УДК 519.1

ОЦЕНКА ДИАМЕТРА ОБЛАСТИ РАСПРОСТРАНЕНИЯ ВИРУСОВ ПО МОДЕЛЯМ НА ПРЕДФРАКТАЛЬНЫХ ГРАФАХ

Байрамукова Зухра Халитовна

Кочкаров Ахмат Магометович
д.ф.-м.н., профессор

Кунижева Лариса Адамовна
Северо-Кавказская государственная гуманитарно-технологическая академия, Черкесск, Россия

Исследуется задача оценивания диаметров предфрактальных графов с затравками- звездами и с полными затравками, смежность старых ребер которых в траектории не нарушается, по спектрам

Ключевые слова: ДИАМЕТР ПРЕДФРАКТАЛЬНОГО ГРАФА, СПЕКТР ПРЕДФРАКТАЛЬНОГО ГРАФА, ИНВАРИАНТНЫЕ ПО ФОРМЕ МАТРИЦЫ.

UDC 519.1

ESTIMATION OF VIRUSES DISTRIBUTION AREA DIAMETER USING MODELS ON PREFRACTAL GRAPHS

Bayramukova Zuhra Halitovna

Kochkarov Ahmat Magometovich
Dr.Sci.Phys.-Math., professor

Kunizheva Larisa Adamovna
North-Caucasian State Humanitarian Technological Academy, Cherkessk, Russia

The article investigates the problem of estimation of diameters of prefractal graphs with priming stars and with full priming which contiguity of old edges in a trajectory isn't broken on spectra

Keywords: PREFRACTAL GRAPH DIAMETER, PREFRACTAL GRAPH SPECTRA, INVARIANT BY FORM MATRIXES

На протяжении всей истории, человека сопровождают различные инфекционные болезни. И человечество постоянно борется с ними. Несмотря на высокий уровень развития медицины и достигнутые успехи, инфекционные болезни остаются одной из ведущих причин преждевременной смерти людей. В этой области перед учеными ставятся новые сложные задачи. Одним из способов повышения эффективности их решения является использование методов математического моделирования.

Основными возбудителями инфекционных болезней являются вирусы, бактерии и простейшие [1-3]. Заболевший человек сам становится источником возбудителей болезни. Он может заразить окружающих при контакте с ними или путем загрязнения возбудителями различных объектов внешней среды. Особенно опасны для окружающих больные, которые своевременно не обращаются за медицинской помощью. Как можно раннее выявление инфекционного больного, немедленная изоляция и госпитализация – ответственная задача медицинских работников.

Как известно, одним из подходов к построению математической модели распространения инфекционных болезней являются различные предфрактальные графы [4-7]. Знание диаметра предфрактального графа моделирующего распространение инфекции позволяет делать предположения о возможном местонахождении больных, не обратившихся в медицинские учреждения, определения области карантина и территории вакцинации. В этой работе рассмотрим предфрактальные графы, которые являются моделями распространения инфекционных заболеваний, а также вирусов в компьютерных сетях.

Предфрактальный граф - *(n,L)*-граф $G_L = (V_L, E_L)$ можно определить рекуррентно (по шагам), заменяя каждый раз в построенном на предыдущем шаге $l \in \{1,2,...,L\}$ графе G_l каждую его вершину *n*-вершинным графом-затравкой, где *L* - количество рангов (шагов), породивших *(n,L)*-граф. Другими словами, применяя операцию замены вершины затравкой (ЗВЗ) [4-6]. Процесс порождения предфрактального графа G_L, по существу, есть процесс построения последовательности предфрактальных графов $G_1, G_2, ..., G_L$ называемый *траекторией*. Для предфрактального графа G_L, ребра, появившиеся на *l*- ом, $l \in \{1,2,...,L\}$ этапе порождения, будем называть *ребрами ранга l*. *Новыми* ребрами предфрактального графа G_L назовем ребра ранга *l*, а все остальные ребра назовем – *старыми*. Основные определения и понятия на предфрактальных графах идентичны определениям на графах [8]. В основном, при моделировании предфрактальными графами распространения инфекционных заболеваний, затравками $H = (W, Q)$ являются *n*-вершинная звезда или полный граф. Одним из путей для оценки диаметра D_L предфрактального графа $G_L = (V_L, E_L)$ является использование его спектра.

В исследованиях [9 – 12] были получены рекуррентные формулы для характеристических многочленов предфрактальных графов, сохраняющих смежность старых ребер, с инвариантными по форме матрицами смежности при различных затравках (звезда, полный граф, цепь, простой цикл). Эти формулы намного упрощают процесс нахождения собственных значений (спектра) таких предфрактальных графов. Знание собственных значений, в свою очередь, позволяет оценить [13] различные характеристики предфрактальных графов (диаметр, хроматическое число и т.д.). В данной работе исследуем задачу получения оценок диаметров предфрактальных графов с затравкой-звездой и с полной затравкой, сохраняющих смежность старых ребер в траектории и имеющих инвариантные по форме матрицы смежности. Для получения таких оценок будем использовать следующие результаты [13]:

Граф содержащий, по крайней мере, одно ребро, является двудольным тогда и только тогда, когда его спектр, рассматриваемый как множество точек действительной оси, симметричен по отношению к нулевой точке.

Если связный граф G имеет точно m различных собственных значений, то его диаметр D удовлетворяет неравенству $D \le m - 1$.

Рассмотрим последовательность симметрических матриц $\{A_l\}$ порядка n^l. A_1 – матрица у которой по главной диагонали нули, а остальные элементы нули, либо единицы. A_l – матрица в которой единицам в A_1 соответствуют блоки – единичные матрицы порядка n^{l-1}, нулям – нулевые матрицы того же порядка, за исключением первого в главной диагонали – ему соответствует матрица A_{l-1}. Матрицы последовательности $\{A_l\}$ будем называть *инвариантными по форме* [9].

Например, $A_1 = \begin{vmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 \end{vmatrix}$, $A_2 = \begin{vmatrix} A_1 & I & 0 \\ I & 0 & I \\ 0 & I & 0 \end{vmatrix}$, …, $A_l = \begin{vmatrix} A_{l-1} & I & 0 \\ I & 0 & I \\ 0 & I & 0 \end{vmatrix}$ - инвариантные по форме матрицы.

Рассмотрим сначала предфрактальный граф $G_L = (V_L, E_L)$ с затравкой $H = (W, Q)$ - звездой с числом вершин *n*. Также предположим, что при операции ЗВЗ старые ребра соединяются с корневой вершиной затравки. Из этого условия следует, что предфрактальный граф $G_L = (V_L, E_L)$ сохраняет смежность старых ребер и имеет инвариантные матрицы смежности в траектории [9].

Пусть сначала n=3. Рекуррентная формула для определения характеристических многочленов предфрактальных графов последовательных этапов траектории $G_1, G_2, ..., G_L$ такого предфрактального графа, имеет вид [10]

$$P_{G_l}(\lambda) = \left|\lambda^2\left(\lambda^* - \frac{2}{\lambda}\right)I\right| = \left|\lambda^2\left(\lambda I - A_{l-1} - \frac{2}{\lambda}I\right)\right| = \left|\frac{\lambda^2 - 2}{\lambda}I - A_{l-1}\right| \cdot \lambda^{2\cdot 3^{l-1}} == \lambda^{2\cdot 3^{l-1}} P_{G_{l-1}}\left(\frac{\lambda^2 - 2}{\lambda}\right). \quad (1)$$

Здесь l – этап траектории предфрактального графа $l = \overline{1, L}$, $\lambda^* = \lambda I - A_{l-1}$, при l=1 $\lambda^* = \lambda$. Следовательно,

$$P_{G_1}(\lambda) = \lambda^2\left(\lambda - \frac{2}{\lambda}\right) = \lambda^3 - 2\lambda. = \lambda\left(\lambda - \sqrt{2}\right)\left(\lambda + \sqrt{2}\right).$$

Отсюда видно, что число различных собственных значений $m_1 = 3$, а спектр затравки симметричен относительно нулевой точки. Следуя [13], получаем оценки для диаметра и хроматического числа затравки

$$D_1 \le 2, \chi(G_1) = 2.$$

По формуле (1) для следующего этапа получаем

$$P_{G_2}(\lambda) = \lambda^{2\cdot 3} P_{G_1}\left(\frac{\lambda^2 - 2}{\lambda}\right). = \lambda^6 \cdot \frac{\lambda^2 - 2}{\lambda}\left(\frac{\lambda^2 - 2}{\lambda} - \sqrt{2}\right)\left(\frac{\lambda^2 - 2}{\lambda} + \sqrt{2}\right)$$
$$= \lambda^3\left(\lambda^2 - 2\right)\left(\lambda^2 - \sqrt{2}\lambda - 2\right)\left(\lambda^2 + \sqrt{2}\lambda - 2\right).$$

Отсюда следует, что каждому собственному значению затравки (без учета кратности) на втором этапе соответствуют два различных собственных значения, поскольку дискриминанты квадратных трехчленов положительны. Таким образом, с учетом нулевого собственного значения $m_2 = 7$, причем спектр остается симметричным относительно нулевой точки. Это означает, что справедливы оценки

$$D_2 \le 6, \chi(G_2) = 2.$$

Пусть λ_i - различные собственные значения предфрактального графа G_{l-1} предыдущего этапа траектории, с соответствующими кратностями α_i, $\sum_{i=1}^{m_{l-1}} \alpha_i = 3^{l-1}$. Тогда по формуле (1) $P_{G_l}(\lambda)$ можно представить в виде

$$P_{G_l}(\lambda) = \lambda^{2\cdot 3^{l-1}} P_{G_{l-1}}\left(\frac{\lambda^2 - 2}{\lambda}\right) = \lambda^{2\cdot 3^{l-1}} \prod_{i=1}^{m_{l-1}} \left(\frac{\lambda^2 - 2}{\lambda} - \lambda_i\right)^{\alpha_i} = \lambda^{3^{l-1}} \prod_{i=1}^{m_{l-1}} \left(\lambda^2 - \lambda_i \cdot \lambda - 2\right)^{\alpha_i}.$$

Отсюда следует, что как и при l=2 каждому собственному значению предфрактального графа G_{l-1} соответствует два различных собственных значения предфрактального графа G_l, так как дискриминанты квадратных трехчленов $\lambda^2 - \lambda_i \cdot \lambda - 2$ положительны. С учетом нулевого собственного значения имеем $m_l = 2m_{l-1} + 1$. Выразим m_l через m_1

$$\begin{aligned}
m_2 &= 2m_1 + 1, \\
m_3 &= 2m_2 + 1 = 2(2m_1 + 1) + 1 = 2^2 m_1 + 2^1 + 1, \ldots, \\
m_l &= 2^{l-1} m_1 + 2^{l-2} + \ldots + 2^1 + 1 = 2^{l-1} m_1 + 2^{l-1} - 1.
\end{aligned}$$

Так как $m_1 = 3$, то $m_l = 2^{l+1} - 1$.

Покажем, что если спектр графа G_{l-1} симметричен относительно нулевой точки, то спектр графа G_l также симметричен относительно нулевой точки. Если λ_i и $-\lambda_i$ собственные значения G_{l-1}, то соответствующие им собственные значения G_l являются корнями квадратных трехчленов $\lambda^2 - \lambda_i \cdot \lambda - 2$ и $\lambda^2 + \lambda_i \cdot \lambda - 2$. Следовательно, это числа:

$\pm\frac{\lambda_i-\sqrt{\lambda_i^2+8}}{2},\pm\frac{\lambda_i+\sqrt{\lambda_i^2+8}}{2}$, т.е. пары взаимно противоположных чисел. Таким образом,

$$D\le 2\left(2^l-1\right), \chi(G_l)=2 \;\; (l=\overline{1,L}).$$

Пусть n – произвольное. Рекуррентная формула для определения характеристических многочленов предфрактальных графов в траектории предфрактального графа $G_L=(V_L,E_L)$ имеет вид [10]

$$P_{G_l}(\lambda)=\lambda^{(n-1)\cdot n^{l-1}}P_{G_{l-1}}\left(\frac{\lambda^2-(n-1)}{\lambda}\right), \tag{2}$$

а характеристический многочлен затравки

$$P_{G_1}(\lambda)=\lambda^{n-1}\left(\lambda-\frac{n-1}{\lambda}\right)=\lambda^n-(n-1)\lambda^{n-2}=\lambda^{n-2}\left(\lambda-\sqrt{n-1}\right)\left(\lambda+\sqrt{n-1}\right).$$

При l=2 получаем

$$P_{G_2}(\lambda)=\lambda^{(n-1)\cdot n}\;P_{G_1}\left(\frac{\lambda^2-(n-1)}{\lambda}\right)=$$
$$=\lambda^{(n-1)n}\left(\frac{\lambda^2-(n-1)}{\lambda}\right)^{n-2}\left(\frac{\lambda^2-(n-1)}{\lambda}-\sqrt{n-1}\right)\left(\frac{\lambda^2-(n-1)}{\lambda}+\sqrt{n-1}\right)=$$
$$=\lambda^{n(n-2)}\left(\lambda^2-(n-1)\right)^{n-2}\left(\lambda^2-\sqrt{n-1}\lambda-(n-1)\right)\left(\lambda^2+\sqrt{n-1}\lambda-(n-1)\right).$$

Отсюда видно, что далее все рассуждения, проведенные при n=3, остаются справедливыми и для любого n. Итак,

$$D_l\le 2\left(2^l-1\right), \chi(G_l)=2.$$

Таким образом, доказана

Теорема 1. Для диаметра D_L предфрактального графа $G_L=(V_L,E_L)$ с затравкой $H=(W,Q)$ - звездой с числом вершин n, в котором при операции ЗВЗ старые ребра соединяются с корневой вершиной затравки, справедлива оценка $D_L\le 2\left(2^L-1\right)$.

Замечание. При получении теоремы 1 установлено также, что рассмотренный предфрактальный граф $G_L=(V_L,E_L)$ является двудольным, т.к. его спектр симметричен относительно нулевой точки согласно утверждению [13]:

Граф содержащий, по крайней мере, одно ребро, является двудольным тогда и только тогда, когда его спектр, рассматриваемый как множество точек действительной оси, симметричен по отношению к нулевой точке.

Оценим теперь диаметр предфрактального графа с полной затравкой K_n, сохраняющего смежность старых ребер в траектории. Характеристический многочлен предфрактального графа $G_L = (V_L, E_L)$ с полной n-вершинной затравкой $H = (W, Q)$ (смежность старых ребер не нарушена) определяется по рекуррентной формуле [10]:

$$P_{G_l}(\lambda) = (\lambda+1)^{(n-2)n^{l-1}}(\lambda-(n-2))^{n^{l-1}} P_{G_{l-1}}\left(\frac{(\lambda-(n-2))\lambda-(n-1)}{\lambda-(n-2)}\right), \qquad (3)$$

а характеристический многочлен полного графа (затравки $H = (W, Q)$) [10]

$$P_{G_1}(\lambda) = (\lambda+1)^{n-1}(\lambda-(n-1)).$$

Таким образом, число различных собственных значений графа $G_1 = H$ - $m_1 = 2$. Следовательно, $D_1 \le 1$.

Используя формулу (3), получаем

$$P_{G_2}(\lambda) = (\lambda+1)^{(n-2)n}(\lambda-(n-2))^n P_{G_1}\left(\frac{(\lambda-(n-2))\lambda-(n-1)}{\lambda-(n-2)}\right) =$$
$$= (\lambda+1)^{(n-2)n}(\lambda-(n-2))^n\left(\frac{(\lambda-(n-2))\lambda-(n-1)}{\lambda-(n-2)}+1\right)^{n-1}\left(\frac{(\lambda-(n-2))\lambda-(n-1)}{\lambda-(n-2)}-(n-1)\right) =$$
$$= (\lambda+1)^{(n-2)n}\left(\lambda^2-(n-3)\lambda-(2n-3)\right)^{n-1}\left(\lambda^2-(2n-3)\lambda+(n-1)(n-3)\right).$$

Определим число различных собственных значений графа G_2. Для этого оценим дискриминанты d_1, d_2 квадратных трехчленов в последнем выражении. Из теории матриц [14] известно, что собственные значения симметрических матриц действительны, т.е. эти дискриминанты неотрицательны. Поскольку, матрицы смежности неориентированных графов симметричны [8]. Найдем их: $d_1 = (n-3)^2 + 4(2n-3) > 0$ при $n > 1$,

$d_2 = (2n-3)^2 - 4(n-1)(n-3) = 4n^2 - 12n + 9 - 4n^2 + 16n - 12 = 4n - 3 > 0$ при $n \ge 1$. Следовательно, $m_2 = 5$ и $D_2 \le 4$.

Пусть λ_i - различные собственные значения предфрактального графа предыдущего этапа траектории G_{l-1}, с соответствующими кратностями α_i. Тогда по формуле (3) $P_{G_l}(\lambda)$ можно представить в виде

$$P_{G_l}(\lambda) = (\lambda+1)^{(n-2)n^{l-1}} (\lambda-(n-2))^{n^{l-1}} \prod_{i=1}^{m_{l-1}} \left(\frac{(\lambda-(n-2))\lambda-(n-1)}{\lambda-(n-2)} - \lambda_i \right)^{\alpha_i} =$$
$$= (\lambda+1)^{(n-2)n^{l-1}} \prod_{i=1}^{m_{l-1}} \left((\lambda-(n-2))\lambda-(n-1)-\lambda_i(\lambda-(n-2)) \right)^{\alpha_i} =$$
$$= (\lambda+1)^{(n-2)n^{l-1}} \prod_{i=1}^{m_{l-1}} \left((\lambda^2-(n-2+\lambda_i)\lambda+\lambda_i(\mathrm{n}-2)-(n-1) \right)^{\alpha_i}.$$

Оценим дискриминанты квадратных трехчленов в последнем выражении.

$$d_i = (n-2+\lambda_i)^2 - 4(\lambda_i(n-2)-(n-1)) = (n-2)^2 + 2(n-2)\lambda_i + \lambda_i^2 - 4\lambda_i(n-2) + 4(n-1) =$$
$$= (n-2)^2 - 2(n-2)\lambda_i + \lambda_i^2 + 4(n-1) = (n-2-\lambda_i)^2 + 4(n-1) > 0,$$

при $n > 1$. Таким образом, каждому собственному значению графа G_{l-1} в характеристическом многочлене графа G_l соответствует множитель – квадратный трехчлен с положительным дискриминантом, т.е. два различных собственных значения графа G_l. С учетом собственного значения -1 получаем, что число различных собственных значений графа G_l $m_l = 2m_{l-1} + 1$. Выразив m_l через m_1, имеем

$$m_l = 2^{l-1} m_1 + 2^{l-1} - 1.$$

Так как $m_1 = 2$, то $m_l = 3 \cdot 2^{l-1} - 1$ и $D_l \le 3 \cdot 2^{l-1} - 2$ где $l = \overline{1, L}$. Проведенные рассуждения доказывают следующую теорему.

Теорема 2. Для диаметра D_L предфрактального графа $G_L = (V_L, E_L)$ с полной затравкой $H = (W, Q)$ с числом вершин n, сохраняющего смежность старых ребер в траектории, справедлива оценка $D_L \le 3 \cdot 2^{L-1} - 2$.

Задача оценивания диаметров предфрактальных графов с затравками-звездами и с полными затравками, смежность старых ребер которых в траектории не нарушается, по спектрам рассматривалась впервые. В результате проведенных исследований, исходя из спектров получены оценки диаметров предфрактального графа с затравкой-звездой $K_{1,n}$ в котором при операции ЗВЗ старые ребра соединяются с корневой вершиной затравки и предфрактального графа с полной затравкой K_n, смежность старых ребер которых в траектории не нарушается. Полученные оценки выражены через ранги рассмотренных предфрактальных графов, что упрощает их вид и использование. Эти оценки представлены в доказанных теоремах 1 и 2.

Список литературы

1.Бароян О.В., Рвачев Л.А. Математика и эпидемиология. – М.: Знание, 1977. – 63 с.

2.Бароян О.В., Рвачев Л.А., Иванников Ю.Г. Моделирование и прогнозирование эпидемий гриппа для территории СССР. – М.: Институт эпидемиологии и микробиологии имени Н.Ф. Гамалеи, 1977. – 546 с.

3.Бароян О.В., Рвачев Л.А. Прогнозирование эпидемий гриппа в условиях СССР. / Вопросы вирусологии. - 1978. –№ 2. – С.131-137.

4.Кочкаров А. М. Распознавание фрактальных графов. Алгоритмический подход.- Нижний Архыз: РАН САО.1998. 170 с.

5.Кочкаров А.А., Кочкаров Р.А. Параллельный алгоритм поиска кратчайшего пути на предфрактальном графе. // Журнал вычислительной математики и математической физики. – Т. 44. № 6.-С. 1147 - 1152.

6. Байрамукова З.Х., Кочкаров А.М. Алгоритм вычисления определителей матриц смежностей предфрактальных графов с полными затравками, сохраняющих смежность старых ребер в траектории. // Научный журнал КубГАУ. №81(07). 2013 года. 10 с.

7.Утакаева И.Х., Кочкаров А.М. Моделирование процесса распространения эпидемии и нахождение возможных очагов заражения на предфрактальном графе.// Сборник трудов III-ей Всероссийской научно-практической конференции «Перспективные системы и задачи управления». – Таганрог: Издательство Таганрогского технологического института ЮФУ, 2011. – С. 273-283.

8.Емеличев В.А., Мельников О.И., Сарванов В.И., Тышкевич Р.И. Лекции по теории графов. -М.:Наука,1990. 384 с.

9.Байрамукова З.Х., Кочкаров А.М. Спектры предфрактальных графов с затравками – циклами, сохраняющих смежность старых ребер.// Научный журнал КубГАУ. №81(07). 2012 года. 10 с.

10. Байрамукова З.Х., Кочкаров А.М. Спектры предфрактальных графов с полными затравками, в которых смежность старых ребер сохраняется.// Перспективные системы и задачи управления: Материалы шестой научно-практической конференции. Таганрог. 2011.С. 291-294.

11. Байрамукова З.Х., Кочкаров А.М. Определение спектров предфрактальных графов определенных структур для принятия управленческих решений.// Перспективные системы и задачи управления: Материалы девятой научно-практической конференции. Таганрог. 2014.С.326-335.

12. Байрамукова З.Х., Урусова Г.З. Спектры предфрактальных графов с затравками-звездами, сохраняющих смежность старых ребер.// Материалы IV Международной конференции «Нелокальные краевые задачи и родственные проблемы математической биологии, информатики и физики». Нальчик. 2013.С. 62-63.

13. Цветкович Д., Дуб М., Захс Х. Спектры графов: теория и применение. Наукова Думка. Киев.1984. 384 с.

14. Гантмахер Ф.Р. Теория матриц. М.: Наука, 1988. 552 с.

References

1. Barojan O.V., Rvachev L.A. Matematika i jepidemiologija. – M.: Znanie, 1977. – 63 s.

2. Barojan O.V., Rvachev L.A., Ivannikov Ju.G. Modelirovanie i prognozirovanie jepidemij grippa dlja territorii SSSR. – M.: Institut jepidemiologii i mikrobiologii imeni N.F. Gamalei, 1977. – 546 s.

3. Barojan O.V., Rvachev L.A. Prognozirovanie jepidemij grippa v uslovijah SSSR. / Voprosy virusologii. - 1978. –№ 2. – S.131-137.

4. Kochkarov A. M. Raspoznavanie fraktal'nyh grafov. Algoritmicheskij podhod.- Nizhnij Arhyz: RAN SAO.1998. 170 s.

5. Kochkarov A.A., Kochkarov R.A. Parallel'nyj algoritm poiska kratchajshego puti na predfraktal'nom grafe. // Zhurnal vychislitel'noj matematiki i matematicheskoj fiziki. – T. 44. № 6.-S. 1147 - 1152.

6. Bajramukova Z.H., Kochkarov A.M. Algoritm vychislenija opredelitelej matric smezhnostej predfraktal'nyh grafov s polnymi zatravkami, sohranjajushhih smezhnost' staryh reber v traektorii. // Nauchnyj zhurnal KubGAU. №81(07). 2013 goda. 10 s.

7. Utakaeva I.H., Kochkarov A.M. Modelirovanie processa rasprostranenija jepidemii i nahozhdenie vozmozhnyh ochagov zarazhenija na predfraktal'nom grafe.// Sbornik trudov III-ej Vserossijskoj nauchno-prakticheskoj konferencii «Perspektivnye sistemy i zadachi upravlenija». – Taganrog: Izdatel'stvo Taganrogskogo tehnologicheskogo instituta JuFU, 2011. – S. 273-283.

8. Emelichev V.A., Mel'nikov O.I., Sarvanov V.I., Tyshkevich R.I. Lekcii po teorii grafov. -M.:Nauka,1990. 384 s.

9. Bajramukova Z.H., Kochkarov A.M. Spektry predfraktal'nyh grafov s zatravkami – ciklami, sohranjajushhih smezhnost' staryh reber.// Nauchnyj zhurnal KubGAU. №81(07). 2012 goda. 10 s.

10. Bajramukova Z.H., Kochkarov A.M. Spektry predfraktal'nyh grafov s polnymi zatravkami, v kotoryh smezhnost' staryh reber sohranjaetsja.// Perspektivnye sistemy i zadachi upravlenija: Materialy shestoj nauchno-prakticheskoj konferencii. Taganrog. 2011.S. 291-294.

11. Bajramukova Z.H., Kochkarov A.M. Opredelenie spektrov predfraktal'nyh grafov opredelennyh struktur dlja prinjatija upravlencheskih reshenij.// Perspektivnye sistemy i zadachi upravlenija: Materialy devjatoj nauchno-prakticheskoj konferencii. Taganrog. 2014.S.326-335.

12. Bajramukova Z.H., Urusova G.Z. Spektry predfraktal'nyh grafov s zatravkami-zvezdami, sohranjajushhih smezhnost' staryh reber.// Materialy IV Mezhdunarodnoj konferencii «Nelokal'nye kraevye zadachi i rodstvennye problemy matematicheskoj biologii, informatiki i fiziki». Nal'chik. 2013.S. 62-63.

13. Cvetkovich D., Dub M., Zahs H. Spektry grafov: teorija i primenenie. Naukova Dumka. Kiev.1984. 384 s.

14. Gantmaher F.R. Teorija matric. M.: Nauka, 1988. 552 s.