прогноз) вектора x.

Положим $\bar{x}_0 = x_0$, тогда решение обратной задачи сводится к задаче условной оптимизации:

$$\left|Bx_0 - f\right| \to \min_B, \tag{7}$$

где B удовлетворяет условию (6).

3. Постановка задачи для многошаговой фильтрации

Пусть теперь вектор f измеряется не один раз, а многократно: k раз, $k \geq 1$. Пусть $v_k = col\left(v_1^{(k)}, v_2^{(k)}, \ldots, v_n^{(k)}\right)$ – вектор-столбец случайных ошибок k-го результата измерений компонент вектора f. Кроме того, матрицы R, N, вектор ψ заранее неизвестны. В этом случае задачу фильтрации: найти оценку γ решения x уравнения (2) или что тоже самое – уравнения (1), построенную с учетом результатов измерений f и доставляющей минимум $M\left|\gamma - x\right|^2$, можно решить следующим образом [1].

Систему (2), в которой учитываются ошибки измерений v_k вектора f на каждом шаге $k = 1, 2, \ldots$, можно представить в виде

$$Bx + v_k = f, \quad x \geq 0, \; k = 1, 2, \ldots \tag{8}$$

И пусть вектор помех v_k удовлетворяет следующим условиям [4]:

1. Пусть математическое ожидание v_k, $k = 1, 2, \ldots$ равно нулю: $Mv_k = 0.$
2. Известна симметричная положительно определённая матрица ковариаций размера $n \times n$ вектора v:

$R = M(v \cdot v^T).$

Обозначим через R_k – матрицу размера $n \times n$, элементы которой $r_{ij}^{(k)}$ имеют вид

$$r_{ij}^{(k)} = \frac{1}{k}\sum_{q=1}^{k} v_i^{(q)} v_j^{(q)}, \quad i, j = 1, \ldots, n \tag{9}$$

3. Задан вектор ψ размерности n, представляющий собой математическое ожидание (начальное приближение, априорную оценку, прогнозное значение) вектора x из (4):

$$\psi_i^{(k)} = \frac{1}{k}\sum_{q=1}^{k} x_i^{(q)}, \tag{10}$$

где $x_i^{(q)} - i$-я компонента вектора x_q, полученного на $q-$м шаге измерения f, представляющая собой статистическую оценку компоненты $\psi_i = Mx_i$ вектора $\psi = Mx$;

4. Задана априорная ковариационная матрица N_k- матрица с элементами

$$n_{ij}^{(k)} = \frac{1}{k}\sum_{q=1}^{k}\left(x_i^{(q)} - \psi_i^{(q)}\right)\left(x_j^{(q)} - \psi_j^{(q)}\right),$$

представляющими собой статистические оценки элементов

$$n_{ij} = M\left(x_i - \psi_i\right)\left(x_j - \psi_j\right)$$

симметричной положительно определенной ковариационной матрицы $N = M[(x-\psi)(x-\psi)^T]$ размера $n \times n$.

В работе Семенчина Е.А. и Лайпановой З.М.[1] была найдена оценка γ путем решения следующей задачи квадратичного программирования:

$$\left(Bx - f\right)^T R_k^{-1}\left(Bx - f\right) + \left(x - \psi\right)^T N_k^{-1}\left(x - \psi_k\right) \to \min_x, \quad x \ge 0. \tag{11}$$

При случайном v_k указанным методом определить B из соотношения (8) также невозможно.

Тогда исследуем следующую обратную задачу: по заданным x^k, f и известной помехе v_k определим (оценим) элементы матрицы B.

4. Метод решения поставленной задачи

Согласно этому методу оптимальную в среднем квадратическом оценку $\overline{x}_0^k$ вектора x_0^k определяем из соотношения:

$$\overline{x}_0^k = \psi_k + (N_k^{-1} + B^T \cdot R_k^{-1} \cdot B)^{-1} \cdot B^T R_k^{-1}(f - B\psi_k),$$

или

$$(N_k^{-1} + B^T \cdot R_k^{-1} \cdot B)(\overline{x}_0^k - \psi_k) = B^T R_k^{-1}(f - B\psi_k)\,, \tag{12}$$

где ψ_k – априорная оценка (прогноз) вектора x^k. Положим $\overline{x}_0^k = x_0^k$, тогда решение обратной задачи сводится к задаче условной оптимизации:

$$\left|Bx_0^k - f\right| \to \min_B\,, \tag{13}$$

где B удовлетворяет условию (12).

Подробный анализ решений этих задач можно провести инструментальными средствами, в частности, табличным процессором Microsoft Excel.

5. Динамическая модель Леонтьева

Динамическая модель Леонтьева представляет собой систему дифференциальных уравнений [1,6]:

$$y(t) = K(t)\frac{dy(t)}{dt} + \bar{C}(t),\, t \in [0, T], \tag{14}$$

$$y(0) = y_0, \tag{15}$$

где $y(t)$ – вектор-столбец национального дохода размерности n, $K(t)$ – матрица размера $n \times n$ коэффициентов полных затрат производственных накоплений на единичные приросты элементов используемого дохода,

$$K(t) = \left(E - A(t)\right)^{-1} B(t),\;\; \bar{C}(t) = \left(E - A(t)\right)^{-1} C(t), \tag{16}$$

$A(t)$ – матрица коэффициентов прямых материальных затрат, $B(t)$ – матрица коэффициентов производственного накопления на единицу прироста соответствующих видов продукции, $C(t)$ – вектор-столбец потребления размерности n, E – единичная матрица.

Обычно рассматривается следующая прямая задача в рамках модели (14): по заданным $C(t)$, $B(t)$, $A(t)$ найти $y(t)$.

В системе (14) - (16) не учитываются случайные помехи (шумы), которые реально возникают при измерении коэффициентов уравнения (14) и функции, тогда в данном пункте в рамках модели (14) рассматривается другая задача – обратная: по заданным векторам модели (14) в текущий момент времени - вектору конечного производства $C(t)$, вектору валовых выпусков $y(t)$ найти матрицу $B(t)$ с неотрицательными элементами.

На практике значения $C(t)$ и $y(t)$ в дискретные моменты времени $t_0, t_1, \ldots, t_n \in [0,T]$ задаются таблично (таблица 1.)

Таблица 1. Значений векторов конечного производства и валовых выпусков

t_0	t_1	t_2	$\cdots$	t_n
$X(t_0)$	$X(t_1)$	$X(t_2)$	$\cdots$	$X(t_n)$
$Y(t_0)$	$Y(t_1)$	$Y(t_2)$	$\cdots$	$Y(t_n)$

Модель (14) и используя (16) представим в виде:

$$\frac{dY}{dt} = B^{-1}(E-A)Y - B^{-1}c(t), \quad Y(0) = Y_0 \tag{17}$$

Из модели (14) и данных таблицы, вытекает следующая система алгебраических уравнений,

$$\begin{cases} Y'(t_1) = B^{-1}(E-A)Y - B^{-1}C(t_1), \\ Y'(t_2) = B^{-1}(E-A)Y - B^{-1}C(t_2), \\ \dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots \\ Y'(t_n) = B^{-1}(E-A)Y - B^{-1}C(t_n), \end{cases}, \tag{18}$$

в которой неизвестными являются коэффициенты матрицы $B(t)$ (производные $Y'(t_1)$, $Y'(t_2)$, …, $Y'(t_n)$ находим численными методами [5]).

Группируя уравнения системы (18), построим систему из n уравнений.

Построив решения этой системы, найдём m приближённых значений b.

Решая задачу квадратичного программирования:

$$\begin{cases} (b-b_{11})^2+(b-b_{12})^2+\ldots+(b-b_{1n})^2 \to \min, \\ (b-b_{21})^2+(b-b_{22})^2+\ldots+(b-b_{2n})^2 \to \min, \\ \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \\ (b-b_{m1})^2+(b-b_{m2})^2+\ldots+(b-b_{mn})^2 \to \min, \end{cases} \tag{19}$$

$$0 \le b_{ij} \le 1,$$

с помощью средств Microsoft Excel найдём наилучшие в среднем квадратическом смысле оценки $\bar{b}$.

Выводы

Во всех пунктах сформулированы прямые и обратные задачи в рамках изучаемых моделей, приведена методика решения поставленных обратных задач. Эта методика основана на следующей схеме решения.

По заданным таблично параметрам прямой задачи, строится система алгебраических уравнений, содержащая в качестве неизвестных оцениваемые параметры изучаемой модели. После этого поставленная обратная задача сводится к решению задачи условной оптимизации, решения которой определяются с помощью надстройки «Поиск решения» в среде MS Excel.

По указанной схеме исследованы и предложены алгоритмы построения решений обратных задач в статических и динамических балансовых моделях Леонтьева.

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. Семенчин Е.А., Лайпанова З.М. Корректность и стохастическая регуляризация математических моделей, описывающих экономические и эколого-биологические процессы.– Краснодар: Просвещение – Юг, 2009. – 121с.
2. Кундышева Е.С. Математическое моделирование в экономике. М.: Издательско-торговая корпорация «Дашков и K^0», 2006. 352с.
3. Семенчин Е.А., Урусова А.С. Обратные задачи в экономических балансовых моделях и моделях экономического роста.– Краснодар: Просвещение – Юг, 2009. – 142с.
4. Сизиков В.С. Математические методы обработки результатов измерений. – СПб.: Политехника, 2001. – 240с.
5. Вержбицкий В.М. Численные методы. - М.: Высшая школа, 2001. – 189с.

6. Колемаев В.А. Математическая экономика: Учебник для вузов. – М.: ЮНИТИ – ДАНА, 2002. – 399с.
7. Иманалиев М.И. Методы решения нелинейных обратных задач и их приложение. – Фрунзе: Изд – во ИЛИМ, 1977. – 346 с.

REFERENCES

1. 1. Semenchin E.A., Lajpanova Z.M. Korrektnost' i stohasticheskaja reguljarizacija matematicheskih modelej, opisyvajushhih jekonomicheskie i jekologo-biologicheskie processy.– Krasnodar: Prosveshhenie – Jug, 2009. – 121s.
2. 2. Kundysheva E.S. Matematicheskoe modelirovanie v jekonomike. M.: Izdatel'sko-torgovaja korporacija «Dashkov i », 2006. 352s.
3. 3. Semenchin E.A., Urusova A.S. Obratnye zadachi v jekonomicheskih balansovyh modeljah i modeljah jekonomicheskogo rosta.– Krasnodar: Prosveshhenie – Jug, 2009. – 142s.
4. 4. Sizikov V.S. Matematicheskie metody obrabotki rezul'tatov izmerenij. – SPb.: Politehnika, 2001. – 240s.
5. 5. Verzhbickij V.M. Chislennye metody. - M.: Vysshaja shkola, 2001. – 189s.
6. 6. Kolemaev V.A. Matematicheskaja jekonomika: Uchebnik dlja vuzov. – M.: JuNITI – DANA, 2002. – 399s.
7. 7. Imanaliev M.I. Metody reshenija nelinejnyh obratnyh zadach i ih prilozhenie. – Frunze: Izd – vo ILIM, 1977. – 346 s.