УДК 517.929.7

ИССЛЕДОВАНИЕ РАЗРЕШИМОСТИ ВТОРОЙ КРАЕВОЙ ЗАДАЧИ ДЛЯ УРАВНЕНИЯ В ЧАСТНЫХ ПРОИЗВОДНЫХ С ИНВОЛЮТИВНЫМ ОТКЛОНЕНИЕМ В МЛАДШИХ ЧЛЕНАХ

Бжеумихова Оксана Игоревна
Кабардино-Балкарский государственный университет им. Х.М. Бербекова, Нальчик, Россия

В работе исследован вопрос разрешимости второй краевой задачи для модельного уравнения в частных производных с инволютивным отклонением в младших членах. Исследование проведено на основе метода разделения переменных

Ключевые слова: КРАЕВАЯ ЗАДАЧА, ДИФФЕРЕНЦИАЛЬНОЕ УРАВНЕНИЕ В ЧАСТНЫХ ПРОИЗВОДНЫХ, ОТКЛОНЯЮЩИЙСЯ АРГУМЕНТ, ЗАДАЧА ШТУРМА-ЛИУВИЛЛЯ

UDC 517.929.7

THE INVESTIGATION SOLVABILITY OF THE SECOND BOUNDARY VALUE PROBLEM FOR PARTIAL DIFFERENTIAL EQUATION WITH INVOLUTORY DEVIATIONS IN THE LOWEST TERMS

Bzheumikhova Oksana Igorevna
Kabardino-Balkarian State University named after H.M. Berbekova, Nalchik, Russia

In this article we consider the problem of solvability oa second boundary value problem for the model equation in partial derivatives with involutive deviation in the lowest terms. The investigation is based on a variable separation method

Keywords: BOUNDARY VALUE PROBLEM, PARTIAL DIFFERENTIAL EQUATION, DEVIATIONS ARGUMENT, STURM-LIOUVILLE PROBLEM

Введение

Многие математические модели, применяемые при исследовании процессов, в таких важных областях как математическая биоэкология, механика, автоматизированные системы управления, теория климатических моделей, иммунология и т. д. базируются на дифференциальных уравнениях с отклоняющимся аргументом (например, [1-6]). Широкие возможности применения уравнений с отклоняющимся аргументом в качестве математических моделей способствуют росту интереса к исследованию новых задач для уравнений с частными производными [7-10], которые по сравнению с обыкновенными дифференциальными уравнениями описывают процессы еще в большей степени приближенные к процессам, протекающим на практике [11, 12].

В настоящей работе, методом разделения переменных, установлена разрешимость классической краевой задачи для уравнения в частных производных с инволютивным отклонением аргумента в прямоугольной области.

1. Постановка задачи

Пусть $\Omega = \{(x,t): -x_0 < x < x_0, 0 < t < t_0\}$ – односвязная область евклидовой плоскости R^2 точек (x,t).

В области Ω рассмотрим уравнение

$$Lu \equiv u_{xx}(x,t) + k(t)u_{tt}(x,t) + u(-x,t) = 0, \tag{1}$$

где $k(t)$ - достаточно гладкая, причем $k(t) \neq 0$.

Для уравнения (1) исследована следующая

Задача 1. Найти регулярное в области Ω решение $u(x,t)$ уравнения (1) из класса $C^1(\overline{\Omega}) \cap C^{4,2}_{x,t}$, удовлетворяющее условиям

$$\begin{gathered} u_x(-x_0,t) = \varphi_1(t), \ \ u_x(x_0,t) = \varphi_2(t), \\ u_t(x,0) = \varphi_3(x), \ \ u_t(x,t_0) = \varphi_4(x), \end{gathered} \tag{2}$$

где $\varphi_i \ \left(i = \overline{1,4}\right)$ – заданные, достаточно гладкие функций.

2. Доказательство существования и единственности задачи

Для задачи 1 справедлива следующая

Теорема 1. Пусть

1) $\varphi_1(t), \varphi_2(t) \in C^3[0,t_0]$, $\varphi_3(x), \varphi_4(x) \in C^3\{[-x_0,0) \cup (0,x_0]\}$, где $x_0 \in \left(0, \dfrac{\pi}{\sqrt{2}}\right)$,

$t_0(0,\pi)$, $k(t) \in C^1[0,t_0]$;

2) $\int\limits_0^{x_0} \varphi_3(x)\,dx = 0$, $\int\limits_0^{x_0} \varphi_4(x)\,dx = 0$,

тогда задача (1), (2) разрешима в требуемом классе функций.

Действительно, разобьем задачу (1), (2) в области Ω на две вспомогательные:

$$Lu_1 \equiv 0, \tag{3}$$

$$u_{1x}(-x_0,t)=0,\ u_{1x}(x_0,t)=0, \tag{4}$$

$$u_{1t}(x,0)=\varphi_3(x),\ u_{1t}(x,t_0)=\varphi_4(x), \tag{5}$$

$$Lu_2 \equiv 0, \tag{6}$$

$$u_{2t}(x,0)=0,\ u_{2t}(x,t_0)=0, \tag{7}$$

$$u_{2x}(-x_0,t)=\varphi_1(t),\ u_{2x}(x_0,t)=\varphi_2(t), \tag{8}$$

где $u=u_1+u_2$.

Решение уравнения (3) удовлетворяющее однородным граничным условиям (4) будем искать в виде [13]:

$$u_1 = X_1(x)\cdot T_1(t). \tag{9}$$

Подставляя (9) в (3) и опуская нижние индексы, получим

$$\frac{X''(x)+X(-x)}{X(x)}=-\frac{T''(t)}{T(t)}=-\lambda,$$

где $\lambda = const$.

Отсюда, с учетом (4) будем иметь

$$X''(x)+X(-x)+\lambda X(x)=0, \tag{10}$$

$$X(-x_0)=X(x_0)=0, \tag{11}$$

$$k(t)T''(t)-\lambda T(t)=0. \tag{12}$$

Исследуем задачу о собственных значениях (10), (11).

Дважды дифференцируя (10), приходим к соотношению:

$$X^{IV}(x)+X''(-x)+\lambda X''(x)=0. \tag{13}$$

С другой стороны из (10) имеем:

$$\begin{aligned} X''(-x)&=-X(x)-\lambda X(-x),\\ X(-x)&=-X''(x)-\lambda X(x). \end{aligned} \tag{14}$$

На основании (13) и принимая во внимание (14), получим

$$X^{IV}(x) + 2\lambda X''(x) + \left(\lambda^2 - 1\right) X(x) = 0 . \qquad (15)$$

Характеристическое уравнение соответствующее (15), будет иметь вид:

$$r^4 + 2\lambda r^2 + \lambda^2 - 1 = 0 .$$

Разрешая биквадратное уравнение, находим:

$$r_1 = \sqrt{1-\lambda}\,,\ r_2 = -\sqrt{1-\lambda}\,,$$

$$r_3 = \sqrt{-1-\lambda}\,,\ r_4 = -\sqrt{-1-\lambda}\,.$$

Таким образом, общее решение уравнения (15) может быть записано в виде:

$$X(x) = C_1 e^{\sqrt{1-\lambda}x} + C_2 e^{-\sqrt{1-\lambda}x} + C_3 e^{\sqrt{-1-\lambda}x} + C_4 e^{-\sqrt{-1-\lambda}x} . \qquad (16)$$

Следуя [14, 15], получим из (16) представления решения (10) для различных λ.

Случай 1: $\lambda < -1$. В этом случае общее решение (10) имеет вид:

$$X(x) = C_1 \operatorname{sh}\left(x\sqrt{1-\lambda}\right) + C_3 \operatorname{ch}\left(x\sqrt{-1-\lambda}\right).$$

Используя условия (11), получим

$$\begin{cases} \sqrt{1-\lambda} C_1 \operatorname{ch}\left(x_0\sqrt{1-\lambda}\right) - \sqrt{-1-\lambda} C_3 \operatorname{sh}\left(x_0\sqrt{-1-\lambda}\right) = 0, \\ \sqrt{1-\lambda} C_1 \operatorname{ch}\left(x_0\sqrt{1-\lambda}\right) + \sqrt{-1-\lambda} C_3 \operatorname{sh}\left(x_0\sqrt{-1-\lambda}\right) = 0. \end{cases}$$

Определитель этой системы

$$\Delta = 2\sqrt{\lambda^2 - 1} \operatorname{ch}\left(x_0\sqrt{1-\lambda}\right) \operatorname{sh}\left(x_0\sqrt{-1-\lambda}\right) = 0$$

только при $\lambda = \pm 1$, что противоречит рассматриваемому случаю $\lambda < -1$.

Следовательно, $C_1 = C_3 = 0$. Откуда заключаем, что $X(x) \equiv 0$.

Случай 2: $\lambda = -1$. При таком значении λ решение (10) имеет вид:

$$X(x) = C_1 \operatorname{sh}\left(\sqrt{2}x\right) + C_3 .$$

Удовлетворяя (11), имеем

$$\begin{cases} \sqrt{2} C_1 \operatorname{ch}\left(\sqrt{2}x_0\right) = 0, \\ \sqrt{2} C_1 \operatorname{ch}\left(\sqrt{2}x_0\right) = 0. \end{cases}$$

Откуда заключаем, что $C_1 = 0$ и $X(x) \equiv C_3$.

Этому собственному значению $\lambda = -1$ соответствует

$$u_1(x,t) = C_3 T(t), \tag{17}$$

где $T(t)$ - решение уравнения (12).

Требуя выполнения граничных условий (5) , получаем систему для определения постоянных входящих в (17):

$$\varphi_3(x) = u_{1t}(x,0) = C_3 T'(0),$$
$$\varphi_4(x) = u_{1t}(x,t_0) = C_3 T'(t_0).$$

Таким образом, решение задачи (3)-(5) при $\lambda = -1$ определяется соотношением (17).

Случай 3: Для $-1 < \lambda < 1$, удовлетворяя общее решение (10)

$$X(x) = C_1 \operatorname{sh}\left(x\sqrt{1-\lambda}\right) + C_3 \cos\left(x\sqrt{1+\lambda}\right)$$

условиям (11), находим

$$\begin{cases} \sqrt{1-\lambda}C_1 \operatorname{ch}\left(x_0\sqrt{1-\lambda}\right) + \sqrt{1+\lambda}C_3 \sin\left(x_0\sqrt{1+\lambda}\right) = 0, \\ \sqrt{1-\lambda}C_1 \operatorname{ch}\left(x_0\sqrt{1-\lambda}\right) - \sqrt{1+\lambda}C_3 \sin\left(x_0\sqrt{1+\lambda}\right) = 0. \end{cases}$$

Определитель системы

$$\Delta = -2\sqrt{1-\lambda^2} \operatorname{ch}\left(x_0\sqrt{1-\lambda}\right)\sin\left(x_0\sqrt{1+\lambda}\right)$$

обращается в нуль либо при $\lambda = \pm 1$, либо при $\lambda = \left(\dfrac{\pi n}{x_0}\right)^2 - 1$.

Следовательно, $C_1 = C_3 = 0$ и $X(x) \equiv 0$, т.к. $\lambda \notin (-1,1)$.

Случай 4: $\lambda = 1$. При указанном значении λ для всех $x_0 \in \left(0, \dfrac{\pi}{\sqrt{2}}\right)$ (10) принимает вид

$$X(x) = C_2 x + C_3 \cos\left(\sqrt{2}x\right). \tag{18}$$

Удовлетворяя (18) граничным условиям (11) получим

$$\begin{cases} C_2 + \sqrt{2}C_3 \sin\left(\sqrt{2}x_0\right) = 0, \\ C_2 - \sqrt{2}C_3 \sin\left(\sqrt{2}x_0\right) = 0. \end{cases}$$

В силу того, что

$$\Delta = -2\sqrt{2}x_0 \sin\left(\sqrt{2}x_0\right) \neq 0,$$

имеем $C_2 = C_3 = 0$ и $X(x) \equiv 0$.

Случай 5. При $\lambda > 1$ общее решение (10) принимает вид:

$$X(x) = C_2 \sin\left(x\sqrt{\lambda - 1}\right) + C_3 \cos\left(x\sqrt{\lambda + 1}\right).$$

Удовлетворяя полученное выражение для $X(x)$ граничным условиям (11), будем иметь:

$$\begin{cases} \sqrt{\lambda-1}C_2 \cos\left(x_0\sqrt{\lambda-1}\right) + \sqrt{\lambda+1}C_3 \sin\left(x_0\sqrt{\lambda+1}\right) = 0, \\ \sqrt{\lambda-1}C_2 \cos\left(x_0\sqrt{\lambda-1}\right) - \sqrt{\lambda+1}C_3 \sin\left(x_0\sqrt{\lambda+1}\right) = 0. \end{cases}$$

Равенство

$$\Delta = -2\sqrt{\lambda^2 - 1}\cos\left(x_0\sqrt{\lambda-1}\right)\sin\left(x_0\sqrt{\lambda+1}\right) = 0$$

справедливо при $\lambda_{1n} = \left(\dfrac{\pi + 2\pi n}{2x_0}\right)^2 + 1$, либо при $\lambda_{2n} = \left(\dfrac{\pi n}{x_0}\right)^2 - 1$.

Таким образом, задача (10), (11) имеет собственные значения λ_{1n}, λ_{2n} и соответствующие им собственные функции $X_{1n}(x) = C_n \cos\left(\dfrac{\pi + 2\pi n}{2x_0}x\right)$, $X_{2n}(x) = C_n \sin\left(\dfrac{\pi n}{x_0}x\right)$, $(n \in N)$, где C_n – произвольные постоянные, нуждающиеся в определении.

Собственным значениям $\lambda_{1n} = \left(\dfrac{\pi + 2\pi n}{2x_0}\right)^2 - 1$ соответствуют решения уравнения (12) равные

$$T(t) = T_n(t).$$

Возвращаясь к решению задачи (3)-(5), видим, что функция

$$u_{11}(x,t) = \sum_{n=1}^{\infty} C_n T_n(t) \cos\left(\frac{\pi + 2\pi n}{2x_0}x\right), \tag{19}$$

является решением уравнения (3) при $\lambda_{1n} = \left(\frac{\pi + 2\pi n}{2x_0}\right)^2 - 1$.

Условия (5) позволяют определить значение постоянных входящих в (19).

С учетом условия 1) теоремы 1, функции $\varphi_3(x)$ и $\varphi_4(x)$, $-x_0 \le x \le x_0$ разлагаются в ряд Фурье, который содержит только косинусы, а именно:

$$\varphi_3(x) = \frac{\delta_0}{2} + \sum_{n=1}^{\infty} \delta_n \cos\left(\frac{\pi + 2\pi n}{2x_0} x\right),$$

$$\varphi_4(x) = \frac{\rho_0}{2} + \sum_{n=1}^{\infty} \rho_n \cos\left(\frac{\pi + 2\pi n}{2x_0} x\right),$$

где

$$\delta_0 = \frac{2}{x_0} \int_0^{x_0} \varphi_3(x) dx, \qquad \rho_0 = \frac{2}{x_0} \int_0^{x_0} \varphi_4(x) dx,$$

$$\delta_n = \frac{2}{x_0} \int_0^{x_0} \varphi_3(x) \cos\left(\frac{\pi + 2\pi n}{2x_0} x\right) dx,$$

$$\rho_n = \frac{2}{x_0} \int_0^{x_0} \varphi_4(x) \cos\left(\frac{\pi + 2\pi n}{2x_0} x\right) dx,$$

причем ряды $\sum_{n=1}^{\infty} |\delta_n|$ и $\sum_{n=1}^{\infty} |\delta_n|$ сходятся.

Учитывая граничные условия (5), получаем:

$$\begin{aligned} &\sum_{n=1}^{\infty} C_n T_n'(0) \cos\left(\frac{\pi + 2\pi n}{2x_0} x\right) = \frac{\delta_0}{2} + \sum_{n=1}^{\infty} \delta_n \cos\left(\frac{\pi + 2\pi n}{2x_0} x\right), \\ &\sum_{n=1}^{\infty} C_n T_n'(t) \cos\left(\frac{\pi + 2\pi n}{2x_0} x\right) = \frac{\rho_0}{2} + \sum_{n=1}^{\infty} \rho_n \cos\left(\frac{\pi + 2\pi n}{2x_0} x\right). \end{aligned} \tag{20}$$

Сопоставляя соответствующие коэффициенты в полученных соотношениях, а так же учитывая условие 2) теоремы 1 определяем постоянные входящие в (19). Следовательно, ряд (19) с коэффициентами определяемыми по формулам (20), удовлетворяет всем условиям задачи (3)-(5).

Переходя к рассмотрению случая собственных значений $\lambda_{2n} = \left(\frac{\pi n}{x_0}\right)^2 - 1$ будем иметь

$$u_{12}(x,t) = \sum_{n=1}^{\infty} C_n T_n(t) \sin\left(\frac{\pi n}{x_0} x\right). \tag{21}$$

Используя условия (5) позволяют определим значение постоянных входящих в (21).

С учетом условия 1) теоремы 1, функции $\varphi_3(x)$ и $\varphi_4(x)$, $-x_0 \le x \le x_0$ разлагаются в ряд Фурье, который содержит только синусы, а именно:

$$\varphi_3(x) = \sum_{n=1}^{\infty} \mu_n \sin\left(\frac{\pi n}{x_0} x\right),\ \varphi_4(x) = \sum_{n=1}^{\infty} \nu_n \sin\left(\frac{\pi n}{x_0} x\right),$$

где

$$\mu_n = \frac{2}{x_0} \int_0^{x_0} \varphi_3(x) \sin\left(\frac{\pi n}{x_0} x\right) dx,\ \nu_n = \frac{2}{x_0} \int_0^{x_0} \varphi_4(x) \sin\left(\frac{\pi n}{x_0} x\right) dx,$$

а ряды $\sum_{n=1}^{\infty} |\mu_n|$ и $\sum_{n=1}^{\infty} |\nu_n|$ сходятся.

Учитывая граничные условия (5), получаем:

$$\begin{gathered}\sum_{n=1}^{\infty} C_n T_n'(0) \sin\left(\frac{\pi n}{x_0} x\right) = \sum_{n=1}^{\infty} \mu_n \sin\left(\frac{\pi n}{x_0} x\right),\\ \sum_{n=1}^{\infty} C_n T_n'(t) \sin\left(\frac{\pi n}{x_0} x\right) = \sum_{n=1}^{\infty} \nu_n \sin\left(\frac{\pi n}{x_0} x\right).\end{gathered} \tag{22}$$

Сравнивая соответствующие коэффициенты в полученных соотношениях, а так же учитывая условие 2) теоремы 1 определяем постоянные входящие в (21). Представленные выше рассуждения остаются справедливыми и для случая задачи (6)-(8). Причем функция $u_2(x,t)$ аналогично функции $u_1(x,t)$ для различных собственных значении находится в виде сходящихся тригонометрических рядов. Таким образом, решение задачи 1 определяется из соотношения $u(x,t)=u_1(x,t)+u_2(x,t)$.

Заключение

На основе метода разделения переменных было доказано существование решения второй краевой задачи для модельного уравнения в частных производных с инволютивным отклонением в младших членах. Несмотря на то, что результаты работы носят теоретический характер, они могут иметь широкое применение, как и в дальнейших исследованиях уравнений с отклоняющимся аргументом, так и в прикладных задачах.

Список литературы

1. Wu J. Theory and Applications of Partial Functional Differential Equations, Springer-Verlag, New York, 1996.
2. Wu J. Traveling wave fronts of reaction-diffusion systems with delay/ J.Wu, X. Zou // J. Dynamics and Differential Equations, 2001. – Vol. 13, No. 3. – P. 651-687.
3. Huang J. Traveling wave fronts in diffusive and cooperative Lotka–Volterra system with delays / J. Huang, X. Zou // J. Math. Anal. Appl, 2002. – Vol. 271. – P. 455-466.
4. Faria T. Nonmonotone travelling waves in a single species reaction–diffusion equation with delay / T. Faria, S. Trofimchuk // J. Differential Equations, 2006. – Vol. 228. – P. 357-376.
5. Trofimchuk E. Slowly oscillating wave solutions of a single species reaction–diffusion equation with delay / E. Trofimchuk, V. Tkachenko, S. Trofimchuk // J. Differential Equations, 2008. – Vol. 245. – P. 2307-2332.
6. Meleshko S.V. On the complete group classification of the reaction–diffusion equation with a delay / S. V. Meleshko, S. Moyo // J. Math. Anal. Appl., 2008. – Vol. 338. – P. 448-466.
7. Hernandez E. A note on partial functional differential equations with state-dependent delay / E. Hernandez, A. Prokopczyk, L. Ladeira // Nonlinear Analysis, R.W.A., 2006. – No. 4. – P. 510-519.
8. Rezounenko A.V. Stability of positive solutions of local partial differential equations with a nonlinear integral delay term / A.V. Rezounenko // Electronic Journal of Qualitative Theory of Differential Equations. Proc. 8th Coll. QTDE, 2008. – No. 17. – P. 1-7.
9. Bzheumikhova O.I. Application of Fourier method to investigation of the Dirichlet problem for partial differential equations with deviating arguments / O.I. Bzheumikhova, V.N. Lesev // International Journal of Differential Equations and Applications, 2013. – Vol. 12, No. 2. – P. 103-120.

10. Лесев В.Н. Об однозначной разрешимости задачи Неймана для эллиптического уравнения с отклоняющимся аргументом / В.Н. Лесев, О.И. Бжеумихова // Экологический вестник научных центров ЧЭС, 2012. – №3. – С. 41-46.

11. Wang L. Global exponential robust stability of reaction–diffusion interval neural networks with time-varying delays / L. Wang, Y. Gao // Physics Letters A, 2006. – Vol. 350. – P. 342-348.

12. Lu J. G. Global exponential stability and periodicity of reaction–diffusion delayed recurrent neural networks with Dirichlet boundary conditions / J. G. Lu. // Chaos, Solitons and Fractals, 2008. – Vol. 35. – P. 116-125.

13. Тихонов А.Н., Самарский А.А. Уравнения математической физики. – М.: Изд-во Наука, 1977. – 735 с.

14. Лесев В.Н. Применение метода Фурье к исследованию задачи Дирихле для уравнения с отклоняющимся аргументом и оператором Лапласа в главной части / В.Н. Лесев, О.И. Бжеумихова // Научный журнал КубГАУ [Электронный ресурс]. – Краснодар: КубГАУ, 2012. – №07(81). – С. 1-10.

15. Бжеумихова О.И. Краевые задачи для модельных уравнений смешанного типа второго порядка с отклоняющимся аргументом / О.И. Бжеумихова, В.Н. Лесев // Обозрение прикладной и промышленной математики, 2011. – Т. 18, вып. 5. – С. 744-745.

References

1. Wu J. Theory and Applications of Partial Functional Differential Equations, Springer-Verlag, New York, 1996.

2. Wu J. Traveling wave fronts of reaction-diffusion systems with delay/ J.Wu, X. Zou // J. Dynamics and Differential Equations, 2001. – Vol. 13, No. 3. – P. 651-687.

3. Huang J. Traveling wave fronts in diffusive and cooperative Lotka–Volterra system with delays / J. Huang, X. Zou // J. Math. Anal. Appl, 2002. – Vol. 271. – P. 455-466.

4. Faria T. Nonmonotone travelling waves in a single species reaction–diffusion equation with delay / T. Faria, S. Trofimchuk // J. Differential Equations, 2006. – Vol. 228. – P. 357-376.

5. Trofimchuk E. Slowly oscillating wave solutions of a single species reaction–diffusion equation with delay / E. Trofimchuk, V. Tkachenko, S. Trofimchuk // J. Differential Equations, 2008. – Vol. 245. – P. 2307-2332.

6. Meleshko S.V. On the complete group classification of the reaction–diffusion equation with a delay / S. V. Meleshko, S. Moyo // J. Math. Anal. Appl., 2008. – Vol. 338. – P. 448-466.

7. Hernandez E. A note on partial functional differential equations with state-dependent delay / E. Hernandez, A. Prokopczyk, L. Ladeira // Nonlinear Analysis, R.W.A., 2006. – No. 4. – P. 510-519.

8. Rezounenko A.V. Stability of positive solutions of local partial differential equations with a nonlinear integral delay term / A.V. Rezounenko // Electronic Journal of Qualitative Theory of Differential Equations. Proc. 8th Coll. QTDE, 2008. – No. 17. – P. 1-7.

9. Bzheumikhova O.I. Application of Fourier method to investigation of the Dirichlet problem for partial differential equations with deviating arguments / O.I. Bzheumikhova, V.N. Lesev // International Journal of Differential Equations and Applications, 2013. – Vol. 12, No. 2. – P. 103-120.

10. Lesev V.N. Ob odnoznachnoj razreshimosti zadachi Nejmana dlja jellipticheskogo uravnenija s otklonjajushhimsja argumentom / V.N. Lesev, O.I. Bzheumihova // Jekologicheskij vestnik nauchnyh centrov ChJeS, 2012. – №3. – S. 41-46.

11. Wang L. Global exponential robust stability of reaction–diffusion interval neural networks with time-varying delays / L. Wang, Y. Gao // Physics Letters A, 2006. – Vol. 350. – P. 342-348.

12. Lu J. G. Global exponential stability and periodicity of reaction–diffusion delayed recurrent neural networks with Dirichlet boundary conditions / J. G. Lu. // Chaos, Solitons and Fractals, 2008. – Vol. 35. – P. 116-125.

13. Tihonov A.N., Samarskij A.A. Uravnenija matematicheskoj fiziki. – M.: Izd-vo Nauka, 1977. – 735 s.

14. Lesev V.N. Primenenie metoda Fur'e k issledovaniju zadachi Dirihle dlja uravnenija s otklonjajushhimsja argumentom i operatorom Laplasa v glavnoj chasti / V.N. Lesev, O.I. Bzheumihova // Nauchnyj zhurnal KubGAU [Jelektronnyj resurs]. – Krasnodar: KubGAU, 2012. – №07(81). – S. 1-10.

15. Bzheumihova O.I. Kraevye zadachi dlja model'nyh uravnenij smeshannogo tipa vtorogo porjadka s otklonjajushhimsja argumentom / O.I. Bzheumihova, V.N. Lesev // Obozrenie prikladnoj i promyshlennoj matematiki, 2011. – T. 18, vyp. 5. – S. 744-745.