УДК 330.35, 330.4, 551.583

СИНГУЛЯРНЫЙ РОСТ В МОДЕЛИ СОВОКУПНОЙ ОЦЕНКИ, ОСНОВАННОЙ НА МОДИФИКАЦИИ МОДЕЛИ СОЛОУ

Ковалевский Дмитрий Валерьевич
к.ф.-м.н.
Международный центр по окружающей среде и дистанционному зондированию им. Нансена, Санкт-Петербург, Россия
Санкт-Петербургский государственный университет, Санкт-Петербург, Россия
Центр по окружающей среде и дистанционному зондированию им. Нансена, Берген, Норвегия

Ковалевская Лидия Дмитриевна
к.э.н., доцент
Санкт-Петербургский государственный экономический университет, Санкт-Петербург, Россия

Рассмотрена модифицированная модель Солоу с эндогенным техническим прогрессом, демонстрирующая «взрывной», сингулярный рост. Выведена формула для момента наступления сингулярности. Данная модель «надстроена» до экономико-климатической модели (модели совокупной оценки), описывающая рост мировой экономики в условиях глобальных климатических изменений. Найдено нетривиальное стационарное решение модели. Показано, что данное решение является неустойчивым, а разработанная модель совокупной оценки демонстрирует режим «взрывного» роста, как и исходная модификация модели Солоу

Ключевые слова: МОДЕЛЬ СОЛОУ, ИЗМЕНЕНИЯ КЛИМАТА, МОДЕЛЬ СОВОКУПНОЙ ОЦЕНКИ, СИНГУЛЯРНОСТЬ

UDC 330.35, 330.4, 551.583

SINGULAR GROWTH IN AN INTEGRATED ASSESSMENT MODEL BASED ON A MODIFICATION OF THE SOLOW MODEL

Kovalevsky Dmitry Valerievich
Cand.Phys.-Math.Sci.
Nansen International Environmental and Remote Sensing Centre, St. Petersburg, Russia
St. Petersburg State University, St. Petersburg, Russia
Nansen Environmental and Remote Sensing Center, Bergen, Norway

Kovalevskaya Lidia Dmitrievna
Cand.Econ.Sci., associate professor
St. Petersburg State University of Economics, St. Petersburg, Russia

A modified version of the Solow model with endogenous technical progress is considered that exerts “explosive”, singular growth. A formula for the point of time of singularity is derived. The model is “upgraded” to a climate–economy model (an Integrated Assessment model) describing the growth of the world economy under conditions of global climate change. A non-trivial stationary solution of the model is obtained. It is shown that this solution is unstable, and that the developed model manifests “explosive growth” like the initial modification of the Solow model

Keywords: SOLOW MODEL, CLIMATE CHANGE, INTEGRATED ASSESSMENT MODEL, SINGULARITY

1. Введение

Модели совокупной оценки (англ. Integrated Assessment models) разрабатываются с целью оценки эффективности предлагаемых мер по смягчению глобальных климатических изменений, а также возможных социально-экономических последствий данных мер. Подобные модели рассчитывают динамику объединенной экономико–климатической системы при различных возможных сценариях климатической политики. Как правило, они состоят из двух взаимосвязанных модулей: экономического и климатического. Экономический модуль может описывать мировую экономику агрегированно (в более простых моделях), а может быть детализирован в региональном и отраслевом разрезах, что придает и самим моделям, и выполняемым на их основе исследованиям существенно большую степень реалистичности [5, 10]. В упрощенных теоретических моделях в качестве экономического модуля можно использовать одну из широко известных моделей экономического роста: модель Солоу, модель Рамсея, *AK*-модель и т.д.

В теории экономического роста известны модели, демонстрирующие «взрывной», сингулярный рост, когда фазовые переменные обращаются в бесконечность за *конечное* время [11]. Иными словами, в подобных моделях экономический рост является кардинально более быстрым, чем экспоненциальный.

Что произойдет, если построить экономико-климатическую модель на основе экономической модели, демонстрирующей «взрывной» рост, и замкнуть модель отрицательной обратной связью от климатического модуля, способствующей для других моделей установлению режима «пределов роста» [7]? Станет ли сингулярная динамика регулярной, или же рост сохранит свой «взрывной» характер? Настоящая работа отвечает на данный методический вопрос посредством детального анализа конкретного примера.

Статья организована следующим образом. В разделе 2 кратко описана модифицированная модель Солоу с эндогенным технологическим прогрессом. В разделе 3 выведена точная формула для момента наступления сингулярности в данной модели. В разделе 4 показано, как на основе данной модели путем добавления климатического модуля можно построить модель совокупной оценки. Раздел 5 посвящен описанию процедуры нахождения нетривиального стационарного решения полученной модели совокупной оценки. В разделе 6 выполнен анализ устойчивости стационарного решения в линейном приближении (приводящий к выводу о его неустойчивости для реалистичных значений параметров модели), и на основе численных экспериментов показано, что модель совокупной оценки по-прежнему демонстрирует «взрывной» рост, подобно исходной модификации модели Солоу. Раздел 7 завершает работу.

2. Модель Солоу с эндогенным техническим прогрессом

Модифицируем стандартную модель Солоу [1] с производственной функцией Кобба–Дугласа, предполагая, что технологический параметр в данной функции не является постоянной величиной (как было в стандартной модели), а, напротив, линеен по капиталовооруженности.[1] Таким образом, с ростом капиталовооруженности технологический параметр растет, и технический прогресс в модифицированной модели принимает эндогенный характер.[2] При этом итоговая производственная функция демонстрирует возрастающую отдачу от масштаба.

Фазовой переменной модели является капиталовооруженность k (физический капитал на единицу труда), а управляющим параметром – норма сбережения s. Согласно вышесказанному, выпуск на единицу труда имеет вид

$$y = Ak^{\alpha}, \qquad 0 < \alpha < 1, \tag{1}$$

причем

$$A = ak, \qquad a = \text{const}, \tag{2}$$

[1] Отметим, что самим Р. Солоу в одной из поздних работ была предложена иная модификация модели Солоу с эндогенным технологическим параметром. В данной модификации для технологического параметра записывалось отдельное динамическое уравнение, причем темп его роста зависел от капиталовооруженности [12].

[2] Одним из механизмов эндогенного роста могут стать инвестиции в инновационную деятельность, недостаточный уровень которых, по общему мнению, существенно тормозит процессы модернизации российской экономики на современном этапе [2].

следовательно,

$$y = ak^{1+\alpha}, \qquad 0 < \alpha < 1. \tag{3}$$

Уравнение динамики капиталовооруженности принимает вид

$$\dot{k} = sak^{1+\alpha} - (\lambda + \delta)k, \tag{4}$$

где λ – (постоянный) темп роста населения, δ – норма износа физического капитала. Точка над переменной здесь и далее означает производную по времени.

Несложно видеть, что модифицированная модель Солоу в форме (4) демонстрирует режим «взрывного», сингулярного роста, при котором фазовая переменная (k) обращается в бесконечность за *конечное* время. В следующем разделе будет выведена точная формула для момента наступления сингулярности.

3. Формула для момента наступления сингулярности

Выведем формулу для момента наступления сингулярности T в модифицированной модели Солоу, предполагая, что в начальный (нулевой) момент времени значение капиталовооруженности равно k_0. В динамическом уравнении (4) переменные разделяются:

$$dt = \frac{dk}{sak^{1+\alpha} - (\lambda + \delta)k}, \tag{5}$$

откуда

$$T = \int dt = \int_{k_0}^{\infty} \frac{dk}{k(sak^{\alpha} - (\lambda + \delta))}. \tag{6}$$

Интеграл в последнем выражении вычисляется подстановкой $k = \exp(z)$, что дает

$$T = \int_{\ln k_0}^{\infty} \frac{dz}{sa\exp(\alpha z) - (\lambda + \delta)}. \tag{7}$$

Последний интеграл является табличным [3]:

$$\int \frac{dx}{a+b\exp(mx)} = \frac{1}{am}\left[mx - \ln\left(a + b\exp(mx)\right)\right]. \tag{8}$$

Применяя к интегралу (7) формулу (8) и подставляя пределы интегрирования (что, в частности, требует раскрытия неопределенности на бесконечном пределе), окончательно находим:

$$T = -\frac{1}{\alpha(\lambda+\delta)}\ln\left(1 - \frac{\lambda+\delta}{sak_0^{\alpha}}\right). \tag{9}$$

Отметим, что знак минус в итоговой формуле (9) не должен вводить в заблуждение, поскольку логарифм в той же формуле берется от аргумента, меньшего единицы, и потому является отрицательным; таким образом, момент наступления сингулярности оказывается, как и следовало, положительным.

4. Модель совокупной оценки

Один из простейших способов, при помощи которого модифицированная модель Солоу (4) может быть «надстроена» до простой экономико-климатической модели (модели совокупной оценки), заключается в следующем. Предположив, что исходное уравнение (4) в некотором приближении описывают глобальную экономическую динамику, примем далее стандартное для моделей совокупной оценки допущение, согласно которому в условиях неблагоприятных изменений глобального климата номинальный выпуск в уравнении (4) должен быть заменен *эффективным выпуском*, скорректированным на функцию климатического ущерба (англ. climate damage function) $d(T)$, зависящую от глобальной средней температуры приземного воздуха T (далее по тексту – температура; отсчитывается от характерного доиндустриального значения). Для численных расчетов нами выбрана спецификация функции климатического ущерба $d(T)$, предложенная Нордхаузом [9]:

$$1 - d(T) = \frac{1}{1 + \beta T^2}, \tag{10}$$

где β =0,0028 (°C)$^{-2}$.

Динамика температуры рассчитывается в климатическом модуле модели, в качестве которого можно выбрать систему двух уравнений для атмосферного содержания углекислого газа C и температуры T, применявшуюся для построения иной теоретической модели совокупной оценки в работе [8] (см. ниже уравнения (13)-(14)). При этом делается предположение о том, что выбросы углекислого газа в атмосферу, входящие в уравнение (13), пропорциональны выпуску мировой экономики, причем коэффициент пропорциональности имеет смысл карбоноемкости мировой экономики. Следуя работе [8], сделаем (оптимистичное) предположение о том, что карбоноемкость экзогенно снижается со временем экспоненциальным образом (медленно затухающая экспонента). Однако, согласно сделанным выше допущениям, выбросы углекислого газа пропорциональны полному выпуску экономики, равному

$$Y = yL(t) = yL_0 \exp(\lambda t), \tag{11}$$

где y задан формулой (3), $L(t)$ – труд, а L_0 – его начальное значение. Ниже в уравнении (13) в методических целях делается упрощающее предположение о том, что затухающая экспонента в карбоноемкости в точности компенсируется растущей экспонентой в трудовых ресурсах (моделирующей рост населения), поэтому в данном частном случае итоговая динамическая система (12)-(14) остается автономной.

В итоге, полная модель совокупной оценки представляет собой систему трех динамических уравнений:

$$\dot{k} = \frac{sak^{1+\alpha}}{1+\beta T^2} - (\lambda+\delta)k\,, \tag{12}$$

$$\dot{C} = \eta a L_0 k^{1+\alpha} - \frac{1}{\tau_C}\left(C - C_{\mathrm{PI}}\right), \tag{13}$$

$$\dot{T} = \frac{1}{\tau_T}\left(\frac{\Delta T^*}{\ln 2}\ln\frac{C}{C_{\mathrm{PI}}} - T\right). \tag{14}$$

В уравнении (13) η – значение карбоноемкости в начальный момент времени, τ_C – характерное время жизни углекислого газа в атмосфере, C_{PI} – доиндустриальное значение атмосферного содержания углекислого газа. В уравнении (14) τ_T – характерное время релаксации температуры, ΔT^* – чувствительность климатической системы к (гипотетическому) удвоению атмосферного содержания углекислого газа.

5. Стационарное решение модели совокупной оценки

Из явного вида динамической системы (12)-(14) несложно усмотреть, что она имеет нетривиальное стационарное решение (k_0, C_0, T_0). Чтобы найти его, необходимо приравнять нулю правые части уравнений (12)-(14). Из уравнения (12) немедленно находим

$$k_0 = \left(\frac{\lambda+\delta}{sa}\left(1+\beta T_0^2\right)\right)^{\frac{1}{\alpha}}, \tag{15}$$

в то время как стационарный вариант уравнения (14) дает

$$\frac{C_0}{C_{\mathrm{PI}}} = \exp\left(\ln 2\frac{T_0}{\Delta T^*}\right). \tag{16}$$

Подставляя найденные соотношения (15)-(16) в уравнение (13), окончательно приходим к замкнутому нелинейному уравнению для T_0

$$\frac{\eta a \tau_C L_0}{C_{\mathrm{PI}}}\left(\frac{\lambda+\delta}{sa}\left(1+\beta T_0^2\right)\right)^{\frac{\alpha+1}{\alpha}} = \exp\left(\ln 2\frac{T_0}{\Delta T^*}\right) - 1\,, \tag{17}$$

из вида левой и правой частей которого несложно усмотреть, что оно имеет нетривиальное решение. Последнее, однако, может быть найдено лишь численно. Найдя T_0 путем численного решения уравнения (17) при заданных значениях параметров модели, определим затем из соотношений (15)-(16) и стационарные значения двух других фазовых переменных исследуемой динамической системы.

6. Анализ устойчивости стационарного решения

Наличие у модели совокупной оценки, заданной динамической системой (12)-(14), стационарного решения, вообще говоря, еще не означает, что некоторое решение, отвечающее начальным условиям, отличным от найденной стационарной точки, будет с ростом времени стремиться к стационарному решению. Чтобы проанализировать данный вопрос, исследуем устойчивость стационарной точки по Ляпунову [6].

Для этого линеаризуем динамическую систему (12)-(14) в окрестности стационарной точки. Если обозначить вектор возмущений фазовых переменных как $\delta\mathbf{x}$,

$$\delta\mathbf{x} = \begin{pmatrix} \delta k \\ \delta C \\ \delta T \end{pmatrix}, \tag{18}$$

то линеаризованная система примет вид

$$\delta\dot{\mathbf{x}} = \mathbf{A}\delta\mathbf{x}, \tag{19}$$

где матрица $\mathbf{A}$ имеет структуру

$$\mathbf{A} = \begin{pmatrix} a_{11}, & 0, & a_{13} \\ a_{21}, & a_{22}, & 0 \\ 0, & a_{32}, & a_{33} \end{pmatrix}, \tag{20}$$

а ее ненулевые элементы равны

$$a_{11} = \frac{(1+\alpha)sak_0^{\alpha}}{1+\beta T_0^2} - (\lambda+\delta) = \alpha(\lambda+\delta) > 0\,, \tag{21}$$

$$a_{13} = -sak_0^{\alpha}\frac{2\beta T_0}{\left(1+\beta T_0^2\right)^2} = -(\lambda+\delta)k_0\frac{2\beta T_0}{1+\beta T_0^2} < 0\,, \tag{22}$$

$$a_{21} = (1+\alpha)\eta a L_0 k_0^{\alpha} = (1+\alpha)(\lambda+\delta)\frac{\eta}{s}L_0\left(1+\beta T_0^2\right) > 0\,, \tag{23}$$

$$a_{22} = -\frac{1}{\tau_C} < 0\,, \tag{24}$$

$$a_{32} = \frac{1}{\tau_T}\frac{\Delta T^*}{\ln 2}\frac{1}{C_0} = \frac{\Delta T^*}{C_{\mathrm{PI}}\tau_T \ln 2}\exp\left(-\ln 2\frac{T_0}{\Delta T^*}\right) > 0\,, \tag{25}$$

$$a_{33} = -\frac{1}{\tau_T} < 0\,. \tag{26}$$

Отметим, что при преобразованиях в соотношениях (21)-(23) использовалась формула (15), а в соотношении (25) – формула (16).

Для анализа линейной устойчивости необходимо исследовать знаки вещественных частей собственных значений матрицы $\mathbf{A}$ (20). Чтобы найти собственные числа, необходимо решить характеристическое уравнение

$$\det(\mathbf{A} - \lambda\mathbf{I}) = 0\,, \tag{27}$$

где $\mathbf{I}$ – единичная матрица. Несложно видеть, что для матрицы со структурой (20) характеристическое уравнение принимает вид

$$\det(\mathbf{A} - \lambda\mathbf{I}) = (a_{11}-\lambda)(a_{22}-\lambda)(a_{33}-\lambda) + a_{13}a_{21}a_{32} = 0\,. \tag{28}$$

Если бы второе слагаемое ($a_{13}a_{21}a_{32}$) в уравнении (28) отсутствовало, то собственные значения были бы в точности равны диагональным элементам матрицы $\mathbf{A}$: a_{11}, a_{22} и a_{33}. При этом, поскольку, согласно соотношению (21), $a_{11} > 0$, стационарная точка была бы неустойчивой. Наличие второго слагаемого ($a_{13}a_{21}a_{32}$) в уравнении (28), с учетом того что знак данного слагаемого, согласно соотношениям (22)-(23) и (25), является отрицательным, делает вопрос о знаках вещественных частей собственных значений нетривиальным и требующим численного исследования.

Соответствующие численные расчеты были выполнены авторами для реалистичных значений параметров модели. Расчеты выявили наличие положительного корня у характеристического уравнения (28), что свидетельствует о неустойчивости стационарного решения исследуемой динамической системы.

Кроме того, авторами была выполнена серия численных экспериментов, в которых, после спецификации реалистичных значений параметров модели и соответствующих начальных условий, система (12)-(14) интегрировалась численно методом Рунге–Кутты при помощи специализированного пакета программ Vensim ® DSS. Во всех экспериментах динамическая система (12)-(14) демонстрировала «взрывной», сингулярный рост, подобно исходной модификации модели Солоу (разделы 2-3), а сходимости к стационарному решению не наблюдалось. Следует также отметить, что включение в модель климатического модуля (уравнения (13)-(14)) лишь незначительно задерживало момент наступления сингулярности, когда капиталовооруженность обращается в бесконечность, по сравнению с рассчитанным по формуле (9).

Сходные результаты были недавно получены авторами и для другой модели совокупной оценки, в которой климатический модуль имел тот же вид, что и в настоящей работе, а экономический модуль базировался на *AK*-модели с эндогенным технологическим параметром, демонстрирующей режим «взрывного» роста, подобно модифицированной модели Солоу [4]. Численные эксперименты показали, что и в подобной модели совокупной оценки режим «взрывного» роста сохраняется, несмотря на наличие отрицательной обратной связи от климатического модуля.[3]

[3] Результаты данного исследования изложены в работе: Ковалевский Д.В., Ковалевская Л.Д. Сингулярный рост в экономико-климатической модели с эндогенным технологическим параметром // Вестник СПбГЭУ *(представлено к публикации)*.

7. Заключение

В данной работе была выполнена «надстройка» модифицированной модели Солоу, демонстрирующей «взрывной», сингулярный рост, до экономико-климатической модели совокупной оценки. При этом теоретический анализ устойчивости стационарного решения и численные эксперименты показали, что полученная модель совокупной оценки по-прежнему демонстрирует «взрывной» рост, несмотря на наличие фундаментальной отрицательной обратной связи от климатической системы, в иных моделях вполне способной обеспечить «пределы роста». Сходные результаты, недавно полученные авторами при исследовании другой модели совокупной оценки (см. обсуждение в конце раздела 6), позволяют предполагать, что полученный в двух частных случаях результат может оказаться универсальным для данного класса экономико-климатических моделей.

Один из авторов (Д.В. Ковалевский) признателен Российскому фонду фундаментальных исследований за финансовую поддержку (проект № 12-06-00381-а «Оптимизационный и системно-динамический подходы в моделях экономики изменений климата»).

Литература

1. Барро Р.Дж., Сала-и-Мартин Х. Экономический рост; пер. с англ. М.: БИНОМ, Лаборатория знаний, 2010. 824 с.

2. Батрутдинов А.С., Бузырев В.В., Федосеев И.В. Инвестиционно-активная модель развития инновационной деятельности в России // Известия Иркутской государственной экономической академии. 2008. № 2. С. 9-13.

3. Градштейн И.С., Рыжик И.М. Таблицы интегралов, сумм, рядов и произведений. Изд. 4-е. М.: Гос. изд-во физ.-мат. лит., 1963.1100 с.

4. Ковалевский Д.В. *AK*-модель экономического роста с эндогенным технологическим параметром // Научно-технические ведомости СПбГПУ. Серия: Экономические науки. 2012. №5(156). С. 25-27.

5. Костяев А.И. Территориальное разделение труда в аграрной сфере: теоретический базис и российская практика // АПК: Экономика, управление. 2011. № 12. С. 14-20.

6. Малкин И.Г. Теория устойчивости движения. Изд. 2-е. М.: Едиториал УРСС, 2004. 432 с.

7. Медоуз Д., Рандерс Й, Медоуз Ден. Пределы роста. 30 лет спустя; пер. с англ. М.: ИКЦ «Академкнига», 2008. 342 с.

8. Kellie-Smith O., Cox P.M. Emergent dynamics of the climate-economy system in the Anthropocene // Philosophical Transactions of the Royal Society A. 2011. Vol. 369. P. 868-886.

9. Nordhaus W.D. A Question of Balance. New Haven & London: Yale University Press, 2008. 248 p.

10. Nordhaus W.D. Economic aspects of global warming in a post-Copenhagen environment // Proceedings of the National Academy of Sciences of the United States of America. 2010. Vol. 107, No. 26. P. 11721-11726.

11. Romer D. Advanced Macroeconomics. 4th edition. NY: Mc Graw Hill Irwin, 2012. 738 p.

12. Solow R.M. Neoclassical growth theory // In: J.B. Taylor, M. Woodford (Eds.). Handbook on Macroeconomics. Vol. 1, Part A. Amsterdam: Elsevier, 1999. P. 637-667.

References

1. Barro R.Dzh., Sala-i-Martin H. Jekonomicheskij rost; per. s angl. M.: BINOM, Laboratorija znanij, 2010. 824 s.

2. Batrutdinov A.S., Buzyrev V.V., Fedoseev I.V. Investicionno-aktivnaja model' razvitija innovacionnoj dejatel'nosti v Rossii // Izvestija Irkutskoj gosudarstvennoj jekonomicheskoj akademii. 2008. № 2. C. 9-13.

3. Gradshtejn I.S., Ryzhik I.M. Tablicy integralov, summ, rjadov i proizvedenij. Izd. 4-e. M.: Gos. izd-vo fiz.-mat. lit., 1963.1100 s.

4. Kovalevskij D.V. AK-model' jekonomicheskogo rosta s jendogennym tehnologicheskim parametrom // Nauchno-tehnicheskie vedomosti SPbGPU. Serija: Jekonomicheskie nauki. 2012. №5(156). S. 25-27.

5. Kostjaev A.I. Territorial'noe razdelenie truda v agrarnoj sfere: teoreticheskij bazis i rossijskaja praktika // APK: Jekonomika, upravlenie. 2011. № 12. S. 14-20.

6. Malkin I.G. Teorija ustojchivosti dvizhenija. Izd. 2-e. M.: Editorial URSS, 2004. 432 s.

7. Medouz D., Randers J, Medouz Den. Predely rosta. 30 let spustja; per. s angl. M.: IKC «Akademkniga», 2008. 342 s.

8. Kellie-Smith O., Cox P.M. Emergent dynamics of the climate-economy system in the Anthropocene // Philosophical Transactions of the Royal Society A. 2011. Vol. 369. P. 868-886.

9. Nordhaus W.D. A Question of Balance. New Haven & London: Yale University Press, 2008. 248 p.

10. Nordhaus W.D. Economic aspects of global warming in a post-Copenhagen environment // Proceedings of the National Academy of Sciences of the United States of America. 2010. Vol. 107, No. 26. P. 11721-11726.

11. Romer D. Advanced Macroeconomics. 4th edition. NY: Mc Graw Hill Irwin, 2012. 738 p.

12. Solow R.M. Neoclassical growth theory // In: J.B. Taylor, M. Woodford (Eds.). Handbook on Macroeconomics. Vol. 1, Part A. Amsterdam: Elsevier, 1999. P. 637-667.