

УДК 539.12.01

UDC 539.12.01

01.00.00 Физико-математические науки

Physics and mathematics

МОДЕЛИРОВАНИЕ НЕЛИНЕЙНЫХ ЦВЕТОВЫХ КОЛЕБАНИЙ В ТЕОРИИ ЯНГА-МИЛЛСА**SIMULATION OF NONLINEAR COLOR OSCILLATIONS IN YANG-MILLS THEORY**

Трунев Александр Петрович
к.ф.-м.н., Ph.D., директор
Scopus Author ID: 6603801161
SPIN-код автора: 4945-6530
A&E Trounev IT Consulting, Торонто, Канада

Alexander Trunev
Cand.Phys.-Math.Sci., Ph.D., C.E.O.
Scopus Author ID: 6603801161
A&E Trounev IT Consulting, Toronto, Canada

В работе представлены данные моделирования нелинейных пространственно-временных осцилляций цвета в теории Янга-Миллса в случае $SU(2)$ и $SU(3)$ симметрии. Мы исследовали три системы уравнений, выведенных из теории Янга-Миллса, которые описывают переход к хаотическому поведению. Эти переходы, обусловленные нелинейными колебаниями цвета, зависят от параметров модели – константы связи и начальной амплитуды волн. Такого рода переходы к хаотическому поведению при увеличении параметра являются характерными для гидродинамической турбулентности. Исследованы модели пространственно-временных осцилляций поля Янга-Миллса в случае трех и восьми цветов. Результаты численного моделирования показывают, что нелинейное взаимодействие не приводит к пространственному перемешиванию цветов, как это могло бы быть в случае турбулентной диффузии. В зависимости от параметров системы наблюдается либо подавление амплитуды колебаний пяти цветов первыми тремя, либо наоборот – трех первых цветов пятью остальными. При этом кинетическая энергия колебаний либо распределяется поровну между цветовыми компонентами, либо преобладает кинетическая энергия подавляемой группы цветов. Отметим, что общее свойство физических систем, описываемых нелинейными уравнениями в теории Янга-Миллса и в гидродинамике, особенно сильно проявляется в процессах образования кварк-глюонной плазмы и струй адронов, когда поле Янга-Миллса вовлечено в процесс формирования гидродинамического течения. Отметим, что существует связь между уравнениями Эйнштейна и Янга-Миллса, с одной стороны, уравнениями Эйнштейна и гидродинамики – с другой. Все это указывает на существование в природе общего механизма формирования особого вида турбулентности – геометрической турбулентности

The article presents the simulation of non-linear spatial-temporal color oscillations in Yang-Mills theory in the case of $SU(2)$ and $SU(3)$ symmetry. We examined three systems of equations derived from the Yang-Mills theory, which describes the transition to chaotic behaviour. These transitions are caused by nonlinear vibrations of colour, depending on the model parameters - the coupling constants and the initial wave amplitude. Such transitions to chaotic behaviour by increasing the parameters are characteristic of hydrodynamic turbulence. A model of spatial-temporal oscillations of the Yang-Mills theory in the case of three and eight colors. The results of numerical simulation show that the nonlinear interaction does not lead to a spatial mixing of colors as it might be in the case of turbulent diffusion. Depending on the system parameters there is a suppression of the amplitude of the oscillations the first three of five colors or vice versa - the first three five other colors. The kinetic energy fluctuations or shared equally between the color components, or dominated by the kinetic energy of repressed groups of colors. Note that the general property of physical systems described by nonlinear equations in the Yang-Mills theory and hydrodynamics is particularly strong in the formation of quark-gluon plasma and hadrons jets, when the Yang-Mills is involved in the formation of hydrodynamic flow. Note that there is a relationship between the Einstein and Yang-Mills theory, on the one hand, Einstein's equations and hydrodynamics - on the other. All of this points to the existence in the nature of a general mechanism of formation of a special type of turbulence - geometric turbulence

Ключевые слова: ГЕОМЕТРИЧЕСКАЯ ТУРБУЛЕНТНОСТЬ, НЕЛИНЕЙНЫЕ КОЛЕБАНИЯ, ТЕОРИЯ ЯНГА-МИЛЛСА, ХАОС, ЦВЕТ

Keywords: CHAOS, GEOMETRIC TURBULENCE, NONLINEAR OSCILLATIONS, COLOR, YANG-MILLS THEORY

Введение

Как известно, теория Янга-Миллса описывает нелинейную динамическую систему, в которой осцилляции цвета демонстрируют хаотическое поведение [1-7]. Квантовый хаос в такой системе приводит к производству энтропии [8] и к возникновению фазовых переходов [9-10]. Путем усреднения уравнений квантовой хромодинамики приходим к модели глюонного конденсата [11-13], в рамках которой были рассмотрены задачи о спектре масс адронов и термодинамики глюонов [14-15], а также о влиянии ускорения на устойчивость волн в таких системах [16].

Отметим, что уравнения Янга-Миллса связаны с уравнениями Максвелла и Эйнштейна [17-18]. Следовательно, возникновение хаоса в динамической системе, описывающей осцилляции цвета, может иметь определенные макроскопические следствия, например, в форме геометрической турбулентности [19].

В настоящей работе представлена модель пространственно-временных осцилляций поля Янга-Миллса в случае трех и восьми цветов. Результаты численного моделирования показывают, что нелинейное взаимодействие не приводит к пространственному перемешиванию цветов, как это могло бы быть в случае турбулентной диффузии. В зависимости от параметров системы наблюдается либо подавление амплитуды колебаний пяти цветов первыми тремя, либо наоборот – трех первых цветов пятью остальными. При этом кинетическая энергия колебаний либо распределяется поровну между цветовыми компонентами, либо преобладает кинетическая энергия подавляемой группы цветов.

Уравнения Янга-Миллса в произвольных системах отсчета

Уравнения Янга-Миллса [20] были предложены для объяснения сохранения изотопического спина. В теории Янга-Миллса изотопическому спину сопоставляется калибровочное поле, связанное с изотопическим спином, аналогично тому, как электромагнитное поле связано с электрическим зарядом. Дальнейшее развитие теории и концепции цвета [21-22] привело к созданию квантовой хромодинамики [23], в которой поле Янга-Миллса представляется как динамическая система, состоящая из восьми взаимодействующих цветовых полей.

В работах [16, 24] мы рассмотрели уравнения Янга-Миллса в произвольных системах отсчета, допускаемых принципом относительности Эйнштейна. Преобразование уравнений Янга-Миллса к подвижным осям осуществляется по стандартной схеме [16-18, 24]. Рассмотрим динамическую систему, включающую метрический тензор $g_{\mu\nu}$, поле Янга-Миллса $A_{\alpha\mu}$ и поле φ , которое преобразуется как тензор при координатных преобразованиях и реализует матричное представление поля Янга-Миллса. Лагранжиан системы имеет вид

$$\begin{aligned}
 S &= S_g + S_A + S_\varphi \\
 S_g &= -\int R g^{1/2} dx - \Lambda \int g^{1/2} dx \\
 S_A &= -\frac{1}{4} \int g^{1/2} F_{\alpha\mu\nu} F_\alpha^{\mu\nu} dx \\
 S_\varphi &= -\frac{1}{2} \int g^{1/2} (\tilde{\varphi}_{\cdot\mu} \varphi^{\cdot\mu} + m^2 \tilde{\varphi} \varphi) dx
 \end{aligned}
 \tag{1}$$

Здесь и ниже полагаем $R = g^{ik} R_{ik}$, R_{ik} - тензор Риччи; Λ - космологическая постоянная; $R_{\beta\gamma\delta}^\alpha$ - тензор Римана, Γ_{kl}^i - символы Кристоффеля

второго рода; $\delta F_{\alpha\mu\nu} = \delta A_{\alpha\nu\bullet\mu} - \delta A_{\alpha\mu\bullet\nu}$, точкой обозначено ковариантное дифференцирование:

$$\varphi_{\bullet\mu} = \frac{\partial\varphi}{\partial x^{\mu}} + \Omega_{\mu}\varphi, \quad \Omega_{\mu} = G_{\alpha}A_{\mu}^{\alpha} + G_{\sigma}^{\nu}\Gamma_{\mu\nu}^{\sigma} \quad (2)$$

$A_{\mu}^{\alpha}, G_{\alpha}$ - компоненты поля Янга-Миллса и генераторы группы соответственно. Как известно, в этом случае выполняются коммутационные соотношения

$$\varphi_{\bullet\mu\nu} - \varphi_{\bullet\nu\mu} = -(G_{\alpha}F_{\mu\nu}^{\alpha} + G_{\sigma}^{\tau}R_{\mu\nu\sigma}^{\tau})\varphi \quad (3)$$

Уравнения поля, которые соответствуют каждому из действий (1) с индексом имеют вид

$$\begin{aligned} \frac{\delta\mathcal{S}_g}{\delta g_{\mu\nu}} &= g^{1/2}(R^{\mu\nu} - \frac{1}{2}g^{\mu\nu}R) - \frac{1}{2}\Lambda g^{1/2}g^{\mu\nu} = 0 \\ \frac{\delta\mathcal{S}_A}{\delta A_{\alpha\mu}} &= -g^{1/2}F_{\alpha}^{\mu\nu}\bullet_{\nu} = 0 \\ \frac{\delta\mathcal{S}_{\varphi}}{\delta\tilde{\varphi}} &= g^{1/2}(\varphi_{\bullet\mu}^{\mu} - m^2\varphi) = 0 \end{aligned} \quad (4)$$

При совместном действии гравитационного поля, поля Янга-Миллса и скалярного поля имеем

$$\begin{aligned} \frac{\delta\mathcal{S}}{\delta g_{\mu\nu}} &= g^{1/2}(R^{\mu\nu} - \frac{1}{2}g^{\mu\nu}R) - \frac{1}{2}\Lambda g^{1/2}g^{\mu\nu} + \frac{1}{2}T^{\mu\nu} = 0 \\ \frac{\delta\mathcal{S}}{\delta A_{\alpha\mu}} &= -g^{1/2}F_{\alpha}^{\mu\nu}\bullet_{\nu} + J_{\alpha}^{\mu} = 0, \\ \frac{\delta\mathcal{S}}{\delta\tilde{\varphi}} &= g^{1/2}(\varphi_{\bullet\mu}^{\mu} - m^2\varphi) = 0 \end{aligned} \quad (5)$$

Здесь тензор плотности энергии-импульса и плотность тока Янга-Миллса определяются соответственно как

$$\begin{aligned} T^{\mu\nu} &= g^{1/2}\left(F_{\alpha\sigma}^{\mu}F_{\alpha}^{\nu\sigma} - \frac{1}{4}F_{\alpha\sigma\tau}F_{\alpha}^{\sigma\tau}\right) + g^{1/2}\tilde{\varphi}^{\bullet\mu}\varphi^{\bullet\nu} - \frac{1}{2}g^{1/2}g^{\mu\nu}(\tilde{\varphi}_{\bullet\sigma}\varphi^{\bullet\sigma} + m^2\tilde{\varphi}\varphi), \\ J_{\alpha}^{\mu} &= g^{1/2}\tilde{\varphi}G_{\alpha}\varphi^{\bullet\mu}, \\ T_{\bullet\nu}^{\mu\nu} &= 0, \quad J_{\alpha\bullet\mu}^{\mu} = 0. \end{aligned} \quad (6)$$

Последние два условия на дивергенцию плотности тока и тензора плотности энергии-импульса являются следствием динамических уравнений (5).

Уравнения Янга-Миллса с группой симметрии $SU(2)$

В метрике Минковского и при отсутствии тока уравнения Янга-Миллса с группой симметрии $SU(2)$ принимают особенно простой вид $F_{\alpha}^{\mu\nu}{}_{,\nu} = 0$, что равносильно

$$\begin{aligned} \partial_{\mu} F_{\mu\nu}^a + g_{YM} \varepsilon^{abc} A_{\mu}^b F_{\mu\nu}^c &= 0 \\ F_{\mu\nu}^a &= \partial_{\mu} A_{\nu}^a - \partial_{\nu} A_{\mu}^a + g_{YM} \varepsilon^{abc} A_{\mu}^b A_{\nu}^c \end{aligned} \quad (7)$$

Здесь g_{YM} – константа связи, ε^{abc} – единичный антисимметричный тензор третьего ранга.

Динамическая модель [1] следует из (7), если мы положим $A_0^a = 0$, $A_i^a = O_i^a f^{(a)}(t) / g_{YM}$, где O_i^a – ортогональная матрица. Тогда система уравнений (7) приводится к виду

$$\begin{aligned} \frac{d^2 f^{(a)}}{dt^2} + (\mathbf{f}^2 - f^{(a)2}) f^{(a)} &= 0 \\ \mathbf{f}^2 &= f^{(1)2} + f^{(2)2} + f^{(3)2} \end{aligned} \quad (8)$$

Основные свойства системы уравнений (7) были изучены в работах [1-2, 25] и других. Было установлено наличие областей стохастичности в фазовом пространстве динамической системы (7). Часть результатов для модели (7) получено численными методами. Рассмотрим результаты численного интегрирования задачи Коши для системы уравнений (7). Введем новые обозначения

$$\begin{aligned}
 x &= f^{(1)}(t), X = \int_0^t f^{(1)}(t)dt, x_2 = \frac{d^2 f^{(1)}}{dt^2} \\
 y &= f^{(2)}(t), Y = \int_0^t f^{(2)}(t)dt, y_2 = \frac{d^2 f^{(2)}}{dt^2} \\
 z &= f^{(3)}(t), Z = \int_0^t f^{(3)}(t)dt, z_2 = \frac{d^2 f^{(3)}}{dt^2}
 \end{aligned}
 \tag{9}$$

Начальные значения задачи зададим в нормированном виде, считая вектор $\{x(0), y(0), z(0), \dot{x}(0), \dot{y}(0), \dot{z}(0)\}$ состоящим только из нулей и единиц. В уравнениях (8), напротив, введем два параметра k_1, k_2 , описывающих интенсивность взаимодействия цветковых полей, имеем

$$\begin{aligned}
 \frac{d^2 x}{dt^2} + k_1(y^2 + z^2)x &= 0 \\
 \frac{d^2 y}{dt^2} + k_2(x^2 + z^2)y &= 0 \\
 \frac{d^2 z}{dt^2} + (y^2 + x^2)z &= 0
 \end{aligned}
 \tag{10}$$

Данные задачи для системы уравнений (10) описываются листами $\{\{k_1, k_2\}, \{x(0), y(0), z(0), \dot{x}(0), \dot{y}(0), \dot{z}(0)\}\}$, которые указаны на рис. 1-3. Примечательной особенностью траектории системы (10) является накопление решений в двух областях, имеющих форму усеченной пирамиды с прямоугольником в основании, разделенных зоной «хаоса» - рис. 1. Траектория вектора ускорения при таком движении заполняет две фигуры, имеющие своеобразную параболическую форму «цветка» с гладким основанием и ворсистой поверхностью.

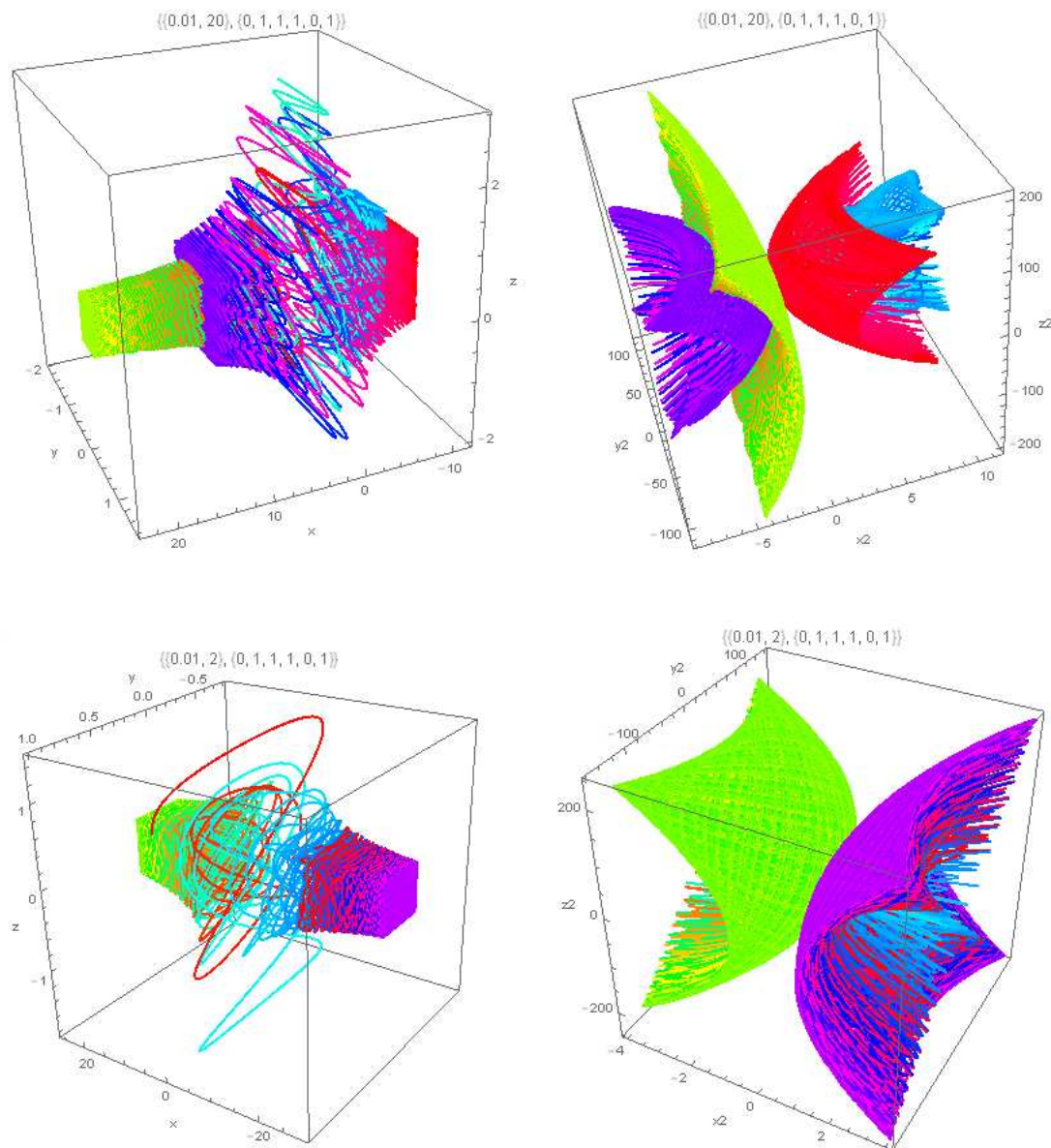


Рис. 1. Динамика полей Янга-Миллса в трехцветной модели: параметры модели и начальные данные указаны на листах в верхней части рисунков в форме $\{\{k_1, k_2\}, \{x(0), y(0), z(0), \dot{x}(0), \dot{y}(0), \dot{z}(0)\}\}$.

Отметим, что поле Янга-Миллса A_i^a соответствует векторному потенциалу в электродинамике, а производная $\partial_t A_i^a$ соответствует электрическому полю. Если предположить, что существует частица,

движущаяся со скоростью (x,y,z) , то ее траектория (X,Y,Z) за длительное время движения заполняет куб – рис. 2-3.

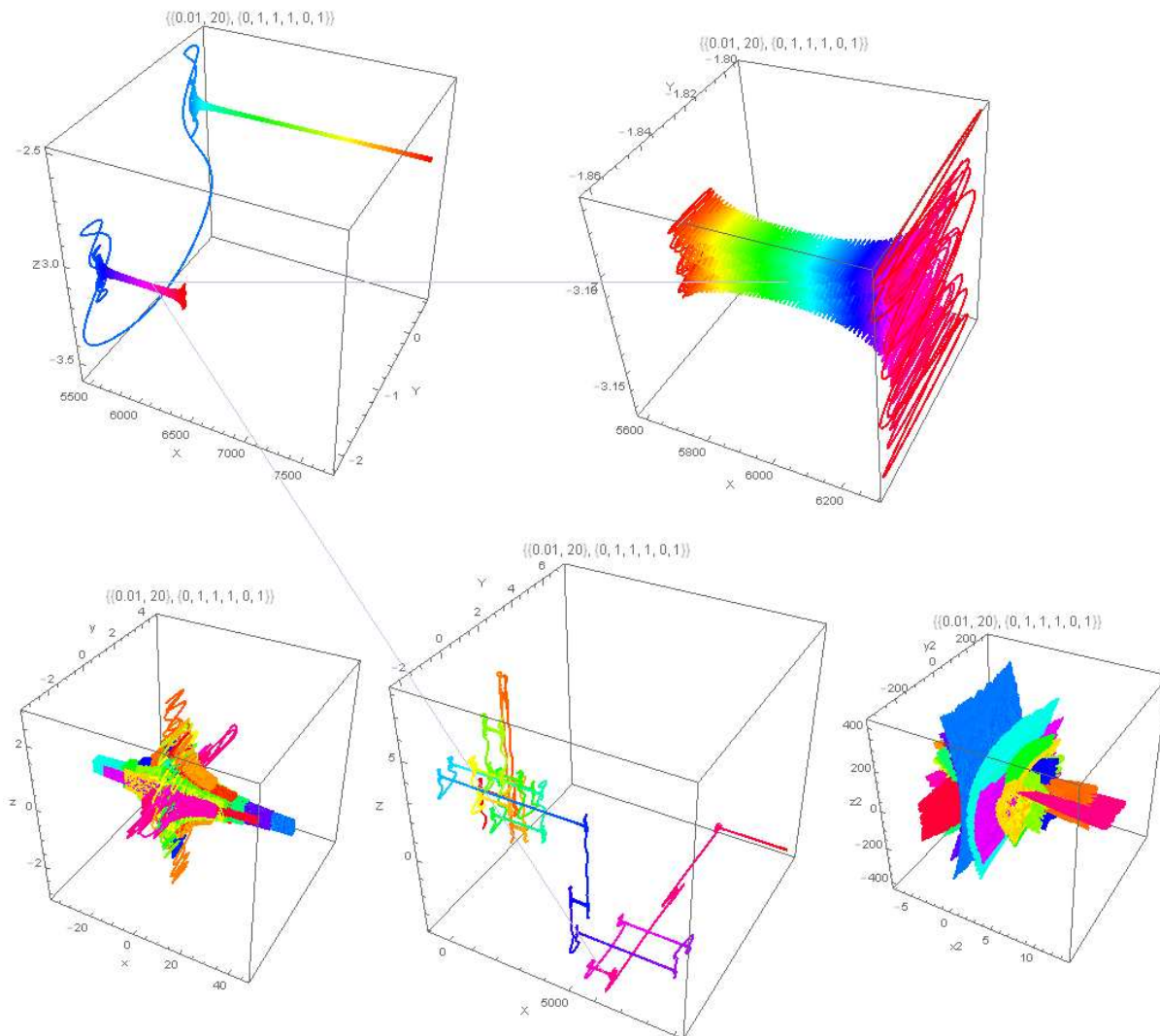


Рис. 2. Динамика полей Янга-Миллса в трехцветной модели: параметры модели и начальные данные указаны на листах в верхней части рисунков в форме $\{\{k_1, k_2\}, \{x(0), y(0), z(0), \dot{x}(0), \dot{y}(0), \dot{z}(0)\}\}$.

Траектория частицы на некоторых участках состоит как бы из прямых линий, которые при большом увеличении выглядят как бруски

прямоугольного сечения, на которые навиты линии, образующиеся при колебаниях в трех плоскостях – смотрите правый верхний рис. 2.

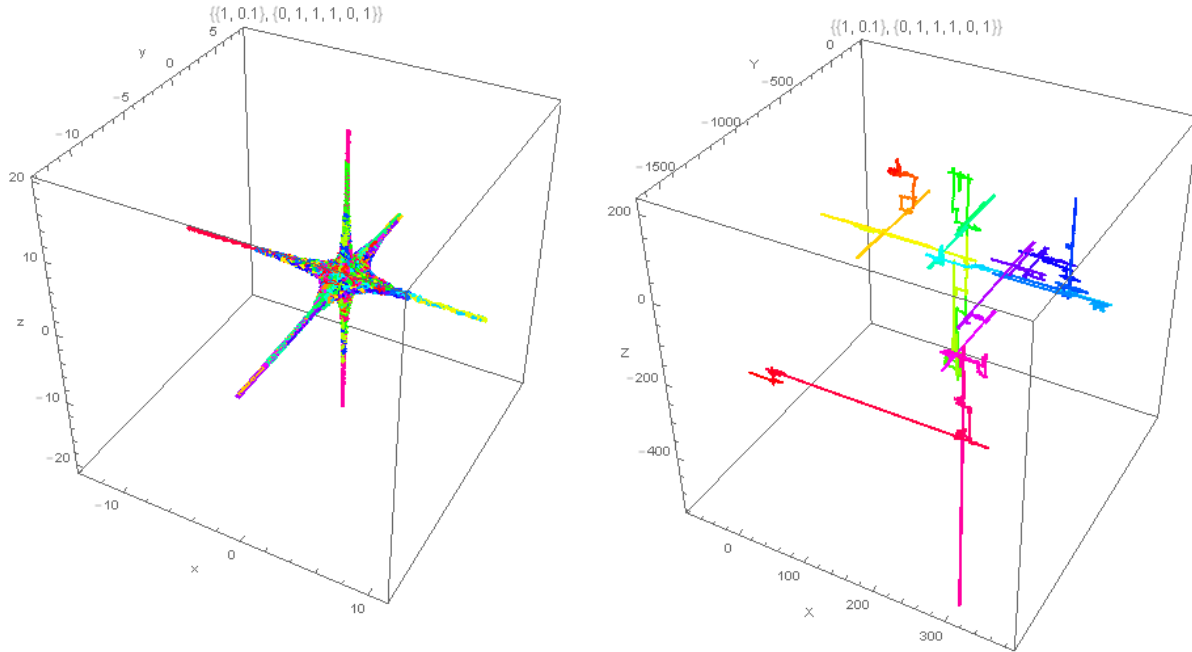


Рис. 3. Динамика полей Янга-Миллса в трехцветной модели: параметры модели и начальные данные указаны на листах в верхней части рисунков в форме $\{\{k_1, k_2\}, \{x(0), y(0), z(0), \dot{x}(0), \dot{y}(0), \dot{z}(0)\}\}$.

Отметим, что за длительное время движения $t = 6000$ траектория системы заполняет область шести лучевой звезды – левый рис. 3.

Уравнения Янга-Миллса с группой симметрии $SU(3)$

В случае $SU(3)$ симметрии уравнения Янга-Миллса принимают вид [17, 23]

$$\begin{aligned} \partial_\mu F_{\mu\nu}^B + g_{YM} f^{BCD} A_\mu^C F_{\mu\nu}^D &= 0 \\ F_{\mu\nu}^B &= \partial_\mu A_\nu^B - \partial_\nu A_\mu^B + g_{YM} f^{BCD} A_\mu^C A_\nu^D \end{aligned} \quad (11)$$

Здесь $B, C, D = 1, 2, 3, \dots, 8$ – цветовые индексы (число цветовых полей равно восьми); f^{BCD} – структурные константы калибровочной группы $SU(3)$.

Проблему моделирования можно упростить, рассматривая некоторые средние параметры [11-13]. Путем усреднения лагранжиана системы

$L_{SU(3)} = \frac{1}{4} F_{\mu\nu}^A F^{A\mu\nu}$ находим лагранжиан новой модели и систему динамических уравнений [11]

$$\begin{aligned} \phi_a'' - \nabla^2 \phi^a + [(\chi^m \chi^m) + \lambda_1(\phi^a \phi^a) - \phi_0^2] \phi^a &= 0 \\ \chi_m'' - \nabla^2 \chi^m + [(\phi^a \phi^a) + \lambda_2(\chi^m \chi^m) - \chi_0^2] \chi^m &= 0 \end{aligned} \quad (12)$$

Здесь $a = 1, 2, 3; m = 4, 5, \dots, 8$ - цветовые индексы, по повторяющимся индексам осуществляется суммирование, $\lambda_1, \lambda_2, \phi_0, \chi_0$ - параметры модели.

Рассмотрим задачу о распаде начального состояния в системе (12) в плоскости (t, x) , в ограниченной области пространства $0 \leq x \leq L$. Зададим все функции в начальный момент времени в виде $u_i \exp[-k(x - x_i)^2], i = 1, \dots, 8$, а их производные по времени равными нулю:

$$\phi_i^a(0, x) = 0, \chi_i^m(0, x) = 0, a = 1, 2, 3; m = 4, 5, \dots, 8. \quad (13)$$

Параметры системы зададим как в работах [11, 14-15], принятых для описания глобола: $\lambda_1 = 0.1; \lambda_2 = 1; \phi_0 = A_0 = 1.6171579, \chi_0 = B_0 = 1.49273856$. На рис. 4. представлены данные моделирования распада начального состояния, вычисленные в области шириной $L = 9$ с начальными данными распределения цветов $u_i = 1, k = 6, x_i = 4 + 0.1i$. Для удобства отображения данных введем обозначения

$$f_a = \phi^a(t, x), f_m = \chi^m(t, x), a = 1, 2, 3; m = 4, 5, \dots, 8.$$

Тогда в начальный момент времени имеем

$$f_i(0, x) = u_i \exp[-k(x - x_i)^2], \frac{\partial f_i}{\partial t} = 0, i = 1, \dots, 8 \quad (14)$$

Анализируя приведенные на рис. 4 данные приходим к выводу, что три первых цвета, которые соответствуют симметрии $SU(2)$, подавляют остальные пять цветов, поэтому совокупная фигура динамики 8 цветов

выглядит как преимущественно красно-зелено-голубая. Отметим, что пять цветов с индексами $m = 4, 5, \dots, 8$ образуют как бы турбулентный фон, на котором разворачивается динамика трех цветов с индексами $a = 1, 2, 3$. Отсюда можно сделать вывод о справедливости самой модели (12), которая получена в предположении о наличии квантового хаоса в системе.

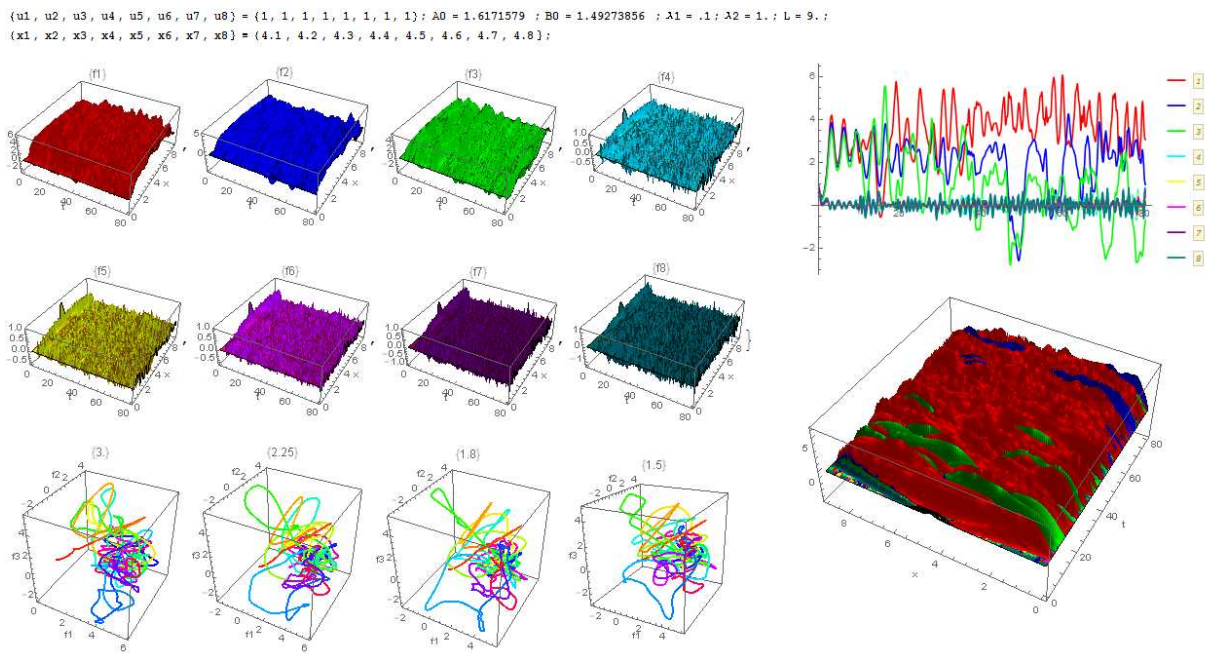


Рис. 4. Распад начального состояние восьми цветного поля Янга-Миллса: три первых цвета подавляют остальные пять цветов; начальные данные задачи приведены в верхней части рисунка.

Изменяя значения параметров, $\lambda_1 = 0.3; \lambda_2 = 1.5; A_0 = 1.1, B_0 = 1.2$, находим режим, в котором красный, зеленый и синий цвет подавляют пять остальных, как и в случае данных на рис. 4, но с меньшим различием в амплитудах трех и пяти цветов – рис. 5. Наконец, задавая $\lambda_1 = 3; \lambda_2 = 0.5; A_0 = 1.1, B_0 = 1.2$, находим режим, в котором подавляются три первых цвета – рис. 6. Отметим, что при подавлении амплитуды колебаний суммарная кинетическая энергия каждой

группы цветов $\partial_\mu \phi^a \partial_\mu \phi^a, \partial_\mu \chi^m \partial_\mu \chi^m$ распределяется либо поровну между тремя и пятью цветами, либо преобладает кинетическая энергия подавляемой группы цветов – рис. 7.

Меру хаоса в каждом случае можно оценить, рассматривая траекторию системы в координатах $(f_1(t, x_s), f_2(t, x_s), f_3(t, x_s))$ в фиксированных точках $x_s = 1.5; 1.8; 2.25; 3$ - рис. 4-6. Из сравнения данных на рис. 4-6 следует, что хаотическое поведение в координатах $(f_1(t, x_s), f_2(t, x_s), f_3(t, x_s))$ становится более заметным в случае подавления амплитуды первых трех цветов – рис. 6.

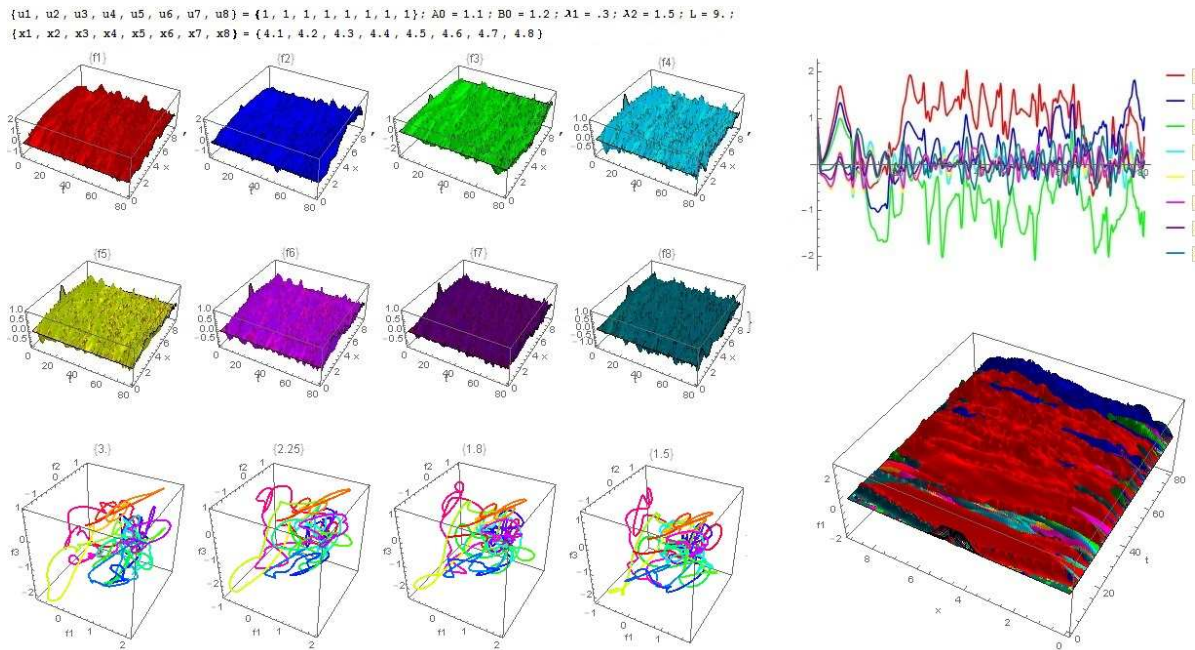


Рис. 5. Распад начального состояние восьми цветного поля Янга-Миллса: три первых цвета подавляют остальные пять цветов; начальные данные задачи приведены в верхней части рисунка.

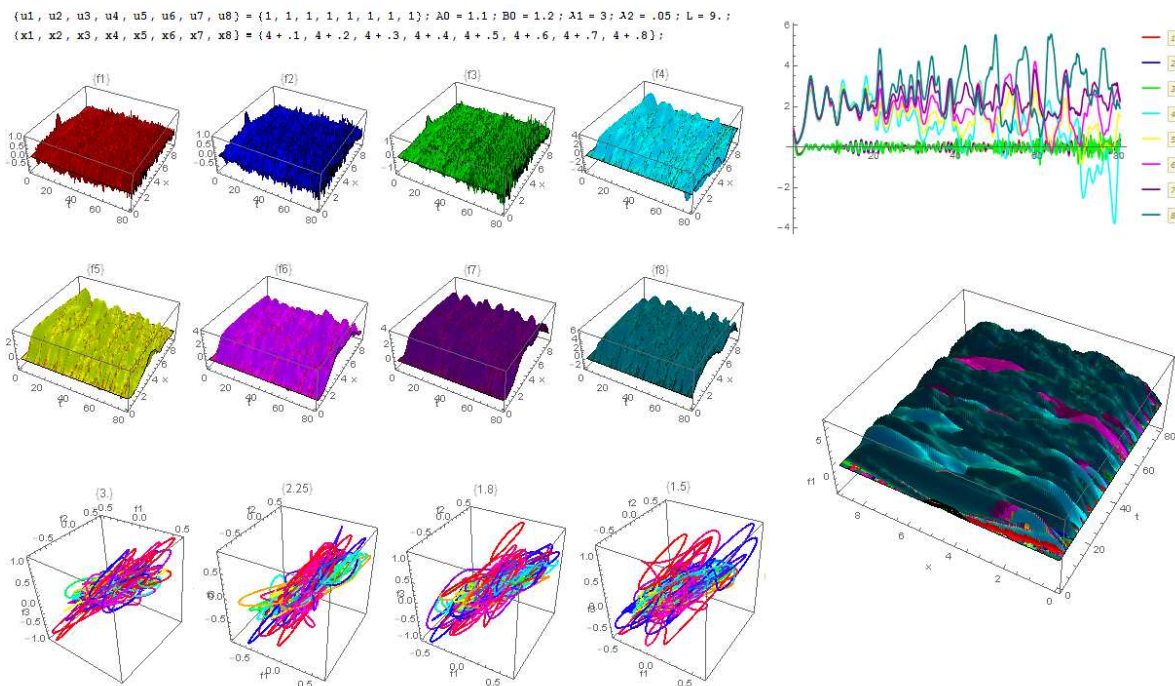


Рис. 6. Распад начального состояние восьми цветного поля Янга-Миллса: пять цветов подавляют три первых цвета; начальные данные задачи приведены в верхней части рисунка.

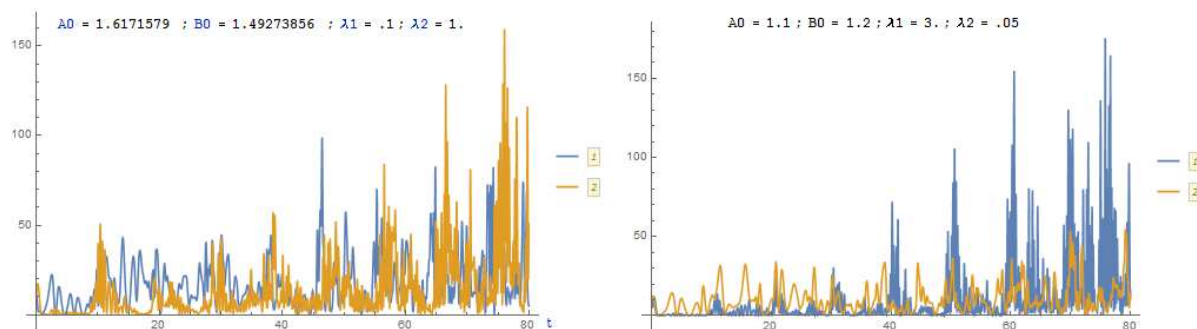


Рис. 7. Кинетическая энергия колебаний трех (1) и пяти (2) цветов: слева - в случае подавления пяти цветов (рис. 4); справа - в случае подавления трех цветов (рис. 6).

Здесь мы обнаруживаем своеобразный механизм развития турбулентности, при котором есть две взаимодействующих подсистемы, в одной из которых преобладают крупномасштабные и низкочастотные моды колебаний, а в другой – высокочастотные колебания с малой длиной волны. Отметим, что такой механизм развития турбулентности является характерным в случае гидродинамической турбулентности. Однако есть и существенное различие между двумя механизмами турбулентности заключающееся в том, что в системе (12) нет турбулентной диффузии, поэтому цвета не перемешиваются до однородного состояния, но каждый цвет существует индивидуально в любом режиме колебаний. Отметим, что это свойство относится только к обсуждаемой модели [12].

Хаотическое поведение точных решений уравнений Янга-Миллса

В работе [26] были построены точные решения уравнений Янга-Миллса в случае $SU(2)$ симметрии вида

$$\begin{aligned} \mathbf{A}_\mu(t, \mathbf{x}) &= a_{\mu\nu}(t, \mathbf{x})\mathbf{B}_\nu(u(t, \mathbf{x})) \\ \mathbf{B}_\mu &= a_\mu \mathbf{e}_1 f(u) + d_\mu \mathbf{e}_2 g(u) + b_\mu \mathbf{e}_3 h(u) \\ \mathbf{e}_1 &= (1,0,0)^T, \mathbf{e}_2 = (0,1,0)^T, \mathbf{e}_3 = (0,0,1)^T \end{aligned} \quad (15)$$

$$\begin{aligned} a_{\mu\nu} &= (a_\mu a_\nu - d_\mu d_\nu) \cosh \theta_0 + (d_\mu a_\nu - a_\mu d_\nu) \sinh \theta_0 + 2(a_\mu + d_\mu)[(\theta_1 \cos \theta_3 + \theta_2 \sin \theta_3)b_\mu - \\ & - (\theta_1 \sin \theta_3 - \theta_2 \cos \theta_3)c_\nu + (\theta_1^2 + \theta_2^2)e^{-\theta_0}(a_\nu + d_\nu)] + (b_\mu c_\nu - c_\mu b_\nu) \sin \theta_3 \\ & - (c_\mu c_\nu + b_\mu b_\nu) \cos \theta_3 - 2(\theta_1 b_\mu + \theta_2 c_\mu)e^{-\theta_0}(a_\nu + d_\nu) \end{aligned} \quad (16)$$

$a_\nu, b_\nu, c_\nu, d_\nu$ - произвольные параметры, удовлетворяющие условиям

$$\begin{aligned} a_\mu a^\mu &= -b_\mu b^\mu = -c_\mu c^\mu = -d_\mu d^\mu = 1 \\ a_\mu b^\mu &= a_\mu c^\mu = a_\mu d^\mu = b_\mu c^\mu = b_\mu d^\mu = c_\mu d^\mu = 0 \end{aligned}$$

$u(t, \mathbf{x}), \theta_\mu(t, \mathbf{x})$ - некоторые функции, которые в частном случае подалгебры L_8 можно представит в форме

$$\begin{aligned} \theta_0 &= \alpha \arctan(bx/cx), \theta_1 = \theta_2 = 0, \theta_3 = -\arctan(bx/cx), \\ u &= (bx)^2 + (cx)^2, bx = b_\mu x^\mu, cx = c_\mu x^\mu \end{aligned} \quad (17)$$

При подстановке выражений (15) в уравнения (7), находим систему обыкновенных дифференциальных уравнений

$$\begin{aligned} 4uf'' + 4f' + \frac{\alpha^2}{u} f - \frac{2\alpha e_0}{\sqrt{u}} gh - e_0^2 (h^2 + g^2) f &= 0 \\ 4ug'' + 4g' + \frac{\alpha^2}{u} g + \frac{2\alpha e_0}{\sqrt{u}} fh - e_0^2 (h^2 - f^2) g &= 0 \\ 4uh'' + 4h' - \frac{1}{u} h + \frac{2\alpha e_0}{\sqrt{u}} fg - e_0^2 (g^2 - f^2) h &= 0 \end{aligned} \quad (18)$$

Здесь $e_0 = g_{YM}$ – константа связи, α – произвольная константа, которая в данной модели играет роль константы связи. Выражения (15)-(17) вместе с уравнениями (18) описывают широкий класс волновых решений уравнений Янга-Миллса в случае $SU(2)$ симметрии.

Покажем, что если калибровочное поле можно представить в виде (15)-(19), то в такой системе наблюдается хаотическое поведение. Отметим, что система уравнений (18) отличается от системы уравнений (8) наличием параметров и ряда слагаемых, а также наличием особых точек $u \rightarrow 0, \infty$. Без ограничения общности можно положить $e_0 = 1$. Действительно, сделаем в системе уравнений (18) замену $u \rightarrow u/e_0^2$. Тогда параметр e_0 выпадет из системы, тогда как зависимость от параметра α сохраняется при любой перенормировке. Следовательно, параметр α в данной модели играет роль константы связи.

Начальные данные для системы уравнений (18) зададим в виде

$$\begin{aligned} f(0) &= f_0, g(0) = g_0, h(0) = h_0 \\ f'(0) &= g'(0) = h'(0) = 0 \end{aligned} \quad (19)$$

На рис. 8 представлены данные численного моделирования задачи (18) и (20). Параметры задачи отображены в виде листа $\{\alpha, f_0, g_0, h_0\}$ в верхней

части рис. 8. Можно видеть, что в системе наблюдаются как регулярные решения, так и решения, описывающие переход к хаосу, который зависит от параметров модели.

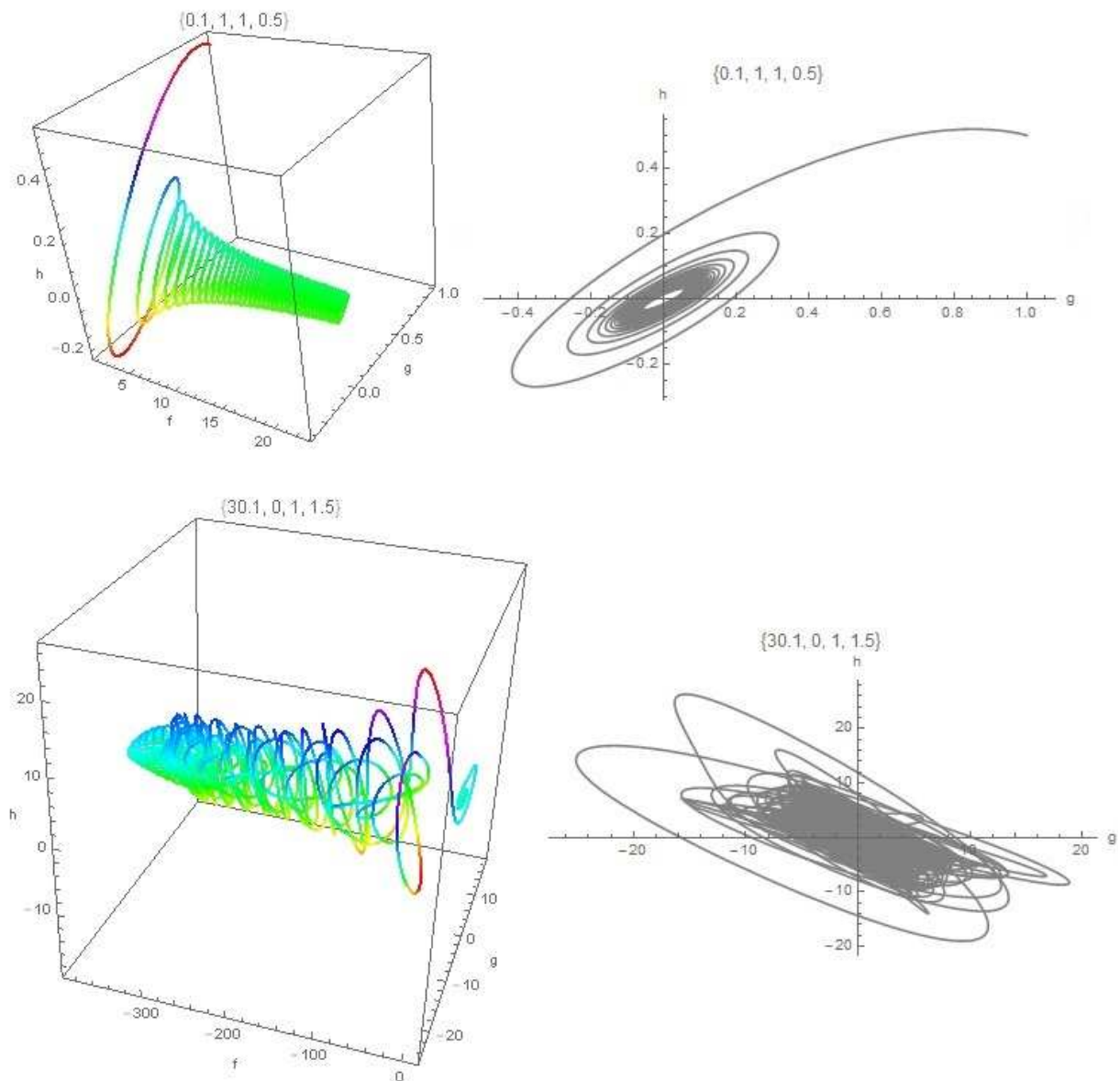


Рис. 8. Динамика волновых полей Янга-Миллса в модели (18): параметры модели и начальные данные указаны на листах в верхней части рисунков в форме $\{\alpha, f_0, g_0, h_0\}$.

Так, например, при увеличении параметра α система испытывает ряд переходов, один из которых показан на рис. 8 внизу. Такого рода переходы к хаотическому поведению при увеличении параметра являются характерными для гидродинамической турбулентности. В этом случае, как известно, переход к турбулентности осуществляется при увеличении числа Рейнольдса.

Таким образом, мы указали три системы уравнений, выведенных из теории Янга-Миллса, в которых наблюдается переход к хаотическому поведению. Эти переходы, обусловленные нелинейными колебаниями цвета, зависят от параметров модели – константы связи и начальной амплитуды волн.

Отметим, что общее свойство физических систем, описываемых нелинейными уравнениями в теории Янга-Миллса и в гидродинамике, особенно сильно проявляется в процессах образования кварк-глюонной плазмы и струй адронов, когда поле Янга-Миллса вовлечено в формирование гидродинамического течения. Существует также связь между уравнениями Эйнштейна и Янга-Миллса [17-18], с одной стороны, и уравнениями Эйнштейна и гидродинамики – с другой [19, 27-30]. Следует также заметить, что поле Янга-Миллса описывает калибровочную инвариантность системы при поворотах в изотопическом пространстве. Все это указывает на существование в природе общего механизма формирования особого вида турбулентности – геометрической турбулентности [19].

Библиографический список

1. Matinyan S.G., Savvidy G.K. and Ter-Arutyunyan-Savvidy N. G. Classical Yang-Mills mechanics. Nonlinear color oscillations// Sov. Phys. JETP, 80, 830-838, 1981; JETP Lett. 34, 590, 1981.
2. Nicolaevskii E.S., Shchur L.N. The nonintegrability of classical Yang-Mills equations// Zh. Eksp. Teor. Fis., 85, 3-13, 1983.

3. Matinyan S.G., E.B. Prokhorenko and G.K. Savvidy. Non-integrability of time-dependent spherically symmetric Yang-Mills equations//Nucl. Phys. B 298, 414, 1988.
4. Biro T.S., Matinyan S.G. and Muller B. Chaos and Gauge Field Theory/World Sci. Lect. Notes Phys. 56, 1, Singapore, 1994.
5. Biro T. S., Gong C. and Muller B. Lyapunov Exponent and Plasmon Damping Rate in Nonabelian Gauge Theories//Phys. Rev. D 52, 1260 (1995) [arXiv:hep-ph/9409392].
6. Matinyan S, Muller B. Quantum Fluctuations and Dynamical Chaos: An Effective Potential Approach// October 31, 1996, <http://cds.cern.ch/record/313828/files/9610233.pdf>
7. Matinyan S. Chaos in the Yang-Mills theory and cosmology: quantum aspects// arXiv:hep-th/0612102v1, 11 Dec 2006.
8. Hideaki Iida, Teiji Kunihiro, Akira Ohnishi, Toru T. Takahashi. Time evolution of gluon coherent state and its von Neumann entropy in heavy-ion collisions// arXiv:1410.7309v1, 27 Oct 2014.
9. Baier R., Mueller A.H., Schiff D., Son D.T. Bottom-up thermalisation in heavy ion collisions//Phys. Lett. B 502, 51, 2001, arXiv: hep-ph/0009237.
10. Dzhunushaliev V. Phase transition for gluon field: a qualitative analysis// arXiv:1211.4944v1 [hep-ph]
11. Dzhunushaliev V. Scalar model of the glueball// Hadronic J. Suppl. 19, 185, 2004.
12. Dzhunushaliev V. SU(3) glueball gluon condensate//arXiv:1110.1427 [hep-ph].
13. Dzhunushaliev V., Makhmudov A. Scalar model of glueball in nonperturbative quantisation à la Heisenberg// arXiv:1505.07005v1 [hep-ph], 24 May, 2015.
14. Трунев А.П. Спектр масс адронов и термодинамика глюонов// Политематический сетевой электронный научный журнал Кубанского государственного аграрного университета (Научный журнал КубГАУ) [Электронный ресурс]. – Краснодар: КубГАУ, 2013. – №07(091). С. 1561 – 1574.
15. Трунев А.П. Моделирование массы адронов и энергии возбужденных состояний атомных ядер в модели глюонного конденсата // Политематический сетевой электронный научный журнал Кубанского государственного аграрного университета (Научный журнал КубГАУ) [Электронный ресурс]. – Краснодар: КубГАУ, 2012. – №07(81). С. 545 – 554. – Режим доступа: <http://ej.kubagro.ru/2012/07/pdf/40.pdf>
16. Трунев А.П. О возбуждении электромагнитного излучения, ядерных реакций и распада частиц ускорением// Политематический сетевой электронный научный журнал Кубанского государственного аграрного университета (Научный журнал КубГАУ) [Электронный ресурс]. – Краснодар: КубГАУ, 2015. – №109(05). – Режим доступа: <http://ej.kubagro.ru/2015/05/pdf/90.pdf>
17. Девитт Б.С. Динамическая теория групп и полей. – Москва, Наука, 1987.
18. Кривоносов Л.Н., Лукьянов В.А. Связь уравнений Янга-Миллса с уравнениями Эйнштейна и Максвелла// Journal of Siberian Federal University, Mathematics & Physics 2009, 2(4), 432-448.
19. Трунев А.П. Геометрическая турбулентность и квантовая теория. – Palmarium Academic Publishing, ISBN 978-3-639-72485-1, 2015, 232 с.
20. Yang N., Mills R.L. Conservation of Isotopic Spin and Isotopic Gauge Invariance// Phys. Rev., 96, 191, 1954.
21. Струминский Б.В. Магнитные моменты барионов в модели кварков. – Препринт ОИЯИ, Р-1939, 1965.
22. Bogoliubov N.N., Struminsky B.V., Tavkhelidze A.N. On composite model in the theory of elementary particles. JINR publication D-1968, Dubna, 1965.

23. Fritzsche H., Gell-Mann M., Leutwyler H. Advantages of the color octet gluon picture// Phys. Lett. B 47, 365, 1973.
24. Трунев А.П. Уравнения Максвелла и Янга-Миллса в метрике ускоренных и вращающихся систем отсчета в общей теории относительности// Политематический сетевой электронный научный журнал Кубанского государственного аграрного университета (Научный журнал КубГАУ) [Электронный ресурс]. – Краснодар: КубГАУ, 2015. – №108(04).
25. Dovbish S.A., Borisov A.V. Nonintegrability of the Classical Homogeneous Three-Component Yang-Mills equations/ Numerical Modelling in the Problems of Mechanics, p. 157-166, 1991.
26. Zhdanov R.Z., Lahno V.I. Symmetry and Exact Solutions of the Maxwell and $SU(2)$ Yang-Mills Equations//arXiv:hep-th/0405286v1, 31 May 2004.
27. Sayantani Bhattacharyya et al. Conformal Nonlinear Fluid Dynamics from Gravity in Arbitrary Dimensions// arXiv: 0809.4272v2, 3 Dec, 2008.
28. Eling, I. Fouxon, Y. Oz. Gravity and Geometrization of Turbulence: An Intriguing Correspondence// arXiv:1004.2632, 28 Oct, 2010.
29. Bredberg, C. Keeler, V. Lysov, A. Strominger. From Navier-Stokes to Einstein// arXiv: 1101.2451, 12 Jan, 2011.
30. Hubeny V.E. The Fluid/Gravity Correspondence: a new perspective on the Membrane Paradigm// arXiv:1011.4948v2, February 22, 2011.

References

1. Matinyan S.G., Savvidy G.K. and Ter-Arutyunyan-Savvidy N. G. Classical Yang-Mills mechanics. Nonlinear color oscillations// Sov. Phys. JETP, 80, 830-838, 1981; JETP Lett. 34, 590, 1981.
2. Nicolaevskii E.S., Shchur L.N. The nonintegrability of classical Yang-Mills equations// Zh. Eksp. Teor. Fis., 85, 3-13, 1983.
3. Matinyan S.G., E.B. Prokhorenko and G.K. Savvidy. Non-integrability of time-dependent spherically symmetric Yang-Mills equations//Nucl. Phys. B 298, 414, 1988.
4. Biro T.S., Matinyan S.G. and Muller B. Chaos and Gauge Field Theory/World Sci. Lect. Notes Phys. 56, 1, Singapore, 1994.
5. Biro T. S., Gong C. and Muller B. Lyapunov Exponent and Plasmon Damping Rate in Nonabelian Gauge Theories//Phys. Rev. D 52, 1260 (1995) [arXiv:hep-ph/9409392].
6. Matinyan S, Muller B. Quantum Fluctuations and Dynamical Chaos: An Effective Potential Approach// October 31, 1996, <http://cds.cern.ch/record/313828/files/9610233.pdf>
7. Matinyan S. Chaos in the Yang-Mills theory and cosmology: quantum aspects// arXiv:hep-th/0612102v1, 11 Dec 2006.
8. Hideaki Iida, Teiji Kunihiro, Akira Ohnishi, Toru T. Takahashi. Time evolution of gluon coherent state and its von Neumann entropy in heavy-ion collisions// arXiv:1410.7309v1, 27 Oct 2014.
9. Baier R., Mueller A.H., Schiff D., Son D.T. Bottom-up thermalisation in heavy ion collisions//Phys. Lett. B 502, 51, 2001, arXiv: hep-ph/0009237.
10. Dzhunushaliev V. Phase transition for gluon field: a qualitative analysis// arXiv:1211.4944v1 [hep-ph]
11. Dzhunushaliev V. Scalar model of the glueball// Hadronic J. Suppl. 19, 185, 2004.
12. Dzhunushaliev V. $SU(3)$ glueball gluon condensate//arXiv:1110.1427 [hep-ph].

13. Dzhunushaliev V., Makhmudov A. Scalar model of glueball in nonperturbative quantisation `a la Heisenberg// arXiv:1505.07005v1 [hep-ph], 24 May, 2015.

14. Trunев A.P. Spektr mass adronov i termodinamika gljuonov// Politematicheskij setevoj jelektronnyj nauchnyj zhurnal Kubanskogo gosudarstvennogo agrarnogo universiteta (Nauchnyj zhurnal KubGAU) [Jelektronnyj resurs]. – Krasnodar: KubGAU, 2013. – №07(091). S. 1561 – 1574.

15. Trunев A.P. Modelirovanie massy adronov i jenergii vzbuzhdennyh sostojanij atomnyh jader v modeli gljuonnogo kondensata // Politematicheskij setevoj jelektronnyj nauchnyj zhurnal Kubanskogo gosudarstvennogo agrarnogo universiteta (Nauchnyj zhurnal KubGAU) [Jelektronnyj resurs]. – Krasnodar: KubGAU, 2012. – №07(81). S. 545 – 554. – Rezhim dostupa: <http://ej.kubagro.ru/2012/07/pdf/40.pdf>

16. Trunев A.P. O vzbuzhdenii jelektromagnitnogo izluchenija, jadernyh reakcij i raspada chastic uskoreniem// Politematicheskij setevoj jelektronnyj nauchnyj zhurnal Kubanskogo gosudarstvennogo agrarnogo universiteta (Nauchnyj zhurnal KubGAU) [Jelektronnyj resurs]. – Krasnodar: KubGAU, 2015. – №109(05). – Rezhim dostupa: <http://ej.kubagro.ru/2015/05/pdf/90.pdf>

17. Devitt B.S. Dinamicheskaja teorija grupp i polej. – Moskva, Nauka, 1987.

18. Krivososov L.N., Luk'janov V.A. Svjaz' uravnenij Janga-Millsa s uravnenijami Jejnshtejna i Maksvella// Journal of Siberian Federal University, Mathematics & Physics 2009, 2(4), 432-448.

19. Trunев A.P. Geometricheskaja turbulentsnost' i kvantovaja teorija. – Palmarium Academic Publishing, ISBN 978-3-639-72485-1, 2015, 232 s.

20. Yang N., Mills R.L. Conservation of Isotopic Spin and Isotopic Gauge Invariance// Phys. Rev., 96, 191, 1954.

21. Struminskij B.V. Magnitnye momenty barionov v modeli kvarkov. – Preprint OIJaI, R-1939, 1965.

22. Bogoliubov N.N., Struminsky B.V., Tavkhelidze A.N. On composite model in the theory of elementary particles. JINR publication D-1968, Dubna, 1965.

23. Fritsch H., Gell-Mann M., Leutwyler H. Advantages of the color octet gluon picture// Phys. Lett. B 47, 365, 1973.

24. Trunев A.P. Uravnenija Maksvella i Janga-Millsa v metrike uskorenyh i vrashhajushhihsja sistem otscheta v obshhej teorii odnositel'nosti// Politematicheskij setevoj jelektronnyj nauchnyj zhurnal Kubanskogo gosudarstvennogo agrarnogo universiteta (Nauchnyj zhurnal KubGAU) [Jelektronnyj resurs]. – Krasnodar: KubGAU, 2015. – №108(04).

25. Dovbish S.A., Borisov A.V. Nonintegrability of the Classical Homogeneous Three-Component Yang-Mills equations/ Numerical Modelling in the Problems of Mechanics, p. 157-166, 1991.

26. Zhdanov R.Z., Lahno V.I. Symmetry and Exact Solutions of the Maxwell and SU(2) Yang-Mills Equations//arXiv:hep-th/0405286v1, 31 May 2004.

27. Sayantani Bhattacharyya et all. Conformal Nonlinear Fluid Dynamics from Gravity in Arbitrary Dimensions// arXiv: 0809.4272v2, 3 Dec, 2008.

28. Eling, I. Fouxon, Y. Oz. Gravity and Geometrization of Turbulence: An Intriguing Correspondence// arXiv:1004.2632, 28 Oct, 2010.

29. Bredberg, C. Keeler, V. Lysov, A. Strominger. From Navier-Stokes to Einstein// arXiv: 1101.2451, 12 Jan, 2011.

30. Hubeny V.E. The Fluid/Gravity Correspondence: a new perspective on the Membrane Paradigm// arXiv:1011.4948v2, February 22, 2011.

<http://ej.kubagro.ru/2015/06/pdf/108.pdf>