УДК 519.642.8

UDC 519.642.8

01.00.00 Физико-математические науки

Physics and Math

ТЕОРЕМЫ П.Л. ЧЕБЫШЕВА О РАСПРЕДЕЛЕНИИ ПРОСТЫХ ЧИСЕЛ И НЕКОТОРЫЕ ПРОБЛЕМЫ, СВЯЗАННЫЕ С НИМИ

THE THEOREMS OF CHEBYSHEV ABOUT THE DISTRIBUTION OF PRIME NUMBERS AND SOME PROBLEMS, CONNECTED WITH PRIME NUMBERS

Лаптев Владимир Николаевич
к.т.н., доцент
Кубанский государственный аграрный университет, Краснодар, Россия

Laptev Vladimir Nikolaevich
Cand.Tech.Sci., associate professor
Kuban State Agrarian University, Krasnodar, Russia

Сергеев Александр Эдуардович
к.ф.-м.н, доцент

Sergeev Alexander Eduardovich
Cand.Phys.-Math.Sci., associate professor

Сергеев Эдуард Александрович
к.ф.-м.н, доцент
Кубанский государственный университет, Краснодар, Россия

Sergeev Eduard Alexandrovich
Cand.Phys.-Math.Sci., associate professor
Kuban State University, Krasnodar, Russia

В статье приводятся теоремы Чебышева о распределении простых чисел, рассматриваются функции, приближающие простые числа, а также вводится новая функция, достаточно хорошо приближающая простые числа. Приводится обзор известных результатов по распределению простых чисел

The article presents the theorem of Chebyshev on the distribution of primes, considering functions that approximated prime numbers. We have also considered a new function, which is quite good for approximation of prime numbers. A review of the known results on distribution of prime numbers is given as well

Ключевые слова: ПРОСТЫЕ ЧИСЛА, РАСПРЕДЕЛЕНИЕ ПРОСТЫХ ЧИСЕЛ

Keywords: PRIME NUMBERS, DISTRIBUTION OF PRIME NUMBERS

Натуральные числа, отличные от единицы, подразделяются на два класса: простые числа 2, 3, 5, 7, 11, 13, 17, … , имеющие только два натуральных делителя – единицу и самого себя, и составные числа 4, 6, 8, 9, 10, 12, 14, 15, 16, … , имеющие больше двух различных натуральных делителей.

Эвклид еще во II веке до нашей эры [1] доказал, что не существует наибольшего простого числа, т.е. в натуральном ряде имеется бесконечно много простых чисел.

Обозначая число простых чисел, меньших ил равных натурального числа x через $\pi(x)$, можно теорему Эвклида записать в виде $\pi(x)\to\infty$, если $x\to\infty$.

Изучая таблицы простых чисел, можно заметить, что с увеличением x отношение $\frac{\pi(x)}{x}$ (так называемая «средняя плотность» простых чисел на отрезке натуральных чисел от 1 до x) все время убывает. Эйлер впервые, но не совсем строго, доказал что $\lim_{x\to\infty}\frac{\pi(x)}{x}=0,$ позднее Лежандр в 1798 году доказал этот факт строго.

Основная проблема теории распределения простых чисел состоит в исследовании функции $\pi(x)$, значения которой при изменении x могут быть очень нерегулярны.

Перед математиками XVIII и XIX веков возникла проблема нахождения аналитической функции $f(x)$ приближающей $\pi(x)$ со сколь угодно малой относительной погрешностью при достаточно больших значениях x, т.е. должно выполняться соотношение: $\lim_{x\to\infty}\frac{\pi(x)-f(x)}{\pi(x)}=\lim_{x\to\infty}\left(1-\frac{f(x)}{\pi(x)}\right)=0.$

Последнее соотношение равносильно такому: $\lim_{x\to\infty}\frac{\pi(x)}{f(x)}=1.$ Две положительные функции $g(x)$ и $h(x)$, определенные для действительных положительных значений x, называются асимптотически равными, если $\lim_{x\to\infty}\frac{g(x)}{h(x)}=1,$ при этом пишут $g(x)\approx h(x)$.

Первая проблема распределения простых чисел состоит в том, чтобы найти достаточно простую аналитическую функцию $f(x)$, асимптотически равную $\pi(x)$.

Вторая проблема: среди аналитических функций определенного класса, асимптотически равных $\pi(x)$ найти функцию, наилучшим образом приближающую $\pi(x)$ на всем ряде натуральных чисел, или на каком то достаточно большом его начальном отрезке.

Третья проблема: исследовать свойства самой функции $\pi(x)$.

Первая проблема решена еще в XIX веке, по второй и третьей проблемам результатов немного.

Пусть a – положительная постоянная, $f(x)$ и $g(x)$ – функции, $h(x)$ – положительная функция и для всех достаточно больших x выполняется неравенство $|f(x)-g(x)|\le a\cdot h(x),$ в этом случае пишут $f(x)=g(x)+O(h(x))$ и говорят, что $g(x)$ приближает $f(x)$ с точностью до величины порядка $h(x)$.

А.М. Лежандр в 1798 году в книге «Теория чисел» предположил, исходя из вычислений, что выражение $\frac{x}{\ln x}$ довольно точно приближает $\pi(x)$, если x не превышает 10^5. Позднее в 1808 году Лежандр предположил, что функция $\Lambda(x)=\frac{x}{\ln x-1{,}08366}$ асимптотически приближает $\pi(x)$. Приблизительно в эти годы К.Ф. Гаусс, составляя таблицы простых чисел, пришел к выводу, что интегральный логарифм $Li(x)=\int_2^x\frac{dt}{\ln t}$ лучше приближает $\pi(x)$ чем $\frac{x}{\ln x}$, и это впоследствии подтвердилось. Легко заметить, что $\frac{x}{\ln x}\approx Li(x)$, поэтому если $\lim_{x\to\infty}\left(\pi(x):\frac{x}{\ln x}\right)=1,$ то и $\lim_{x\to\infty}\left(\pi(x):\int_2^x\frac{dt}{\ln t}\right)=1.$ Эти соотношения составляют асимптотический закон распределения простых чисел, справедливость которого предполагали, но не доказали Гаусс и Лежандр.

Хотя функция $\Lambda(x)$ Лежандра хорошо приближает $\pi(x)$ приблизительно до $x=2\cdot10^6$, однако с увеличением x ее точность падает и как показал П.Л. Чебышев в 1848 году, среди функций вида $\frac{x}{Ax+B}$ на всем ряде натуральных чисел функция $Ч(x)=\frac{x}{\ln x-1}$ наиболее точно приближает $\pi(x)$.

Первый существенный вклад в решение проблем, связанных с распределением простых чисел, внес П.Л. Чебышев. Из его двух знаменитых мемуаров 1848 и 1852 годов берут своё начало «элементарные методы» теории распределения простых чисел, т.е. методы, не использующие теорию функций комплексного переменного и др.

В первом мемуаре [2] П.Л. Чебышев доказал пять замечательных теорем, три из которых следующие (в его нумерации).

Теорема II. *От* $x = 2$ *до* $x = \infty$ *функция* $\pi(x)$, *означающая число простых чисел, меньших* x, *удовлетворяет бесконечное число раз и неравенству* $\pi(x) > \int_2^x \frac{dt}{\ln t} - \frac{\alpha x}{\ln^n x}$ *и неравенству* $\pi(x) < \int_2^x \frac{dt}{\ln t} + \frac{\alpha x}{\ln^n x}$, *как бы* α, *оставаясь количеством положительным, ни было мало, а* n *ни было велико.*

Из этой теоремы Чебышева следует, что если $\lim\limits_{x\to\infty}\left(\pi(x) : \int_2^x \frac{dt}{\ln t}\right)$ существует, то он должен быть равен единице, что и было в 1896 году доказано Ж. Адамаром и независимо от него Валле – Пуссеном.

Из теоремы II выводим также факт колебания $\pi(x)$ около $Li(x)$, что в более точной формулировке было доказано Литтльвудом в 1914 году: разность $\pi(x) - Li(x)$ бесконечное число раз меняет знак и выполняется условие $\pi(x) = Li(x) + O\left(x \cdot e^{-a\cdot\sqrt{\ln x \cdot \ln\ln x}}\right)$ с некоторой положительной константой a.

Теорема IV. *Если выражение* $\frac{\ln^n x}{x} \cdot \left(f(x) - \int_2^x \frac{dt}{\ln t}\right)$ *при* $x \to \infty$ *имеет пределом количество конечное или бесконечность, то* $f(x)$ *не может представлять* $\pi(x)$ *до количеств порядка* $\frac{x}{\ln^n x}$ *включительно.*

Из теоремы II вытекает справедливость теоремы III.

Теорема III. *Выражение* $\frac{x}{\pi(x)} - \ln x$ *при* $x = \infty$ *не может иметь пределом количество, отличное от* -1.

Из теоремы III следует что формула Лежандра для нахождения значений $\pi(x)$ при $x \to \infty$ неверна, а вот функция $\frac{x}{\ln x - 1}$ могла бы выразить верно $\pi(x)$ до количеств порядка $\frac{x}{\ln^n x}$ включительно.

Что же касается до выбора функции, наиболее точно выражающей $\pi(x)$, то относительно ее П.Л. Чебышев доказывает такую теорему:

Теорема V. *Если функция* $\pi(x)$, *определяющая число простых чисел, меньших* x, *может быть выражена верно до количеств порядка* $\frac{x}{\ln^n x}$ *включительно алгебраически в* x, $\ln x$, e^x, *то такое выражение есть*

$$\frac{x}{\ln x} + \frac{1 \cdot x}{\ln^2 x} + \frac{1 \cdot 2 \cdot x}{\ln^3 x} + \ldots + \frac{1 \cdot 2 \cdot 3 \cdot \ldots \cdot (n-1)x}{\ln^n x}.$$

Если принять во внимание равенство

$$Li(x) = \frac{x}{\ln x} + \frac{1 \cdot x}{\ln^2 x} + \frac{1 \cdot 2 \cdot x}{\ln^3 x} + \ldots + \frac{(k-1)!x}{\ln^n x} + \ldots,$$

то из теоремы V следует, что функция $Li(x)$ аппроксимирует $\pi(x)$ на всем ряде натуральных чисел с точностью до $\frac{x}{\ln^n x}$ при любом фиксированном натуральном n для всех достаточно больших x, но этим свойством обладают и многие другие функции. Например, из теоремы IV следует, что таким свойством обладает функция $H(x)$:

$$H(x) = \frac{2x}{\ln x + \sqrt{\ln^2 x - 4\ln x - \frac{\ln 5 \cdot \ln(\ln x)}{\ln x}}}.$$

Будем в дальнейшем использовать для аппроксимации $\pi(x)$ функцию $H(x)$.

Так как функция $H(x)$, в среднем (на основании теоремы IV) на всем ряде натуральных чисел аппроксимирует $\pi(x)$ с тем же порядком точности, что и $Li(x)$, то можно сформулировать гипотезу.

Гипотеза 1. *Разность* $\pi(x)-H(x)$ *при* $x\to\infty$ *бесконечное число раз меняет знак*.

Новые идеи в теорию распределения простых чисел внес Б. Риман в 1850 году в мемуаре [3], где была рассмотрена дзета-функция $\zeta(s)$ с комплексными $s=\delta+i\tau$ и была установлена связь между нулями $\zeta(s)$ и функцией $\pi(x)$. Заметим, что для доказательства своих теорем Чебышев первый рассмотрел поведение дзета-функции $\zeta(s)=\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n^s}$ вещественного переменного s, вблизи ее единственного полюса $s=1$ и пользовался производными от $\zeta(s)$ и $\ln\zeta(s)$.

Риман ввел в рассмотрение функцию $f(x)$:

$$f(x)=\pi(x)+\frac{1}{2}\pi(\sqrt{x})+\frac{1}{3}\pi(\sqrt[3]{x})+\ldots+\frac{1}{n}\pi(\sqrt[n]{x})+\ldots$$

(1)

что позволило, используя формулу обращения Мебиуса, представить $\pi(x)$ в форме:

$$\pi(x)=f(x)-\frac{1}{2}f(\sqrt{x})-\frac{1}{3}f(\sqrt[3]{x})-\frac{1}{5}f(\sqrt[5]{x})+\frac{1}{6}f(\sqrt[6]{x})-\ldots=\sum_{1}^{\infty}\frac{\mu(m)}{m}f(x^{\frac{1}{m}}),$$

(2)

где $\mu(x)$ – функция Мебиуса. Заменяя в равенстве (2) функцию $f(x)$ на $Li(x)$ (это, конечно гипотетическая замена, основанная на уверенности Римана, что $Li(x)$ всегда больше $\pi(x)$! Однако сейчас, в настоящее время, мы знаем, что это не так!) получаем известную функцию Римана $R(x)$:

$$R(x)=Li(x)-\frac{1}{2}Li(\sqrt{x})-\frac{1}{3}Li(\sqrt[3]{x})-\frac{1}{5}Li(\sqrt[5]{x})+\ldots=\sum_{n=1}^{\infty}\frac{\mu(n)}{n}Li(x^{\frac{1}{n}}),$$

(3)

хорошо аппроксимирующую $\pi(x)$ в пределах существующих таблиц. Очень удобное выражение для вычисления $R(x)$, получен Гремом в 1884 году:

$$R(x) = 1 + \frac{\ln x}{S_2} + \frac{(\ln x)^2}{S_3 \cdot 2 \cdot 2!} + \frac{(\ln x)^3}{S_4 \cdot 3 \cdot 3!} + \frac{(\ln x)^4}{S_4 \cdot 4 \cdot 4!} + ...,$$

(4)

где S_r – сумма ряда $1 + \frac{1}{2^r} + \frac{1}{3^r} + \frac{1}{4^r} + ...$.

Риман дал следующую точную формулу для $\pi(x)$ в терминах своей функции $R(x)$:

$$\pi(x) = R(x) - \sum_{\rho} R(x^{\rho}),$$

(5)

где суммирование распространено на все нетривиальные нули дзета-функции $\zeta(s)$ с учетом их кратности.

Риман утверждал, что комплексные нули $\rho = \delta + i\tau$ дзета-функции $\zeta(s)$, отличные от так называемых «тривиальных» нулей $\rho = -2, -4, -6, ...,$ содержатся на комплексной плоскости в бесконечной полосе $0 \le \delta \le 1$ и симметрично расположены относительно ее центральной прямой $\delta = \frac{1}{2}$. Впоследствии это утверждение было доказано Адамаром.

Кроме того, Риман предположил, что нетривиальные комплексные нули дзета-функции все имеют вещественную часть δ, находящуюся на прямой $\delta = \frac{1}{2}$. Это предположение есть знаменитая гипотеза Римана, не доказанная до сих пор, хотя она подтверждается вычислениями более 10 миллиардами нулей дзета-функции.

В 1896 году Ж. Адамар и независимо от него Валле-Пуссен с помощью теории функций комплексного переменного доказали, что на прямой $\delta = 1$ комплексной плоскости нет нулей $\rho = \delta + i\tau$ дзета-функции, что позволило установить справедливость асимптотического закона распределения простых чисел в форме:

$$\pi(x) \approx Li(x) \approx \frac{x}{\ln x}.$$

Валле-Пуссен доказал даже больше:

$$\pi(x) = Li(x) + O\left(x \cdot e^{-a\sqrt{\ln x}}\right),$$

с некоторой положительной константой a. Впоследствии этот результат улучшался Литтльвудом, И. М. Виноградовым [6], Н.Г. Чудаковым [5], А.А. Карацубой [8].

Известно, что если θ – верхний предел вещественной части нулей дзета-функции Римана, то $\pi(x) = Li(x) + O\left(x^{\theta} \ln x\right)$. Таким образом, если гипотеза Римана верна, то $\theta = \frac{1}{2}$ и

$$\pi(x) = Li(x) + O\left(\sqrt{x} \ln x\right). \tag{6}$$

Однако, как показывают таблицы, вполне возможна и лучшая оценка:

$$\pi(x) = Li(x) + O\left(\sqrt{x}\right). \tag{7}$$

Сформулируем еще одну правдоподобную гипотезу.

Гипотеза 2. Если аналитическая непрерывная функция $f(x)$ аппроксимирует функцию $\pi(x)$ верно до количеств порядка $\frac{x}{\ln^n x}$ для любого фиксированного натурального числа n при любом достаточно большом x, зависящем от n, то разность $f(x) - \pi(x)$ при $x \to \infty$ бесконечное число раз меняет знак.

Введем в рассмотрение еще одну интересную функцию $S(x)$ [13] для аппроксимации $\pi(x)$:

$$S(x) = Li(x) - x^{\delta},$$

где $\delta = \frac{1}{2} + \frac{\alpha}{\ln x}$, $\alpha = 17{,}52816876...$. Составим таблицу разностей $\Delta L(x) = Li(x) - \pi(x)$, $\Delta S(x) = S(x) - \pi(x)$, $\Delta H(x) = H(x) - \pi(x)$.

Функции $Li(x)$, $S(x)$, $H(x)$ одинаково хорошо в среднем аппроксимируют $\pi(x)$ на всем ряде натуральных чисел, ввиду теоремы IV Чебышева, но на определенном конечном отрезке $[2, x]$ чисел натурального ряда они с разной точностью аппроксимируют $\pi(x)$, как показывает таблица. И хотя функция Римана $R(x)$ в пределах современных существующих таблиц лучше аппроксимирует $\pi(x)$ чем $Li(x)$, но с ростом x ее колебания относительно $\pi(x)$ становятся все больше и в результате ее преимущество в аппроксимации $\pi(x)$ над $Li(x)$ становятся иллюзорными, как отметим Ингам [7].

Таблица

x	$\Delta Li(x)$	$\Delta H(x)$	$\Delta S(x)$	$\Delta R(x)$	$\pi(x)$
10^2	+5	+8	+2	+1	25
10^3	+10	+7	+5	0	168
10^4	+17	+15	+6	–2	1226
10^5	+38	+25	+11	–5	9592
10^6	+130	+130	+47	+29	78498
10^7	+339	+704	+154	+88	664579
10^8	+754	+1335	+240	+97	5761455
10^9	+1701	+263	+247	–79	50847534
10^{10}	+3104	–1604	–1079	–1828	455052511
10^{11}	+11588	+4737	–611	–2318	4118054813
10^{12}	+38263	+47692	+2357	–1476	37607912018

Отметим теперь некоторые свойства самой функции $\pi(x)$: П. Л. Чебышев в 1850 году доказал неравенство [2]:

$$c_2 \cdot \frac{x}{\ln x,} < \pi(x) < c_1 \cdot \frac{x}{\ln x},$$

где $c_1 = 0{,}89$, $c_2 = 1{,}11$. В 1882 году Сильвестр усовершенствовал метод Чебышева и получил $c_1 = 0{,}95095$, $c_2 = 1{,}04423$ при достаточно больших x.

В 1845 году Бертран высказал следующее предположение: между n и $2n$ при $n \geq 2$ находится по крайней мере одно простое число, т.е. $\pi(2n) - \pi(n) \geq 1$ при $n \geq 2$.

Чебышев доказал в 1852 году этот постулат Бертрана как следствие найденных им оценок функции $\pi(x)$.

Более точная современная оценка разности $\pi(2n) - \pi(n)$ при $n \geq 5$ выглядит так:

$$1 < \frac{n}{3\ln n} < \pi(2n) - \pi(n) < \frac{7n}{5\ln n}.$$

Ишикава в 1934 году, используя результаты Чебышева, доказал, что:

$$\pi(x \cdot y) > \pi(x) + \pi(y)$$

при $x \geq y > 2$ и $x \geq 6$.

Доказана также справедливость таких неравенств (при $x \geq 11$):

$$\pi(x + y) \leq \pi(x) + 2\pi(y), \quad \pi(2x) \leq 2 \cdot \pi(x).$$

Однако неизвестно, будет ли всегда справедливо неравенство:

$$\pi(x + y) \leq \pi(x) + \pi(y), \quad x \geq y \geq 3.$$

И хотя предыдущее неравенство выглядит вполне правдоподобно, но причудливое, иррегулярное поведение функции $\pi(x)$ ставит справедливость этого неравенства под сомнение.

Подводя итог мы видим насколько значимы приведенные теоремы Чебышева. Отметим, что в 1949 году А. Сельберг дополнив идеи Чебышева собственными принципиальными соображениями нашел доказательство асимптотического закона распределения простых чисел, не используя, подобно Адамару и Валле-Пуссену, теорию функций комплексного переменного. Это было Мировой сенсацией в математике так как многие известные математики считали, что это невозможно!

Как было упомянуто раньше, Литтльвуд доказал в 1914 году, что разность $Li(x)-\pi(x)$ при $x \to \infty$ бесконечное число раз меняет знак. Тем не менее в пределах таблиц разность $Li(x)-\pi(x)$ положительна и быстро увеличивается с ростом x. Каковы те натуральные числа x_0, для которых $Li(x_0)-\pi(x_0)<0$? Во времена Литтльвуда считали, что эти числа невообразимо большие, однако Леман в 1966 году доказал, что между $1{,}53 \cdot 10^{1165}$ и $1{,}65 \cdot 10^{1165}$ имеется интервал, содержащий по меньшей мере 10^{500} чисел, для которых $\pi(x) > Li(x)$ и нет ни одного числа, меньшего 10^{20} с таким свойством. Позже, в 1987 году Риел доказал, что уже между $6{,}62 \cdot 10^{370}$ и $6{,}9 \cdot 10^{370}$ существует более 10^{180} таких различных целых чисел x, что $Li(x) < \pi(x)$!

Таким образом, функция $\pi(x)$ по прежнему весьма загадочна, необычна и современным математикам и математикам будущего еще предстоит много работы по разгадыванию и доказательству ее замечательных свойств!

ЛИТЕРАТУРА

1. Прахар К. Распредение простых чисел. М. Мир. 1987.
2. Чебышев П.Л. Избранные труды. М. АН СССР 1956.
3. Риман Б. Сочинения. М.-Л. ОГИЗ. 1948.
4. Чудаков Н.Г. О нулях $\zeta(x)$. // ДАН СССР. 1936. Т1, № 1, с. 187 – 201.
5. Виноградов И.М. Новая оценка функции $\zeta(1+i\tau)$ // Изв. АН СССР. Матеем. 1958. Т.22, № 2. с. 161 – 164.
6. Карацуба А.А. Распределение простых чисел // Успехи матем. Наук. 1990. Т. 45. вып. 5. с. 81 – 140.
7. Ингам. А.Э. Распределение простых чисел. М.-Л. ОНГИ. 1936.
8. Трост Э. Простые числа. М. 1959.

9. Цагир Д. Первые 50 млн. простых чисел // Живые числа. Пять экскурсий. М. Мир. 1985. с. 42 – 71.
10. Воронин С.М. Простые числа. М. Знание. 1978.
11. Чубариков В.Н. Проблемы распределения простых чисел, связанные с классическими теоремами П.Л. Чебышева // Вестн. Моск. Ун-та. Матеем. 1991. № 5. с. 19 -24.
12. Рибенбойм М. Рекорды в исследованиях простых чисел. СПб. Изд-во СПбГУ. 2002. 284с.
13. Сергеев Э.А. Элементы теории чисел. КубГу. Краснодар. 1998.
14. Иванец Х., Ковалевский Э. Аналитическая теория чисел. Москва. МЦНМО. 2014.

References

1. Prahar K. Raspredenie prostyh chisel. M. Mir. 1987.
2. Chebyshev P.L. Izbrannye trudy. M. AN SSSR 1956.
3. Riman B. Sochinenija. M.-L. OGIZ. 1948.
4. Chudakov N.G. O nuljah . // DAN SSSR. 1936. T1, № 1, s. 187 – 201.
5. Vinogradov I.M. Novaja ocenka funkcii // Izv. AN SSSR. Mateem. 1958. T.22, № 2. s. 161 – 164.
6. Karacuba A.A. Raspredelenie prostyh chisel // Uspehi matem. Nauk. 1990. T. 45. vyp. 5. s. 81 – 140.
7. Ingam. A.Je. Raspredelenie prostyh chisel. M.-L. ONGI. 1936.
8. Trost Je. Prostye chisla. M. 1959.
9. Cagir D. Pervye 50 mln. prostyh chisel // Zhivye chisla. Pjat' jekskursij. M. Mir. 1985. s. 42 – 71.
10. Voronin S.M. Prostye chisla. M. Znanie. 1978.
11. Chubarikov V.N. Problemy raspredelenija prostyh chisel, svjazannye s klassicheskimi teoremami P.L. Chebysheva // Vestn. Mosk. Un-ta. Mateem. 1991. № 5. s. 19 -24.
12. Ribenbojm M. Rekordy v issledovanijah prostyh chisel. SPb. Izd-vo SPbGU. 2002. 284s.
13. Sergeev Je.A. Jelementy teorii chisel. KubGu. Krasnodar. 1998.
14. Ivanec H., Kovalevskij Je. Analiticheskaja teorija chisel. Moskva. MCNMO. 2014.