УДК 004.023

05.00.00 Технические науки

МЕТОД ПОСТРОЕНИЯ ОКРЕСТНОСТИ СТАТИСТИЧЕСКОГО ОПТИМУМА В ЗАДАЧЕ ПОТРЕБЛЕНИЯ НЕВОЗОБНОВЛЯЕМЫХ РЕСУРСОВ[1]

Марков Виталий Николаевич
д.т.н., SPIN-код = 9201-7705
Кубанский государственный технологический университет, г. Краснодар, Россия

Рассматривается *NP*-задача дискретной оптимизации потребления невозобновляемых ресурсов. Для решения задачи предлагается использовать *NP*-систему, совершающую переходы состояний на полном графе с числом вершин, равным количеству дискретных ресурсов. Целью такой системы является построение цепи заданной длины и минимального веса на полном графе. Длина цепи определяет количество потреблённых ресурсов. Проблемным фактором является факториальный рост числа вариантов цепей на графе при линейном росте количества ресурсов. Главная идея состоит в нахождении статистических закономерностей рангов переходов *NP*-системы при построении цепей минимального веса на графах малого размера. Использование рангов позволяет абстрагироваться от конкретных весов переходов, которые являются переменными величинами для каждой задачи оптимизации, и найти родовое свойство всех оптимальных решений. Найденные закономерности предлагается использовать для решения задач большой размерности. В результате исследований было определено, что вероятности рангов переходов описываются геометрическим распределением. В статье представлен алгоритм определения параметра геометрического распределения для ранга каждого перехода в зависимости от исходного и потреблённого количества ресурсов. Реализация метода генерирования субоптимальных цепей основано на использовании генераторов псевдослучайных чисел, задающих значения каждого ранга перехода *NP*-системы согласно геометрическому распределению вероятностей. К использованию предлагается два варианта генераторов рангов цепей. Компьютерный эксперимент показал полезный эффект предлагаемого метода на задачах малой и средней размерности

Ключевые слова: ДИСКРЕТНАЯ ОПТИМИЗАЦИЯ, NP-ПРОБЛЕМА, РАНЖИРОВАННЫЙ ГРАФ ПЕРЕХОДОВ, ОКРЕСТНОСТЬ СТАТИСТИЧЕСКОГО ОПТИМУМА

UDC 004.023

Technical sciences

METHOD OF CONSTRUCTION OF THE NEIGHBORHOOD OF THE STATISTICAL OPTIMUM IN THE PROBLEM OF NON-RENEWABLE RESOURCES CONSUMPTION

Markov Vitaly Nikolaevich
Dr.Sci.Tech., RSCI SPIN-code = 9201-7705
Kuban State Technological University, Krasnodar, Russia

The NP-problem of discrete optimization of consumption of non-renewable resources is considered in the article. It is offered to use transitions of NP-system conditions on the complete graph with number of vertexes, equal to quantity of discrete resources, for the problem decision. The purpose of such system is construction of a chain of the predetermined length and the minimum weight on the complete graph. The length of a chain defines quantity of the consumed resources. The problem factor is factorial growth of number of variants of chains on graph at linear growth of quantity of resources. The main idea consists in a finding of statistical regularities of ranks of transitions of NP-system at construction of chains with the minimum weight on graphs of the small size. Use of ranks allows to abstract from concrete weights of transitions, which are variables for each problem of optimization, and to find the patrimonial feature of all optimum decisions. It is offered to use the found regularities to solve the problems of the big dimension. As a result of researches, it has been defined that probabilities of ranks of transitions are described by geometric distribution. In the article, the algorithm of definition of parameter of geometrical distribution for a rank of each transition depending on the initial and consumed quantity of resources is presented. Realization of a method of generating of suboptimum chains is based on use of generators of the pseudo-random numbers setting values of each rank of transition of NP-system according to geometrical distribution of probabilities. It is offered two variants of generators of ranks of chains to use. Computer experiment has shown useful effect of an offered method at the decision of problems of small and average dimension

Keywords: DISCRETE OPTIMIZATION, NP-PROBLEM, RANKED TRANSITION GRAPH, NEIGHBORHOOD OF STATISTICAL OPTIMUM

[1] Исследование выполнено при финансовой поддержке РГНФ в рамках научно-исследовательского проекта РГНФ («Управление эффективностью пространственно распределённых промышленных предприятий с учётом фактора надёжности на примере нефтегазодобывающего комплекса»), проект № 14-02-00334а.

Задача дискретной оптимизации расходования невозобновляемых ресурсов представлена в виде задачи поиска минимума целевой функции $h(n,k)=\sum_{1}^{k-1} e_i$ ранжированных цепей $\pi_j(n,k)=(r_1,r_2,\dots,r_k)$ на полном графе $G=(V,E)$ [1] состояний *NP*-системы [2] в окрестности статистического оптимума, r_i – ранг перехода из *i*-го состояния, *j* – номер цепи, имеющий в факториальной системе счисления разряды $j=r_1r_2\dots r_k$. Статистический оптимум является решением Беллмана и выражается цепью с нулевыми рангами переходов *NP*-системы системы $(0_1,0_2,\dots,0_k)$, то есть, наилучшее локальное решение реализуется переходом с рангом 0, а глобальное решение содержит только наилучшие локальные решения. *V* – множество состояний *NP*-системы, $|V|=n$, *n* – количество ресурсов для потребления, *E* – множество взвешенных на области $\mathbb{R}^+$ переходов состояний *NP*-системы, $e_{i,j}$ – вес перехода из состояния *i* в состояние *j*, $|E|=\frac{n^2-n}{2}$, *k* – количество потреблённых ресурсов, $n\ge k$ [3].

Для управления дискретной *NP*-системой используются ранги локальных переходов r_i, значения которых задаются эвристической функцией, построенной в соответствии с закономерностями распределения оптимальных решений, $0\le r_i\le n-i$. Количество цепей на графе переходов равно числу вариантов потребления *k* единиц ресурсов из заданных *n* ресурсов и определяется отношением $\frac{n!}{(n-k)!}$.

1. Окрестность статистического оптимума

ε-окрестность статистического оптимума есть множество Π_ε цепей π_j, вероятность которых меньше вероятности $P(\pi_0)$ статистического оптимума не более, чем на априорно заданную величину $0\le\varepsilon\le P(\pi_0)$

$$\Pi_\varepsilon=\{\pi_j | P(\pi_0)-P(\pi_j)\le\varepsilon\}.$$

Величина ε является шириной окрестности. На рисунке 1 изображён пример ε-окрестности статистического оптимума для экспериментальной функции вероятности $P(j)$ оптимальных цепей $\pi_j(n,n)$ для $n=5$ и $\varepsilon=0{,}15$. На оси абсцисс отложены все 24 цепи от беллмановского решения $\pi_0(5,5)=(0,0,0,0,0)$ до цепи $\pi_{23}(5,5)=(4,3,2,1,0)$. Окрестность субоптимальных решений включает цепи с номерами $j=0,2,6,12$.

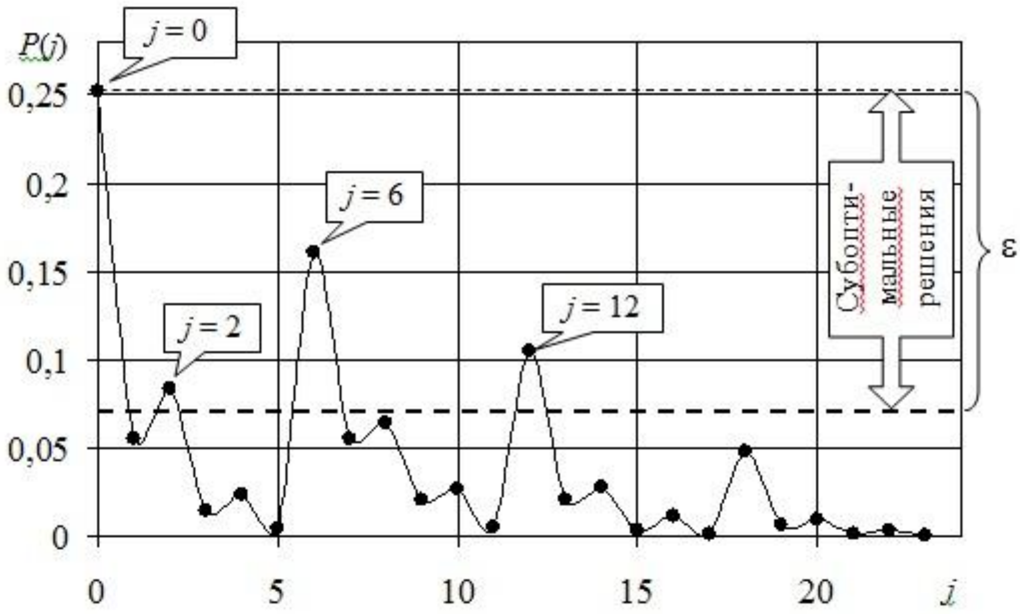

Рисунок 1 - ε-окрестность статистического оптимума функции вероятности $P(j)$ оптимальных цепей $\pi_j(5,5)$

2. Типы эвристик построения окрестностей статистического оптимума

а) Эвристики Ψ порождают отображение $\Psi:\Pi(n,k)\rightarrow\Pi^*(n,k)$, при котором для двух цепей $\pi_i,\pi_j\in\Pi^*(n,k)$, имеет место либо $\pi_i\succ\pi_j$ при $P(i)\geq P(j)$, либо $\pi_i\prec\pi_j$ при $P(i)\leq P(j)$. Такие эвристики порождают из элементов исходного множества цепей $\Pi(n,k)$ такое упорядоченное множество $\Pi^*(n,k)$ [25, 68], что вероятности $P(i)$ монотонно убывают

$$P(0)\geq P(1)\geq\cdots\geq P(i)\geq\cdots\geq P((n-1)!-1).$$

Достоинства:

- малые вычислительные затраты на этапе решения прикладной задачи,
- реализация оптимального по убыванию вероятности $P(i)$ поиска.

Недостаток: сложность формализации эвристики.

b) Эвристики Ξ задают отображение $\Xi : \pi \to \xi(\pi)$ таким образом, что для двух цепей $\pi_i, \pi_j \in \Pi(n,k)$, полученных произвольным способом, справедливо либо $\xi(\pi_i) \geq \xi(\pi_j)$ только при $P(i) \geq P(j)$, либо $\xi(\pi_i) \leq \xi(\pi_j)$ только при $P(i) \leq P(j)$. Следовательно, для любых двух цепей $\pi_i, \pi_j \in \Pi^*(n,k)$, имеет место либо $\pi_i \succ \pi_j$ при $\xi(\pi_i) \geq \xi(\pi_j)$, либо $\pi_i \prec \pi_j$ при $\xi(\pi_i) \leq \xi(\pi_j)$.

Недостаток: реализация субоптимального по убыванию вероятности $P(i)$ поиска.

Достоинство: относительная лёгкость формализации.

3. Вероятностный метод построения окрестности статистического оптимума

На данный момент не существует методов построения точной окрестности статистического оптимума ввиду сложности построения эвристики Ψ, априорно оценивающих величину по рангам цепи $r_1, r_2, \dots, r_k$. В настоящем исследовании рассматривается эвристика типа Ξ.

Полученные в ходе статистических испытаний характеристики случайной функции $P(i)$ значений рангов r_i в каждом i-м переходе состояний NP-системы позволяют задавать закон генерации величин рангов посредством датчиков псевдослучайных чисел с геометрической функцией вероятности $P(r_i) = \vartheta_i (1 - \vartheta_i)^{r_i}$. Для поиска субоптимальных цепей $\pi_j(n,k)$ предлагается реализовать генератор рангов переходов состояний NP-системы в виде k параллельно работающих генераторов псевдослучайных чисел (ГПСЧ). На рисунке 2 представлена структурная схема генератора рангов. Величины рангов r_i каждого перехода состояний выставляются на выходах генераторов псевдослучайных чисел в соответствии с функцией генератора $r_i = g(n,k,i)$. На входы ГПСЧ подаётся сигнал «*Разрешение*», тактирующий работу всей системы, а также параметры цепи n и k.

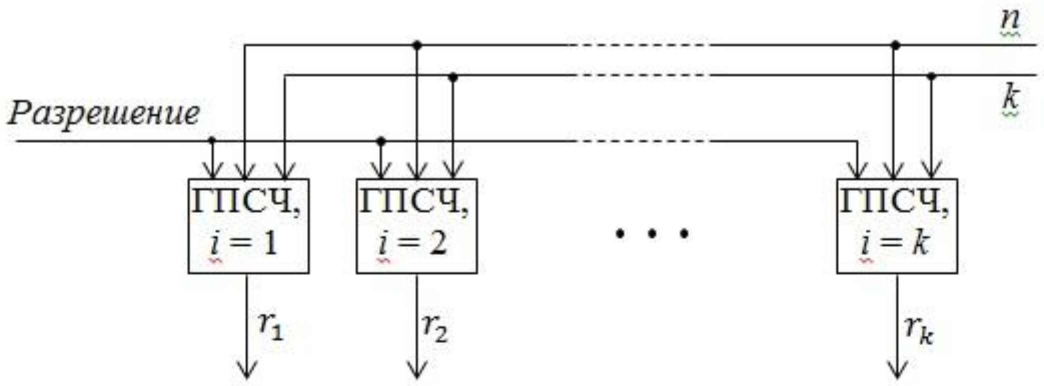

Рисунок 2 – Структурная схема генератора рангов *NP*-системы

Для того чтобы задать параметр ϑ_i геометрического распределения для каждого ГПСЧ необходимо определить закон изменения величины ϑ_i от параметров *n*, *k*, *i* на основе экспериментальных данных, полученных в ходе работы *NP*-системы по методу грубой силы.

Вспомогательный алгоритм

Рассмотрим алгоритм определения функции $r_i = g(n,k,i)$ для случая нахождения оптимальной цепи $\pi(n,n)$. Параметр ϑ_i геометрического распределения ГПСЧ для каждого *i*-го разряда цепи $\pi(n,n)$ представим функцией $\vartheta(n,i)$.

1. Для определения данной функции необходимо построить аппроксимирующие функции

$$\vartheta(n,A_i,B_i,C_i) = A_i \cdot e^{-B_i \cdot n} + C_i \qquad (1)$$

с условиями $A_i > 0$, $B_i > 0$, $C_i > 0$. В качестве таковых выбрана именно экспонента, так как согласно исследованиям она приводит к наименьшим значениям среднего квадратичного отклонения среди прочих функций, а также потому, что при $n \to \infty$ она асимптотически приближается к константе, что соответствует прогнозу по результатам эксперимента.

Параметры A_i, B_i, C_i функции $\vartheta(n,A_i,B_i,C_i)$ для $n = 6$ приведены в таблице 1. Для оценки точности аппроксимации таблица 1 дополнительно содержит значения σ_i – средние квадратичные отклонения функции $\vartheta(n, A_i, B_i, C_i)$ от значений параметра ϑ_i геометрического распределения $P(r_i) = \vartheta_i(1-\vartheta_i)^{r_i}$ значений рангов соответствующих разрядов.

Таблица 1 – Параметры аппроксимирующих экспонент

i	A_i	B_i	C_i	σ_i
1	0,2660	0,3382	0,3843	0,0013
2	1,0042	0,4372	0,5954	0,0047
3	1,8377	0,4576	0,6270	0,0036
4	2,0081	0,3774	0,6330	0,0045
5	2,7593	0,3618	0,6431	0,0034
6	2,8380	0,3188	0,6538	0,0037

2. Рассматривая столбцы A_i, B_i, C_i в качестве исходных данных построить экстраполирующие функции. На рисунке 3 изображены графики экстраполяции параметров экспоненциальной функции (1).

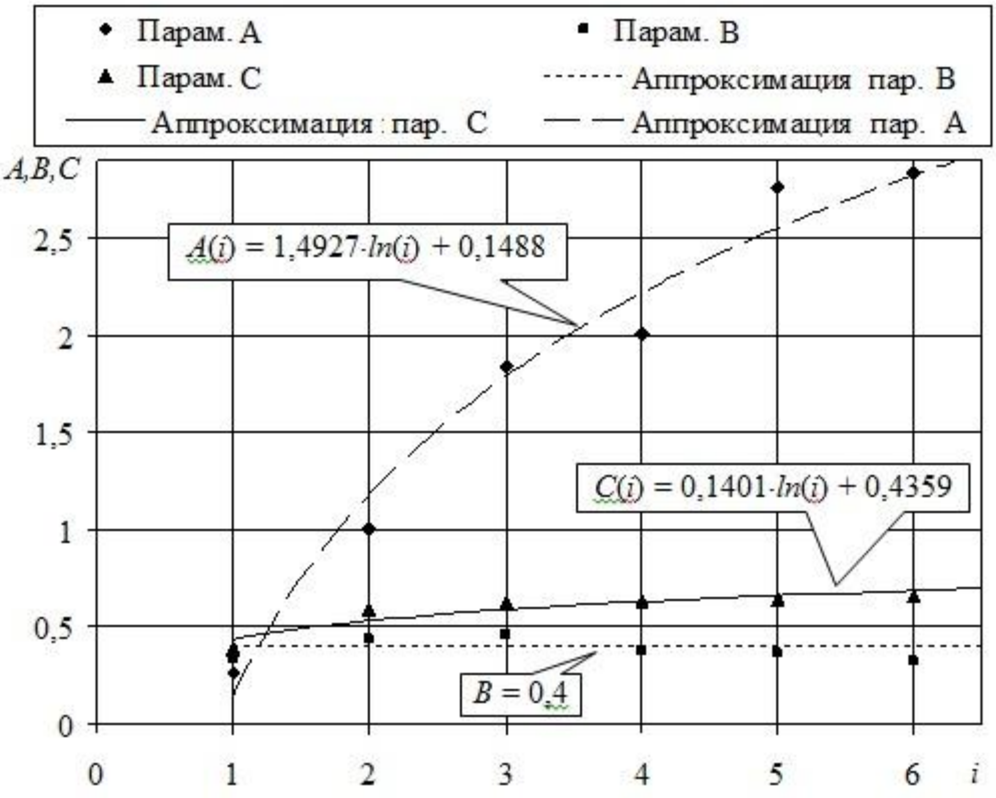

Рисунок 3 – Экстраполяция параметров A_i, B_i, C_i

Функция (1) аппроксимирует параметр ϑ геометрического распределения значений рангов переходов *NP*-системы для оптимизации цепи $\pi(6, 6)$.

Таким образом, псевдослучайная функция $r_i = g(n,n,i)$ генерации рангов i-х переходов *NP*-системы аппроксимируется функцией (1), где

$$\begin{cases} A(i) = 1{,}4927 \cdot \ln(i) + 0{,}1488, \\ B = 0{,}4, \\ C(i) = 0{,}1401 \cdot \ln(i) + 0{,}4359. \end{cases}$$

3. Построить композицию функций на диапазоне $1 \geq i \geq n$

$\vartheta(n,i) = (1{,}4927 \cdot \ln(i) + 0{,}1488) \cdot e^{-0{,}4n} + 0{,}1401 \cdot \ln(i) + 0{,}4359$.

4. Конец алгоритма.

Определение параметров A_i, B_i, C_i можно упростить, используя в качестве исходных данных для аппроксимации не параметры ϑ_i геометрического распределения, а вероятности $P[(0)]_i)$ нулевых значений рангов всех переходов. Это обосновывается тем, что для геометрического распределения характерно приближённое равенство $\vartheta_i \approx P[(0)]_i)$. Определение параметра $\vartheta(n,k,i)$ для цепи $\pi(n,k)$ произвольной длины включает дополнительный шаг – фиксацию переменной *k* при поиске параметров A_i, B_i, C_i.

Алгоритм нахождения параметра $\vartheta(n,k,i)$

1. Для каждого значения *n* из анализируемого диапазона, например из $5 \leq n \leq 15$, при фиксированном значении $k = 2$ найти функции

$$\begin{cases} A(i,D,E) = D \cdot \ln(i) + E, \\ B(i,F,G) = F \cdot \ln(i) + G, \\ C(i,H,I) = H \cdot \ln(i) + I. \end{cases}$$

рассмотренным выше вспомогательным алгоритмом.

2. Повторив пункт 1 для всех получить семейство k уравнений

$$\begin{cases} A(i, D_k, E_k) = D_k \cdot \ln(i) + E_k, \\ B(i, F_k, G_k) = F_k \cdot \ln(i) + G_k, \\ C(i, H_k, I_k) = H_k \cdot \ln(i) + I_k. \end{cases}$$

3. Найти закон изменения для каждого из семейств параметров D_k, E_k, F_k, G_k, H_k, I_k путём построения экстраполирующих функций $D(k, \vec{D})$, $E(k, \vec{E})$, $F(k, \vec{F})$, $G(k, \vec{G})$, $H(k, \vec{H})$, $I(k, \vec{I})$, где $\vec{D}$, $\vec{E}$, $\vec{F}$, $\vec{G}$, $\vec{H}$, $\vec{I}$ – векторы вспомогательных параметров.

4. Путём замены аргументов D_k, E_k, F_k, G_k, H_k, I_k на аргумент k построить из композиции функций

$$P(r_i, \vartheta(n, A(i, D_k, E_k), B(i, F_k, G_k), C(i, H_k, I_k)))$$

композицию

$$P(r_i, \vartheta(n, k, i)) = \vartheta(n, k, i)\left(1 - \vartheta(n, k, i)\right)^{r_i} \quad (2)$$

5. Конец алгоритма.

4. Структура генератора рангов переходов

Для упрощённой реализации генератора рангов достаточно использовать один генератор псевдослучайных чисел (рис. 4).

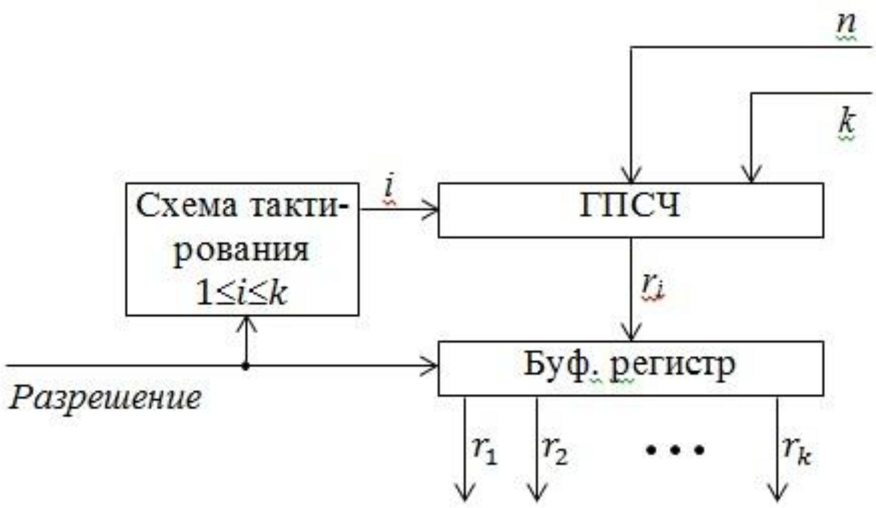

Рисунок 4 – Структурная схема генератора рангов с использованием одного ГПСЧ

При наличии сигнала «*Разрешение*» k рангов r_i выставляются на выходах буферного регистра через k тактов работы внутренней схемы тактирования. Схема тактирования может быть выполнена в виде счётчика, работающего в диапазоне $1 \le i \le k$. Данный счётчик инициируется сигналом «*Разрешение*». ГПСЧ по входным данным n, k, i генерирует псевдослучайное число r_i, удовлетворяющее заданному закону распределения вероятностей (2). Такая схема замедляет работу *NP*-системы, но уменьшает аппаратные затраты, и делает возможной программную реализацию на непараллельной вычислительной технике.

Достоинства вероятностного метода:

- Отсутствие притяжения к локальным оптимумам.
- Большой объём поиска.
- Наиболее часто проверяются субоптимальные по вероятности решения, так как правило генерации рангов цепей соответствует закону распределении рангов субоптимальных цепей.
- Возможность останова либо по времени, либо по заданному объёму поиска, либо при достижении заданного порога веса решения.
- Возможность повторного запуска алгоритма.

Недостатки вероятностного метода:

- Повтор наиболее вероятных субоптимальных решений.
- Эффективность решения пропорциональна времени работы алгоритма.

5. Эксперимент

Оценка эффективности предложенного вероятностного метода поведена путём сравнения с аналогичным методом, использующим экспоненциальный закон распределения вероятностей. Для устранения влияния на результат эксперимента других способов оптимизации, используемых в вышеуказанных методах, была выбрана задача поиска цепи $\pi(n,n)$ минимального веса $h_{\min(\pi)}$. Следует заметить, что параметры A_i и B_i вероятностного закона $P(n,i) = A(i) \cdot e^{-B(i)n}$ рассчитывались согласно предложенному в данной работе алгоритму, ибо научно обоснованных способов расчёта данных параметров в формализации метода металлического отжига не предусмотрено.

В качестве показателя оценки эффективности выбрано среднее за N опытов отношение минимального веса цепи к весу i-й цепи $M(i) = \frac{1}{N}\sum_{j=1}^{N}\frac{h_{\min j}}{h(\pi_i)_j}$. Веса рёбер полного графа генерировались случайным образом для каждого опыта. На рисунке 5 приведены результаты сравнения, которые позволяют сделать вывод о том, что различия наблюдаются при малом числе запусков вероятностных алгоритмов. С ростом числа запусков, а также с ростом размерности задачи n различия уменьшаются. Это объясняется малым значением разности между средним квадратичным отклонением геометрического и экспоненциального распределений от экспериментального распределения вероятностей.

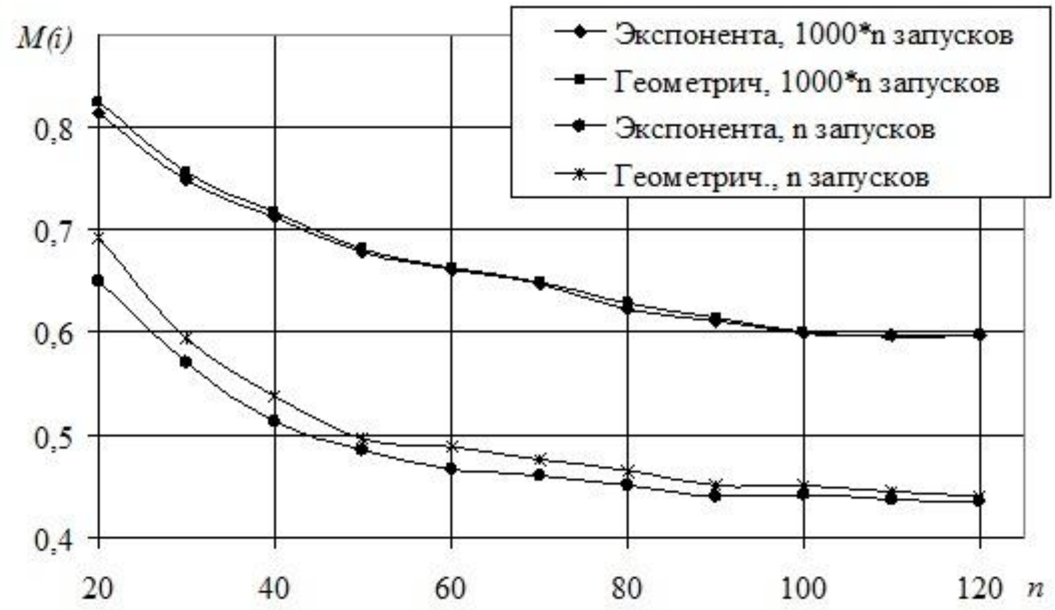

Рисунок 5 – Экспериментальное сравнение эффективности численных вероятностных методов

Выводы

В статье показан способ построения множества субоптимальных решений в виде ранжированных цепей переходов дискретной *NP*-системы потребления невозобновляемых ресурсов на основе использования генераторов псевдослучайных рангов, имеющих геометрическое распределение.

Исследование выполняется в рамках гранта Российского гуманитарного научного фонда «Управление эффективностью пространственно распределённых промышленных предприятий с учётом фактора надёжности на примере нефтегазодобывающего комплекса» проект № 14-02-00334а.

Список литературы

1. Касьянов В.Н., Евстигнеев В.А. Графы в программировании: обработка, визуализация и применение. – СПб.: БХВ-Петербург, 2003. – 1104 с.
2. Марков В.Н. Математические основы построения дискретного автомата оптимизации параметров системы // Политематический сетевой электронный научный журнал кубанского государственного аграрного университета. – 2014. – № 103. – С. 37–49.
4. Марков В.Н. Способ порождения эвристик для решения NP-трудных задач // Информационные технологии. 2006. №6. с. 21-25.

References

1. Kas'janov V.N., Evstigneev V.A. Grafy v programmirovanii: obrabotka, vizualiza-cija i primenenie. – SPb.: BHV-Peterburg, 2003. – 1104 s.
2. Markov V.N. Matematicheskie osnovy postroenija diskretnogo avtomata optimizacii parametrov sistemy // Politematicheskij setevoj jelektronnyj nauchnyj zhurnal kubanskogo gosudarstvennogo agrarnogo universiteta. – 2014. – № 103. – S. 37–49.
4. Markov V.N. Sposob porozhdenija jevristik dlja reshenija NP-trudnyh zadach // Informacionnye tehnologii. 2006. №6. s. 21-25.