УДК 303.732.4+514.84

ГРАВИТАЦИОННЫЕ ВОЛНЫ И КОЭФФИЦИЕНТ ЭМЕРДЖЕНТНОСТИ КЛАССИЧЕСКИХ И КВАНТОВЫХ СИСТЕМ

Трунев Александр Петрович
к.ф.-м.н., Ph.D.
A&E Trounev IT Consulting, Торонто, Канада

Луценко Евгений Вениаминович
д.э.н., к.т.н., профессор
Кубанский государственный аграрный университет, Россия, 350044, Краснодар, Калинина, 13,
prof.lutsenko@gmail.com

Установлено, что статистики Ферми-Дирака, Бозе-Эйнштейна и Максвелла-Больцмана можно описать единым уравнением, которое следует из уравнения Эйнштейна для систем, обладающих центральной симметрией. Построен коэффициент эмерджентности классических и квантовых систем, представляемых как лучи гравитационных волн, взаимодействующих с гравитационным полем Вселенной

Ключевые слова: ГРАВИТАЦИОННЫЕ ВОЛНЫ, КВАНТОВАЯ ТЕОРИЯ, КВАНТОВАЯ СТАТИСТИКА, СТАТИСТИКА ФЕРМИ-ДИРАКА, СТАТИСТИКА БОЗЕ-ЭЙНШТЕЙНА, СТАТИСТИКА МАКСВЕЛЛА-БОЛЬЦМАНА, СИСТЕМНАЯ ТЕОРИЯ ИНФОРМАЦИИ, ТЕОРИЯ СТРУН, ТЕОРИЯ ГРАВИТАЦИИ ЭЙНШТЕЙНА, ТЕМНАЯ МАТЕРИЯ, ТЕМНАЯ ЭНЕРГИЯ, ЭМЕРДЖЕНТНОСТЬ

UDC 303.732.4+514.84

GRAVITATIONAL WAVES AND EMERGENCE PARAMETER OF CLASSICAL AND QUANTUM SYSTEMS

Alexander Trunev
Ph.D.
A&E Trounev IT Consulting, Toronto, Canada

Lutsenko Evgeny Veniaminovich
Dr.Sci.Econ., Cand.Tech.Sci., professor
Kuban State Agrarian University, Krasnodar, Russia

It was established that the Fermi-Dirac statistics, Bose-Einstein and Maxwell-Boltzmann distribution can be described by a single equation, which follows from Einstein's equations for systems with central symmetry. Emergence parameter of classical and quantum systems composed by the rays of gravitational waves interacting with gravitational field of the universe has been computed

Keywords: BLACK ENERGY, BLACK MATTER, COMPLEX SYSTEM, EMERGENCE, GENERAL RELATIVITY, GRAVITATIONAL WAVES, INFORMATION THEORY, QUANTUM STATISTICS, FERMI-DIRAC STATISTICS, BOSE-EINSTEIN STATISTICS, MAXWELL-BOLTZMANN STATISTICS, QUANTUM THEORY, STRING-THEORY

Введение

Общая теория относительности Эйнштейна [1] и квантовая механика Шредингера [2] являются основой современной физической теории. В последнее время возникла проблема интерпретации барионной материи, содержание которой во Вселенной составляет не более 5% [3-4]. Необходимо указать механизм возникновения барионной материи из темной материи или энергии, а также объяснить, почему в лабораториях наблюдаются только частицы, находящиеся в связи с барионной материей, но нет никаких следов темной энергии или темной материи.

Этот вопрос, на наш взгляд, напрямую связан с гравитационными волнами, которые недавно были обнаружены путем анализа поляризации фонового микроволнового излучения [5]. В этой связи приведем фрагмент из письма Шредингера к Эйнштейну: «…я уже давно думаю, что следует отождествлять Ψ-волны с волнами нарушения гравитационного потенциала - конечно, не с теми, которые ты исследовал впервые, но с теми, которые обладают действительной массой, т.е. не исчезающим T_{ik}. Это значит, я думаю, что нужно в абстрактной общей теории относительности, содержащей T_{ik} еще как «asylum ignorantial» (по твоему собственному выражению), ввести материю не в качестве массивных точек или чего-нибудь подобного, а как квантованные гравитационные волны» [2].

Для описания материи в рамках общей теории относительности Эйнштейн и Инфельд сформулировали программу [6]: «Все попытки представить материю тензором энергии-импульса неудовлетворительны, и мы хотим освободить нашу теорию от специального выбора такого тензора. Поэтому мы будем иметь дело здесь только с гравитационными уравнениями в пустом пространстве, а материя будет представлена сингулярностями гравитационного поля».

Реализация этой программы в физике имела далеко идущие последствия. В результате сформировалась научная парадигма, берущая свое начало из трудов Пифагора, в которой реальность заменяется численной симуляцией, полученной на квантовом компьютере Вселенной [7-13]. Действительно, хорошо известно, что информация является основой развития систем [14-17]. Однако описание физических систем на основе универсальной модели – теории всего, все еще является нерешенной проблемой.

Мы предполагаем, что теория относительности Эйнштейна [1] может служить базовой универсальной моделью, в которой Вселенная представляется как совокупность гравитационных волн разного масштаба [18-20]. В таком случае квантовые и классические системы представляются как лучи гравитационных волн, а метрика является основной мерой взаимодействия систем с внешним гравитационным полем.

Предложенный подход к решению проблемы происхождения квантовой механики [2] из общей теории относительности Эйнштейна [1] может явиться основой для построения ряда моделей, объясняющих не только связь волновой функции с гравитационными волнами, в полном соответствии с гипотезой Шредингера [2], но и квантовой статистики. В настоящей работе построен коэффициент эмерджентности классических и квантовых динамических систем, по аналогии с коэффициент эмерджентности классических и квантовых статистических систем [21-22].

Основные уравнения модели

Уравнения гравитационного поля Эйнштейна имеют вид /6/:

$$R_{\mu\nu} - \frac{1}{2} g_{\mu\nu} R = g_{\mu\nu} \Lambda + \frac{8\pi G}{c^4} T_{\mu\nu} \tag{1}$$

$R_{\mu\nu}, g_{\mu\nu}, T_{\mu\nu}$ - тензор Риччи, метрический тензор и тензор энергии-импульса; Λ, G, c - космологическая постоянная Эйнштейна, гравитационная постоянная и скорость света соответственно.

В общем случае имеют место соотношения

$$\begin{gathered} R_{ik} = R^{j}_{ijk}, \quad R = g^{ik} R_{ik}, \\ R^{\alpha}_{\beta\gamma\delta} = \frac{\partial \Gamma^{\alpha}_{\beta\delta}}{\partial x^{\gamma}} - \frac{\partial \Gamma^{\alpha}_{\beta\gamma}}{\partial x^{\delta}} + \Gamma^{\mu}_{\beta\delta}\Gamma^{\alpha}_{\mu\gamma} - \Gamma^{\mu}_{\beta\gamma}\Gamma^{\alpha}_{\mu\delta}, \\ \Gamma^{i}_{jk} = \frac{1}{2} g^{is}\left(\frac{\partial g_{sj}}{\partial x^{k}} + \frac{\partial g_{sk}}{\partial x^{j}} - \frac{\partial g_{jk}}{\partial x^{s}} \right) \end{gathered} \tag{2}$$

$R^{\alpha}_{\beta\gamma\delta}$ - тензор Римана, Γ^{i}_{kl} – символы Кристоффеля второго рода.

Чтобы сохранить основную идею определения метрики в теории гравитации Эйнштейна, мы предположим, что уравнение Эйнштейна (1) распадается на два независимых уравнения [18-20]:

$$R_{\mu\nu} - \frac{1}{2} g_{\mu\nu} R = k g_{\mu\nu}$$
$$\frac{8\pi G}{c^4} T_{\mu\nu} = g_{\mu\nu}(k - \Lambda) \tag{3}$$

Здесь k – некоторая функция, зависящая от размерности пространства. Отметим, что первым уравнением определяется метрика пространства-времени, а вторым уравнением задается распределение материи, которое соответствует этой метрике. Эта гипотеза соответствует идее о происхождении материи из гравитационного поля [6], но без специального предположения о наличии сингулярности метрики.

В работах [18-20] представленная модель квантовой гравитации в многомерных пространствах размерностью D с метрикой

$$ds^2 = \psi(t,r)dt^2 - p(\psi)dr^2 - d\phi_1^{\ 2} - \sin^2\phi_1 d\phi_2^{\ 2} - \sin^2\phi_1 \sin^2\phi_2 d\phi_3^{\ 2} - \\ \ldots - \sin^2\phi_1 \sin^2\phi_2 \ldots \sin^2\phi_{N-1} d\phi_N^{\ 2} \tag{4}$$

Здесь $\phi_1, \phi_2, ..., \phi_N$ - углы на единичной сфере, погруженной в $D-1$ мерное пространство. Метрика (4) описывает многие важные случаи симметрии, используемые в физике элементарных частиц и в теории супергравитации. Такой подход позволяет охватить все многообразие материи, которую производит фабрика природы, путем выбора уравнения состояния $p = p(\psi)$. Так, например, в [18-19] метрика (4) и модель (3) использованы для обоснования гипотезы Шредингера [2] о связи гравитационных волн с волновой функцией квантовой механики.

Рассмотрим гравитацию в пространствах с метрикой (4). Уравнение Эйнштейна в форме (3) является универсальным, поэтому обобщается на пространство любого числа измерений. Движение материи будем описывать уравнением Гамильтона-Якоби, которое также обобщается на любое число измерений. Вместе эти два уравнения составляют универсальную модель, описывающую движение материи в D-мерном пространстве:

$$R_{\mu\nu} - \frac{1}{2} g_{\mu\nu} R = k g_{\mu\nu} \tag{5}$$

$$g^{ik} \frac{\partial S}{\partial x^i} \frac{\partial S}{\partial x^k} = 0 \tag{6}$$

Следовательно, движение материи в квантовой или классической системе можно рассматривать как результат фундаментального механизма преобразования темной энергии в системе, содержащей гравитационные волны разного масштаба [20]. Действительно, уравнение Гамильтона-Якоби (6) описывает распространение лучей света или пучков частиц с нулевой массой в приближении геометрической оптики. Тогда как уравнение Эйнштейна описывает гравитацию в исследуемом масштабе длин волн, включая прибор для измерения движения. Но свет и частицы можно рассматривать как пакеты гравитационных волн малого масштаба, которые генерируются в результате передачи энергии по спектру, аналогично механизму передачи энергии в турбулентном потоке [23].

Коэффициент эмерджентности классических и квантовых статистических систем

Если базовое множество содержит W элементов, то по Хартли количество информации, которое мы получаем, когда выбираем некоторый элемент, равно:

$$I = Log_2 W \tag{7}$$

Если базовые элементы могут взаимодействовать друг с другом, то они могут образовывать подсистемы.

Здесь и возникают принципиальные вопросы о том:

– какие элементы могут образовывать подсистемы, а какие не могут;

– сколько подсистем различной сложности может быть образовано из W базовых элементов?

Ответы на эти вопросы зависят от того, какой квантовой статистике подчиняется образующаяся система.

Рассмотрим квантовую систему, состоящую из ряда подсистем, которые пронумеруем целым числом $j = 1, 2, 3, \ldots$. Каждая подсистема характеризуется числом состояний G_j и числом частиц N_j, которые находятся в этих состояниях и обладают энергией ε_j. Определим число возможных способов распределения N_j частиц по G_j состояниям. В случае статистики Ферми в каждом состоянии может находиться не более чем одна частица, поэтому число способов равно [24]

$$\Delta\Gamma_j = \frac{G_j!}{N_j!(G_j - N_j)!} \tag{8}$$

В случае статистики Бозе в каждом состоянии может находиться любое число частиц, следовательно, число способов равно [24]

$$\Delta\Gamma_j = \frac{(G_j + N_j - 1)!}{N_j!(G_j - 1)!} \tag{9}$$

Энтропия, общее число частиц и энергия системы равны по определению

$$S = \sum_j \ln\Delta\Gamma_j,\ N = \sum_j N_j,\ E = \sum_j \varepsilon_j N_j \tag{10}$$

Найдем числа $n_j = N_j / G_j$, которые соответствуют экстремуму энтропии при условии постоянства общего числа частиц и энергии системы. Если число состояний и число частиц в каждой подсистеме достаточно велико, $N_j, G_j >> 1$, то можно воспользоваться приближенной формулой для логарифма факториала $\ln N_j! \approx N \ln(N/e)$. В этом случае выражение энтропии квантовых систем упрощается и принимает вид:

$$\begin{gathered} S_F = -\sum_j G_j[n_j \ln n_j - (1-n_j)\ln(1-n_j)], \\ S_B = \sum_j G_j[(1+n_j)\ln(1+n_j) - n_j \ln n_j] \end{gathered} \tag{11}$$

Здесь первое выражение соответствует энтропии системы фермионов, а второе – системы бозонов.

Используя метод Лагранжа, составим функционал $S_k + \alpha N + \beta E$, где α, β - некоторые постоянные. Экстремум энтропии достигается при условии

$$\frac{\partial}{\partial n_j}(S_k + \alpha N + \beta E) = 0$$

Отсюда находим два типа распределения

$$n_j = \frac{1}{\exp(\alpha + \beta\varepsilon_j) \pm 1} \qquad (12)$$

Отметим, что знак плюс соответствует распределению Ферми, а знак минус – распределению Бозе.

Следовательно, в случае статистики Ферми на образование подсистем накладывается ограничение на число частиц, которые могут находиться в одном состоянии. С учетом этого ограничения все элементы базового множества могут образовывать подсистемы в любых сочетаниях, а их общее число определяется выражением (8), которое запишем в виде

$$C_n^m = \frac{n!}{m!(n-m)!} \qquad (13)$$

Здесь n – число состояний системы; m – число частиц находящихся в этих состояниях.

Ясно, что при фиксированном числе состояний в системе могут быть подсистемы из 1, 2, 3, …, W элементов. При этом подсистемы из 1-го элемента это сами базовые элементы, а подсистема из W элементов – это вся система в целом (булеан) [17, 21].

На всех иерархических уровнях системы от 1-го до W, суммарно будет содержаться общее число подсистем:

$$N_{FD} = \sum_{m=1}^{W} C_n^m = \sum_{m=1}^{W} \frac{n!}{m!\,(n-m)\,!} \qquad (14)$$

В работе [14] предложено считать, что количество информации в системе можно рассчитывать по формуле Хартли (7), полагая, что элементами системы являются не только ее базовые элементы, но и состоящие из них подсистемы, количество которых в системе определяется выражением (14). Таким образом, количество информации в системе будет:

$$I_{FD} = Log_2 N_{FD} = Log_2 \sum_{m=1}^{W} C_n^m = Log_2 \sum_{m=1}^{W} \frac{n!}{m!\left(n-m\right)!} \qquad (15)$$

Или окончательно:

$$I_{FD} = Log_2 \sum_{m=1}^{W} C_n^m \qquad (16)$$

Следовательно, выражение (11) представляет собой системное обобщение формулы Хартли для количества информации в квантовой системе, подчиняющейся статистике Ферми-Дирака с заданным числом состояний и с переменным числом частиц.

В работе [14] предложено оценивать уровень системности или сложности системы отношением количества информации в системе (с учетом входящих в нее подсистем всех уровней иерархии) к количеству информации во множестве образующих ее базовых элементов:

$$H_{FD}(n,W) = \frac{Log_2 \sum_{m=1}^{W} C_n^m}{Log_2 W} \qquad (17)$$

Это выражение было названо в работе [21] *коэффициентом эмерджентности Хартли*, в честь этого выдающегося ученого, внесшего большой вклад в становление научной теории информации, а также потому, что в нем использовано классическое выражение Хартли для количества информации (7) и его системное обобщение (16).

На рис. 1 представлена зависимость коэффициента эмерджентности Хартли (17), представляющая собой поверхность. Отметим, что в области параметров $n \leq 137$, характерной для ядерных и атомных оболочек, коэффициент эмерджентности изменяется немонотонно с ростом W, что позволяет объяснить поведение энергии связи нуклонов в атомных ядрах [25].

Непосредственно из вида выражения для коэффициента эмерджентности Хартли (17) ясно, что он представляет собой относительное превышение количества информации в квантовой системе, подчиняющейся статистике Ферми-Дирака, при учете системных эффектов (смешанных состояний, иерархической структуры ее подсистем и т.п.) над количеством информации без учета системности.

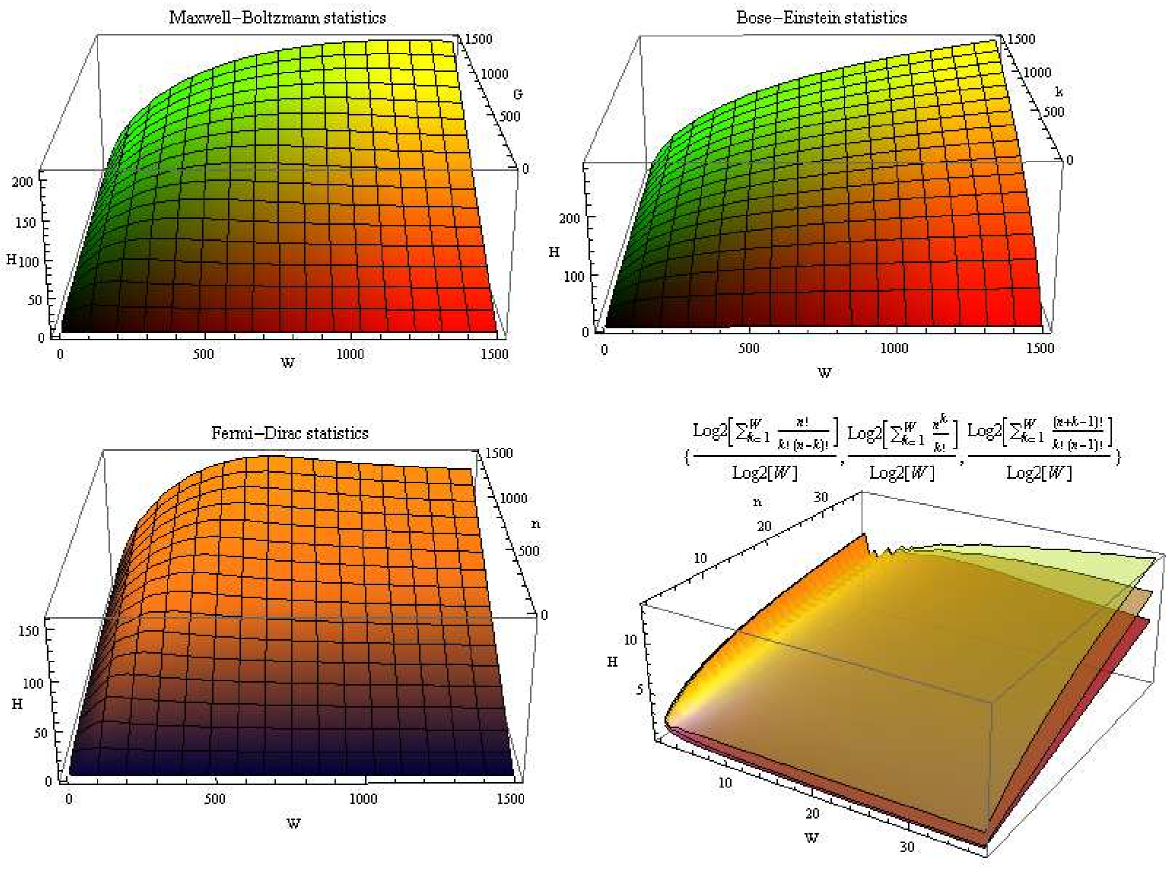

Рис. 1. Поведение коэффициента эмерджентности Хартли в случае классической и квантовой статистики [22]. На правом нижнем рисунке поверхности коэффициента эмерджентности изображены для малого числа частиц и состояний.

В работе [21] показано, что при n=W выражение (16) приобретает вид:

$$N_{FD} = \sum_{m=1}^{W} C_W^m = 2^W - 1 \qquad (18)$$

Выражение (11) для количества информации в системе с учетом (18):

$$I_{FD} = Log_2(2^W - 1) \qquad (19)$$

Выражение (19) дает *оценку максимального количества информации*, которое может содержаться в системе при вхождении всех элементов во все подсистемы различных уровней иерархической структуры.

Из выражения (19) видно, что I достаточно быстро стремится к W, поскольку

$$\lim_{W \to \infty} I / W = 1 \qquad (20)$$

При W > 4 различие I и W в выражении (20) не превышает 1%. Таким образом, коэффициент эмерджентности Хартли (17) отражает уровень системности объекта, подчиняющегося статистике Ферми-Дирака. Этот коэффициент изменяется от 1 (системность минимальна, т.е. отсутствует) до W/Log_2W (системность максимальна).

Для каждого количества элементов системы существует свой максимальный уровень системности, который никогда реально не достигается из-за действия **правил запрета** на реализацию в системе ряда подсистем различных уровней иерархии. Например, не все сочетания букв русского алфавита образуют слова русского языка, и не все сочетания слов – предложения. В каждом состоянии может находиться только одна частица и т.п. По этой причине систему правил запрета в [21] предложено назвать информационным проектом системы. Различные системы, состоящие из равного количества одинаковых элементов, отличаются друг от друга именно по причине различия своих информационных проектов.

Одним из наиболее важных и известных в физике правил запрета, который действует на квантовые системы, подчиняющиеся статистике Ферми-Дирака, является принцип Паули. Это один из основополагающих принципов, влияющий на строение химических элементов, классифицированных в таблице Д. И. Менделеева [25].

Для статистики Бозе-Эйнштейна число различных подсистем рассчитывается по формуле (9), которую запишем в форме

$$C_{r+k-1}^{r} = \frac{(r+k-1)!}{r!(k-1)!} \tag{21}$$

Здесь k – число состояний, r – число частиц в системе. На всех иерархических уровнях квантовой системы, подчиняющейся статистике Бозе-Эйнштейна, от 1-го до W, суммарно будет содержаться общее число подсистем

$$N_{BE} = \sum_{r=1}^{W} C_{r+k-1}^{r} = \sum_{r=1}^{W} \frac{(r+k-1)!}{r!(k-1)!} \tag{22}$$

Предположим, что количество информации в квантовой системе, подчиняющейся статистике Бозе-Эйнштейна, можно рассчитывать по формуле Хартли (7), полагая, что элементами системы являются не только ее базовые элементы, но и состоящие из них подсистемы, количество которых в системе определяется выражением (22). Таким образом, количество информации в такой квантовой системе, подчиняющейся статистике Бозе-Эйнштейна, будет:

$$I_{BE} = Log_2 N_{BE} = Log_2 \sum_{r=1}^{W} C_{r+k-1}^{r} = Log_2 \sum_{r=1}^{W} \frac{(r+k-1)!}{r!(k-1)!} \tag{23}$$

Или окончательно:

$$I_{BE} = Log_2 \sum_{r=1}^{W} C_{r+k-1}^{r} \tag{24}$$

Выражение (19) представляет собой системное обобщение формулы Хартли для количества информации в квантовой системе, подчиняющейся статистике Бозе-Эйнштейна.

Соответственно, выражение для коэффициента эмерджентности Хартли для случая квантовых систем, подчиняющихся статистике Бозе-Эйнштейна, будет иметь вид:

$$H_{BE}(k,W) = \frac{Log_2 \sum_{r=1}^{W} C_{r+k-1}^{r}}{Log_2 W} \tag{25}$$

На рис. 1 представлена зависимость коэффициента эмерджентности Хартли (25). Можно отметить существенное различие в поведении функции (25) и аналогичного коэффициента вычисленного для случая статистики Ферми-Дирака – см. рис. 1.

Отметим, что обе квантовые статистики – и Ферми-Дирака, и Бозе-Эйнштейна, асимптотически приближаются к статистике Максвелла-Больцмана в пределе высоких температур и низких плотностей, что непосредственно следует из выражения (12). В случае статистики Максвелла-Больцмана число подсистем, которое можно образовать при заданном значении числа состояний определяется согласно [24]

$$\Delta\Gamma_j = \frac{G_j^{\,N_j}}{N_j!}$$

Отсюда находим коэффициент эмерджентности классических систем в виде

$$H_{MB}(G,W) = \frac{Log_2 \sum_{N=1}^{W} G^N / N!}{Log_2 W} \tag{26}$$

Здесь N – число частиц, G – число состояний. На рис. 1 представлена зависимость (26). По характеру поведения коэффициент эмерджентности классических систем при малом числе состояний и частиц занимает промежуточное положение между аналогичными коэффициентами, вычисленными для ферми- и бозе-систем – см. рис. 1.

Из приведенных на рис. 1 данных следует, что с ростом числа состояний и числа частиц коэффициенты эмерджентности квантовых и классических систем отличаются между собой, как и коэффициенты квантовых систем ферми-частиц и бозе-частиц. Следовательно, коэффициент эмерджентности позволяет отличить классическую систему от квантовой системы, а квантовую систему ферми-частиц от квантовой системы бозе-частиц.

Центрально-симметрическое поле

Уравнения поля в метрике (4) сводятся к одному уравнению второго порядка [18-20]

$$-p'\psi_{tt}+\psi_{rr}=-Kp\psi-\frac{pp'-2p''p\psi+p'^2\psi}{2p\psi}\psi_t^{\,2}+\frac{p+p'\psi}{2p\psi}\psi_r^2 \qquad (27)$$

В общем случае параметры модели и скалярная кривизна зависят только от размерности пространства, имеем

$$\begin{aligned} &k=D(D-5)/2+3,\\ &K=2(D-3),\\ &R=-D^2+3D \end{aligned} \qquad (28)$$

Отметим, что уравнение (27) изменяет свой тип в зависимости от знака производной p':

в области $p'<0$ уравнение (27) имеет эллиптический тип;

в области $p'>0$ уравнение (27) имеет гиперболический тип;

в области $p'=0$ уравнение (27) имеет параболический тип.

Сигнатура метрики (4) не меняется, если потребовать дополнительно $p(\psi)>0, \psi>0$.

Уравнение Гамильтона-Якоби в метрике (4) имеет вид

$$\frac{1}{\psi}\left(\frac{\partial S}{\partial t}\right)^2-\frac{1}{p}\left(\frac{\partial S}{\partial r}\right)^2-\left(\frac{\partial S}{\partial \phi_1}\right)^2-\sin^{-2}\phi_1\left(\frac{\partial S}{\partial \phi_2}\right)^2-$$
$$\sin^{-2}\phi_1\sin^{-2}\phi_2\left(\frac{\partial S}{\partial \phi_3}\right)^2-...-\sin^{-2}\phi_1\sin^{-2}\phi_2...\sin^{-2}\phi_{N-1}\left(\frac{\partial S}{\partial \phi_N}\right)^2=0 \tag{29}$$

Уравнение (29) можно проинтегрировать при некоторых предположениях, используя метод, который предложил Шредингер [2]. Суть метода состоит в том, чтобы представить решение уравнения (11) в виде

$$S=S_{cl}+\hbar\ln\Psi_S \tag{30}$$

Здесь в теорию в явном виде вводится классическое действие - S_{cl}, постоянная Планка и волновая функция Ψ_S. Используя классическое действие, мы определяем те параметры задачи, которые могут считаться внешними для квантовой системы. В случае метрики (4) удобно будет выбрать в качестве переменных квантовой механики углы на единичной сфере, а в качестве координат классического действия – время и радиальную координату. Тогда уравнение (29) разделяется на два уравнения

$$\frac{1}{\psi}\left(\frac{\partial S_{cl}}{\partial t}\right)^2-\frac{1}{p}\left(\frac{\partial S_{cl}}{\partial r}\right)^2=M^2$$
$$\left(\frac{\partial \Psi_S}{\partial \phi_1}\right)^2+\sin^{-2}\phi_1\left(\frac{\partial \Psi_S}{\partial \phi_2}\right)^2+...+\sin^{-2}\phi_1\sin^{-2}\phi_2...\sin^{-2}\phi_{N-1}\left(\frac{\partial \Psi_S}{\partial \phi_N}\right)^2=\frac{M^2}{\hbar^2}\Psi_S^2 \tag{31}$$

Здесь M – произвольная постоянная.

Метрика Шварцшильда и уравнение состояние материи

Все статические метрики вида (4) описываются уравнением (27), полагая в этом уравнении $\psi_t=\psi_{tt}=0$, находим

$$\psi_{rr}=-Kp\psi+\frac{p+p'\psi}{2p\psi}\psi_r^2 \tag{32}$$

Интегрируя уравнение (32), получим

$$p\psi(C-2K\psi)=\psi_r^2 \tag{33}$$

C – произвольная постоянная. Для физических приложений представляют интерес статические решения, которые имеют в качестве асимптотики метрику Шварцшильда, описывающую гравитационное поле точечной массы

$$\psi = 1 - \frac{2m}{R} \tag{34}$$

Метрика (34) широко используется в космологии в связи с явлением коллапса, ведущим к образованию черных дыр. Заметим, что метрика Шварцшильда определена в сферических координатах, тогда как метрика (4) является центрально-симметрической. Для согласования метрик положим $R = 1/r$, тогда метрика Шварцшильда преобразуется к виду

$$\psi = 1 - 2mr \tag{35}$$

Среди статических метрик, имеющих в качестве асимптотики метрику Шварцшильда (35), можно выделить экспоненциальную зависимость

$$\psi = \exp(-2mr) = 1 - 2mr + ... \tag{36}$$

Подставляя выражение (43) в уравнение (40), находим уравнение состояния, которое согласовано с метрикой Шварцшильда

$$\begin{gathered} p = \frac{4m^2\psi}{C - 2K\psi} = \frac{2m^2}{K}\frac{-1}{1 \pm \exp(2mr - \mu)}, \\ \frac{dp}{d\psi} = \frac{C}{(C - 2K\psi)^2}, \quad C = \pm 2Ke^{-\mu} \end{gathered} \tag{37}$$

Заметим, что в метрике Шварцшильда (34) параметр m соответствует массе или энергии покоя системы. Мы предполагаем, что источник гравитации типа точечной массы обусловлен в метрике (4) наличием двух типов уравнения состояния, соответствующих бозонам и фермионам.

Сопоставим первое уравнение (37) с квантовыми статистиками (12):

- в случае бозонов $p = \frac{2m^2}{K}\frac{1}{\exp(2mr - \mu) - 1}, \quad C > 0, p(\psi) > 0, p'(\psi) > 0$;

- в случае фермионов $p = -\frac{2m^2}{K}\frac{1}{\exp(2mr - \mu) + 1}, \quad C < 0, p(\psi) < 0, p'(\psi) < 0$.

Как известно, деление частиц, на фермионы и бозоны, первоначально возникло в статистической физике [24], и лишь благодаря теореме Паули была установлена связь спина со статистикой [26]. Однако уравнение состояния в форме (37) не содержит никакой информации о спинах частиц. Согласно (37), разделение на бозоны и фермионы является фундаментальным свойством гравитационного поля, тогда как спин является свойством симметрии системы, которые отражены во втором уравнении (31).

Стационарные состояния квантовых и классических систем

Покажем, что для любой квантовой или классической системы, обладающей центральной симметрией и заданной энергией, существует такая метрика, что действие системы будет связано с некоторым решением уравнения (27). В случае стационарных состояний действие системы можно представить в виде $S_{cl} = -Et + S_1(r)$. Используя первое уравнение (31) и уравнение (33), находим

$$\begin{aligned} &p\psi(C - 2K\psi) = \psi_r^2 \\ &\frac{E^2}{\psi} - \frac{1}{p}\left(\frac{\partial S_1}{\partial r}\right)^2 = M^2 \end{aligned} \tag{38}$$

Выразим $p = p(\psi)$ из первого уравнения (38) и подставим во второе, тогда получим

$$\left(\frac{\partial S_1}{\partial r}\right)^2 = \frac{E^2 - M^2\psi}{\psi^2(C - 2K\psi)}\left(\frac{\partial \psi}{\partial r}\right)^2 \tag{39}$$

Очевидно, что решения уравнения (39) при всех вещественных значениях параметров и метрики определены в комплексной плоскости. Действительно, уравнение (39) можно представить в виде

$$\left(\frac{\partial S_1}{\partial \psi}\right)^2 = \frac{E^2 - M^2\psi}{\psi^2(C - 2K\psi)} \tag{40}$$

Отсюда следует, что функция действия в общем случае либо является комплексной, либо движение ограничено условием

$$\left(\frac{\partial S_1}{\partial \psi}\right)^2 = \frac{E^2 - M^2\psi}{\psi^2(C - 2K\psi)} \ge 0 \tag{41}$$

Поскольку же метрика допускает любые движения, то отсюда следует, что функция действия является комплексной. Разрешая уравнение (40), находим в явном виде зависимость действия стационарных систем от метрики окружающего пространства

$$
\begin{aligned}
S_1(\psi) = {} & S_0 \pm \frac{E}{\sqrt{C}} \ln \psi \\
& \mp \frac{E}{\sqrt{C}} \ln\left(2CE^2 - 2KE^2\psi - CM^2\psi + 2E\sqrt{C(C-2K\psi)(E^2 - M^2\psi)}\right) \\
& \mp \frac{M}{\sqrt{2K}} \ln\left(-2E^2K - CM^2 + 4KM^2\psi + 2M\sqrt{2K(C-2K\psi)(E^2 - M^2\psi)}\right)
\end{aligned}
\tag{42}
$$

Здесь логарифмическая функция определена в комплексной плоскости, S_0 – произвольная постоянная.

В случае $C = 0$ решение уравнения (40) имеет вид

$$
S_1 = S_0 \mp \sqrt{\frac{2(M^2\psi - E^2)}{K\psi}} \pm \sqrt{\frac{2}{K}} M \ln\left[M\left(\sqrt{\psi}M + \sqrt{M^2\psi - E^2}\right)\right] \tag{43}
$$

Полученные зависимости (41)-(42) решают поставленную задачу. Таким образом, мы доказали, что действие любой механической системы – классической или квантовой, находящейся в стационарном состоянии, зависит от параметров, характеризующих движение и от метрики окружающего пространства. Следовательно, для каждого типа движения существует такое уравнение состояния $p = p(\psi)$, что движение полностью определяется метрикой и параметрами движения – энергией и угловым моментом, что и требовалось доказать.

На рис. 2 представлена зависимости $\operatorname{Re} S, \operatorname{Im} S, |S|, \operatorname{Arg}(S)$, вычисленные по уравнению (42), от параметров C, E при заданных значениях $\psi = 1; M = 1, K = 2$.

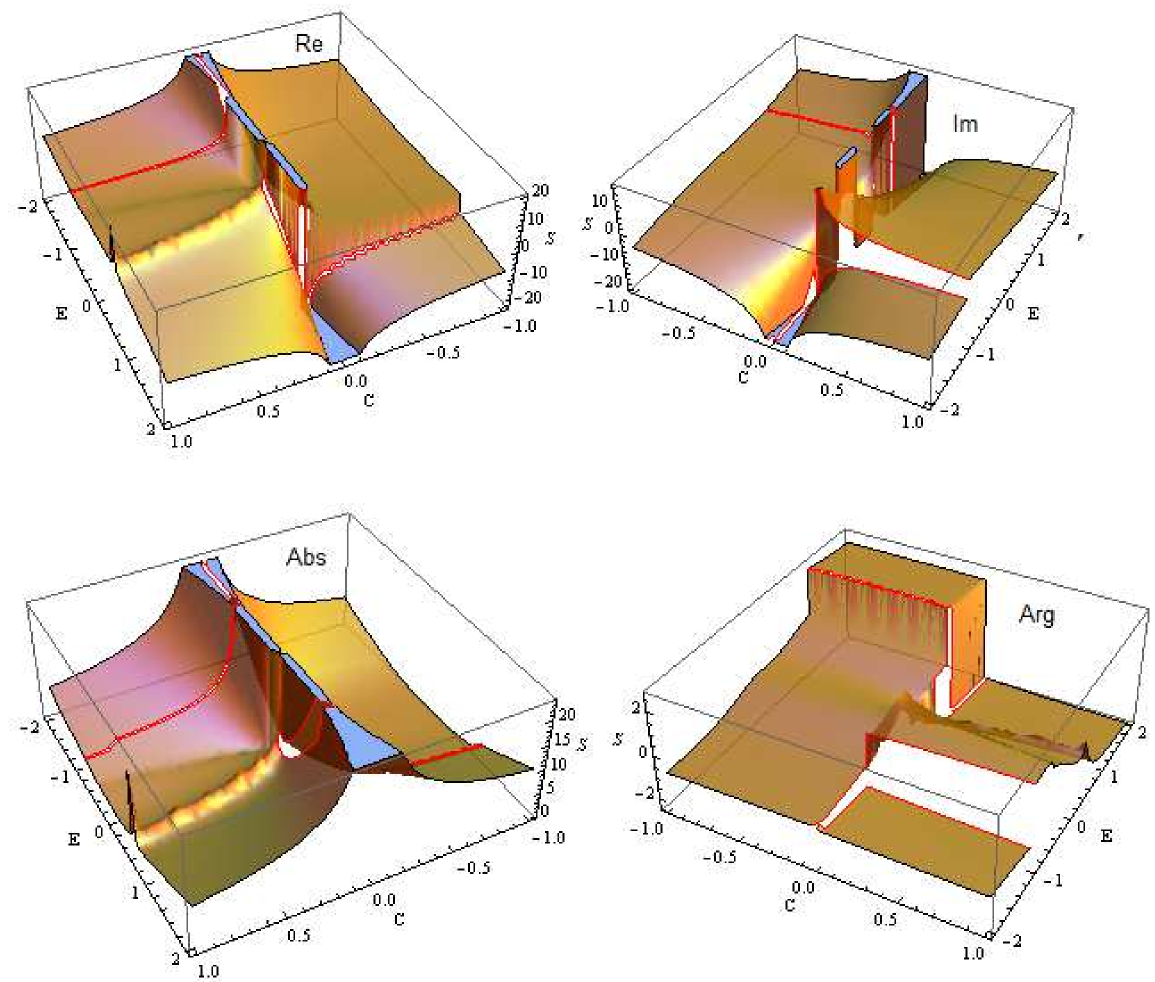

Рис. 2. Зависимость действия от параметров C, E при заданном значении $\psi = 1; K = 2; M = 1$.

Основной вывод, который следует из анализа выражения (42) и данных на рис. 2, это разделение действия бозонов и фермионов «стеной», имеющей особенность $S \sim 1/\sqrt{C}$. Таким образом, указанное выше разделение материи на бозоны и фермионы является фундаментальным свойством гравитационного поля, которое отражается на состоянии материи, что непосредственно следует из уравнения (40).

Далее заметим, что зависимость действия от параметров метрики в форме (42) является аналогичной логарифмической зависимости энтропии и коэффициента эмерджентности от числа состояний в форме (11), (17) и (25). Это наводит на мысль, что действие, описывающее движение системы в гравитационном поле и энтропия имеют аналогичный смысл.

Действительно, в статистической физике распределение типа (12) возникает в такой системе, в которой достигается экстремум энтропии. В гравитационном поле аналогичное распределение (37) возникает в системе обладающей центральной симметрией и метрикой, согласованной с метрикой Шварцшильда. Оба этих свойства, как известно, соотносятся со свойствами материи. А всякая материальная система движется так, что действие достигает экстремума, в частности экстремума информации или энтропии [16]. Таким образом, есть основания предположить, что гравитационные волны являются глобальным системообразущим фактором.

Уравнение (40) показывает, что действие в гравитационном поле зависит не только от динамических параметров, но и от уравнения состояния гравитационного поля. В случае фермионов из уравнения (40) и условия (41) следует, что энергия системы с центральной симметрией меньше, чем энергия покоя, поскольку $E^2 - M^2\psi \le 0$. Это правило выполняется как для электронов в электронных оболочках, так и для нуклонов в атомных ядрах. В случае бозонов энергия системы может быть и больше и меньше, чем энергия покоя.

Это фундаментальное различие между бозонами и фермионами можно отобразить на основе уравнения (42), полагая в нем $\psi = x + iy$. На рис. 3 представлена реальная часть действия над комплексной плоскостью метрики. В случае бозонов соответствующая поверхность имеет дыру, а в случае фермионов – разрыв.

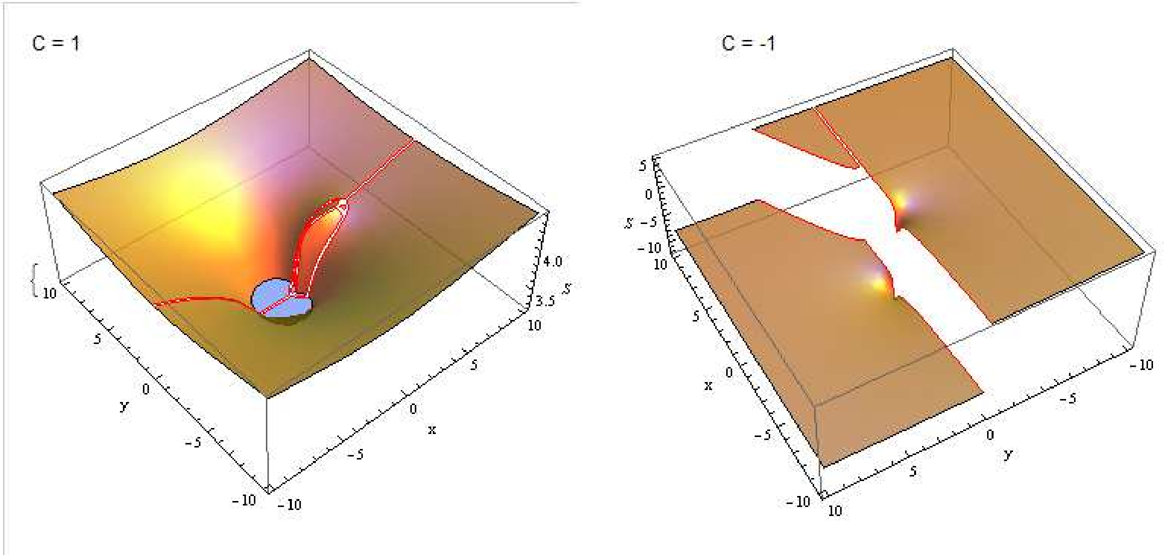

Рис. 3. Поведение реальной части действия над комплексной плоскостью метрики: поверхность бозонов имеет дыру, а фермионов – разрыв.

Метрика квантовой системы

В качестве приложения модели рассмотрим метрику, которая соответствует движению квантовой системы. Поскольку модель (34) описывает релятивистское движение, используем уравнение Клейна-Гордона в форме

$$-c^2\hbar^2\frac{\partial^2\Psi_q}{\partial q^2}+(m^2c^2-(E-V(q))^2)\Psi_q=0 \tag{44}$$

Здесь Ψ_q, q, m, V – волновая функция, обобщенная координата, масса и потенциал соответственно. Было показано [27], что в этом случае функцию действия можно выразить через две константы φ, l и через отношение двух независимых действительных решений уравнения (44), $w_r=\Psi_{q1}/\Psi_{q2}$, в виде

$$\exp(2iS_1/\hbar)=e^{i\varphi}\frac{w_r+i\bar{l}}{w_r-il} \tag{45}$$

Далее предположим, что $w_r = w_r(\psi), l = \bar{l}$, выразим действие из уравнения (39), продифференцируем по ψ и подставим в уравнение (34), тогда получим

$$\frac{l^2\hbar^2}{(l^2 + w_r^2)^2}\left(\frac{\partial w_r}{\partial \psi}\right)^2 = \frac{E^2 - M^2\psi}{\psi^2(C - 2K\psi)} \tag{46}$$

Поскольку все функции в уравнении (40) являются вещественными, в этом случае необходимо потребовать выполнения неравенства (38). Будем считать, что квантовая система состоит из фермионов в смысле определения (26). Предположим, что энергия системы мало отличается от энергии покоя, а метрика слабо отличается от единицы. С учетом этих предположений, положим $E = M - \tilde{E}, \psi = 1 + \tilde{\psi}, C = -2Ke^{-\mu}$, используем линейное приближение для правой части уравнения (46) относительно $\tilde{E}, \tilde{\psi}$, имеем

$$\frac{l^2\hbar^2}{(l^2 + w_r^2)^2}\left(\frac{\partial w_r}{\partial \tilde{\psi}}\right)^2 = \frac{2\tilde{E}M + M^2\tilde{\psi}}{2K(1 + e^{-\mu})} \tag{47}$$

Наконец, интегрируя уравнение (47), находим зависимость метрики от состояния системы

$$\tilde{\psi} = -\frac{2\tilde{E}}{M} + \left(\frac{3}{2}\right)^{2/3}\left(\frac{2K\hbar^2}{M^2}(1 + e^{-\mu})\arctan^2(w_r / l) + A\arctan(w_r / l) + B\right)^{1/3} \tag{48}$$

Здесь $A = 2a\hbar\sqrt{2K(1 + e^{-\mu})} / M^{3/2}, B = a^2 / M$. Таким образом, решение зависит от произвольной постоянной a. Этот параметр найдем, например, из условия, что возмущение метрики стремится к нулю на большом удалении от системы, имеем

$$a = \hbar\sqrt{\frac{2K(1 + e^{-\mu})}{M}}\arctan(w_r(\infty) / l) \pm \frac{4\sqrt{2}E^{3/2}}{3M} \tag{49}$$

На рис. 4 представлена зависимость метрики от параметров квантовой системы и уравнения состояния. Как следует из выражения (48) метрика квантовой системы в этом приближении не имеет особенностей.

Основной эффект наличия материи и энергии связи заключается в понижении или повышении ψ в ограниченных пределах.

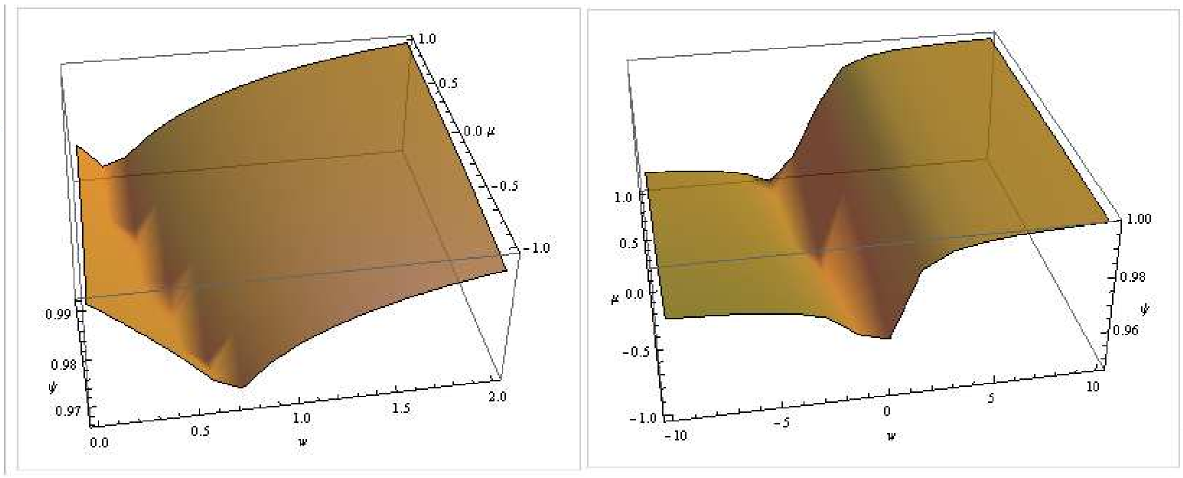

Рис. 4. Зависимость метрики от параметров квантовой системы и уравнения состояния.

Полученные результаты позволяют рассматривать модифицированное уравнение Эйнштейна (3) не только как космологическую модель, но и как фундаментальную модель физики элементарных частиц [18-20].

Список литературы

1. Einstein A. Zur allgemeinen Relativitatstheorie. Sitzungsber. preuss. Akad. Wiss., 1915, 44, 2, 778—786; Erklarung der Perihelbeivegung der Merkur aus der allgemeinen Relativitdtstheorie. Sitzungsber. preuss. Akad. Wiss., 1915, 47, 2, 831—839; Die Grundlage der allgemeinen Relativitatstneorie. Ann. Phys., 1916, 49, 769—822; Nahemngsweise Integration der Feldgleichungen der Gravitation. Sitzungsber. preuss. Akad. Wiss., 1916, 1, 688—696; Kosmologische Betrachtungen zur allgemeinen Relativitdtstheorie. Sitzungsber. preuss. Akad. Wiss., 1917, 1, 142—152; Uber Gravitationwellen. Sitzungsber. preuss. Akad. Wiss., 1918, 1, 154—167.

2. Erwin Schrödinger. Quantisierung als Eigenwertproblem (Erste Mitteilung)//Annalen der Physik, (4), 79, (1926), 361-376; Quantisierung als Eigenwertproblem (Zweite Mitteilung)//Annalen der Physik, (4), 79, (1926), 489-527; Letter Schrodinger to Einstein, Jul 19, 1939.

3. Planck Collaboration: Cosmological parameters. – Plank 2013 results, Astronomy & Astrophysics manuscript, March 21, 2013; Planck 2013 results. XXVI. Background geometry and topology of the Universe. Submitted to A&A (2013).

4. J. Rosner. Planning the Future of U.S. Particles Physics// arxiv: 1401.6075v1 [hep-ex] 23 Jan 2014

5. BICEP2 COLLABORATION. BICEP2 I: DETECTION OF B-mode POLARIZATION AT DEGREE ANGULAR SCALES// arXiv:1403.3985v1 [astro-ph.CO] 17 Mar 2014; BICEP2 II: EXPERIMENT AND THREE-YEAR DATA SET// arXiv:submit/0934363 [astro-ph.CO] 17 Mar 2014.

6. Einstein A., Infeld L. Gravitational Equations and the Problems of Motion //Ann.Math., 1940,41, 455—464; On the Motion of Particles in General Relativity Theory// Canad. J. Math., 1949, 1, 209—241.

7. Stephen Wolfram, Universality and complexity in cellular automata, Physica D 10 (1984) 1-35. http://www.stephenwolfram.com/publications/articles/ca/84-universality; New Kind of Science, Wolfram Media, 2002, http://www.wolframscience.com/nksonline ; Computing a theory of everything// TED. Feb 2010. Retrieved 16 May 2012.

8. David Deutsch. Quantum Theory, the Church-Turing Principle and the Universal Quantum Computer//Proceedings of the Royal Society of London A 400, pp. 97-117, 1985.

9. John A. Wheeler. Information, physics, quantum: The search for links/ in W. Zurek (ed.) Complexity, Entropy, and the Physics of Information. Redwood City, CA: Addison-Wesley, 1990.

10. G. 't Hooft. Quantum Gravity as a Dissipative Deterministic System// Class. Quant. Grav. 16: 3263-79. 1999.

11. Girelli F., Livine E. R. Reconstructing Quantum Geometry from Quantum Information: Spin Networks as Harmonic Oscillators// Class. Quant. Grav. 22: 3295-3314, 2005.

12. J. Schmidhuber. The Fastest Way of Computing All Universes. In H. Zenil, ed., A Computable Universe. World Scientific, 2012.

13. Blitz, David. Emergent Evolution: Qualitative Novelty and the Levels of Reality. Dordrecht: Kluwer Academic, 1992.

14. Луценко Е.В.. Автоматизированный системно-когнитивный анализ в управлении активными объектами (системная теория информации и ее применение в исследовании экономических, социально-психологических, технологических и организационно-технических систем): Монография (научное издание). – Краснодар: КубГАУ. 2002. – 605 с.

15. Луценко Е.В. Количественные меры возрастания эмерджентности в процессе эволюции систем (в рамках системной теории информации) / Е.В. Луценко // Политематический сетевой электронный научный журнал Кубанского государственного аграрного университета (Научный журнал КубГАУ) [Электронный ресурс]. – Краснодар: КубГАУ, 2006. – №05(021). С. 355 – 374. – Шифр Информрегистра: 0420600012\0089, IDA [article ID]: 0210605031. – Режим доступа: http://ej.kubagro.ru/2006/05/pdf/31.pdf, 1,25 у.п.л., импакт-фактор РИНЦ=0,577

16. Луценко Е.В. Универсальный информационный вариационный принцип развития систем / Е.В. Луценко // Политематический сетевой электронный научный журнал Кубанского государственного аграрного университета (Научный журнал КубГАУ) [Электронный ресурс]. – Краснодар: КубГАУ, 2008. – №07(041). С. 117 – 193. – Шифр Информрегистра: 0420800012\0091, IDA [article ID]: 0410807010. – Режим доступа: http://ej.kubagro.ru/2008/07/pdf/10.pdf, 4,812 у.п.л., импакт-фактор РИНЦ=0,577

17. Луценко Е.В. Реализация операции объединения систем в системном обобщении теории множеств (объединение булеанов) / Е.В. Луценко // Политематический сетевой электронный научный журнал Кубанского государственного аграрного университета (Научный журнал КубГАУ) [Электронный ресурс]. – Краснодар: КубГАУ, 2011. – №01(065). С. 354 – 391. – Шифр Информрегистра: 0421100012\0001, IDA [article ID]: 0651101029. – Режим доступа: http://ej.kubagro.ru/2011/01/pdf/29.pdf, 2,375 у.п.л., импакт-фактор РИНЦ=0,577

18. Трунев А.П. Гравитационные волны и квантовая теория Шредингера// Политематический сетевой электронный научный журнал Кубанского государственного аграрного университета (Научный журнал КубГАУ) [Электронный ресурс]. – Краснодар: КубГАУ, 2014. – №02(096). С. 1189 – 1206. – IDA [article ID]: 0961402081. – Режим доступа: http://ej.kubagro.ru/2014/02/pdf/81.pdf

19. Alexander Trunev. Gravitational waves and quantum theory// Политематический сетевой электронный научный журнал Кубанского государственного аграрного университета (Научный журнал КубГАУ) [Электронный ресурс]. – Краснодар: КубГАУ, 2014. – №02(096). – IDA [article ID]: 0961402078. – Режим доступа: http://ej.kubagro.ru/2014/02/pdf/78.pdf

20. Трунев А.П. Гравитационные волны и стационарные состояния квантовых и классических систем// Политематический сетевой электронный научный журнал Кубанского государственного аграрного университета (Научный журнал КубГАУ) [Электронный ресурс]. – Краснодар: КубГАУ, 2014. – №03 (97).

21. Луценко Е.В. Обобщенный коэффициент эмерджентности Хартли как количественная мера синергетического эффекта объединения булеанов в системном обобщении теории множеств / Е.В. Луценко // Политематический сетевой электронный научный журнал Кубанского государственного аграрного университета (Научный журнал КубГАУ) [Электронный ресурс]. – Краснодар: КубГАУ, 2011. – №02(066). С. 535 – 545. – Шифр Информрегистра: 0421100012\0031, IDA [article ID]: 0661102045. – Режим доступа: http://ej.kubagro.ru/2011/02/pdf/45.pdf, 0,688 у.п.л., импакт-фактор РИНЦ=0,577

22. Луценко Е.В., Трунев, А.П. Коэффициент эмерджентности классических и квантовых статистических систем// Политематический сетевой электронный научный журнал Кубанского государственного аграрного университета (Научный журнал КубГАУ) [Электронный ресурс]. – Краснодар: КубГАУ, 2013. – №90(06).

23. Vladimir Dzhunushaliev, V. Folomeev, Burkhard Kleihaus, Jutta Kunz. Modified gravity from the quantum part of the metric// arXiv:1312.0225v2 [gr-qc], 9 Jan 2014.

24. L.D. Landau, E.M. Lifshitz. Statistical Physics. Vol. 5 (3rd ed.). Butterworth-Heinemann. 1980.

25. Трунев А.П. Ядерные оболочки и периодический закон Д.И.Менделеева. Часть 1, 2. // Политематический сетевой электронный научный журнал Кубанского государственного аграрного университета (Научный журнал КубГАУ) [Электронный ресурс]. – Краснодар: КубГАУ, 2012. – №07(81). С. 491 – 514. – Режим доступа: http://ej.kubagro.ru/2012/07/pdf/37.pdf

26. Pauli W. The Connection Between Spin and Statistics// Phys. Rev. 58 (8), 716-722, 1940.

27. Alon E. Faraggi and Marco Matone. The Equivalence Postulate of Quantum Mechanics// arXiv:hep-th/9809127v2, 6 Aug 1999.

References

1. Einstein A. Zur allgemeinen Relativitatstheorie. Sitzungsber. preuss. Akad. Wiss., 1915, 44, 2, 778—786; Erklarung der Perihelbeivegung der Merkur aus der allgemeinen Relativitdtstheorie. Sitzungsber. preuss. Akad. Wiss., 1915, 47, 2, 831—839; Die Grundlage der allgemeinen Relativitatstneorie. Ann. Phys., 1916, 49, 769—822; Nahemngsweise Integration der Feldgleichungen der Gravitation. Sitzungsber. preuss. Akad. Wiss., 1916, 1, 688—696; Kosmologische Betrachtungen zur allgemeinen Relativitdtstheorie. Sitzungsber.

preuss. Akad. Wiss., 1917, 1, 142—152; Uber Gravitationwellen. Sitzungsber. preuss. Akad. Wiss., 1918, 1, 154—167.

2. Erwin Schrödinger. Quantisierung als Eigenwertproblem (Erste Mitteilung)//Annalen der Physik, (4), 79, (1926), 361-376; Quantisierung als Eigenwertproblem (Zweite Mitteilung)//Annalen der Physik, (4), 79, (1926), 489-527; Letter Schrodinger to Einstein, Jul 19, 1939.

3. Planck Collaboration: Cosmological parameters. – Plank 2013 results, Astronomy & Astrophysics manuscript, March 21, 2013; Planck 2013 results. XXVI. Background geometry and topology of the Universe. Submitted to A&A (2013).

4. J. Rosner. Planning the Future of U.S. Particles Physics// arxiv: 1401.6075v1 [hep-ex] 23 Jan 2014

5. BICEP2 COLLABORATION. BICEP2 I: DETECTION OF B-mode POLARIZATION AT DEGREE ANGULAR SCALES// arXiv:1403.3985v1 [astro-ph.CO] 17 Mar 2014; BICEP2 II: EXPERIMENT AND THREE-YEAR DATA SET// arXiv:submit/0934363 [astro-ph.CO] 17 Mar 2014.

6. Einstein A., Infeld L. Gravitational Equations and the Problems of Motion //Ann.Math., 1940,41, 455—464; On the Motion of Particles in General Relativity Theory// Canad. J. Math., 1949, 1, 209—241.

7. Stephen Wolfram, Universality and complexity in cellular automata, Physica D 10 (1984) 1-35. http://www.stephenwolfram.com/publications/articles/ca/84-universality; New Kind of Science, Wolfram Media, 2002, http://www.wolframscience.com/nksonline ; Computing a theory of everything// TED. Feb 2010. Retrieved 16 May 2012.

8. David Deutsch. Quantum Theory, the Church-Turing Principle and the Universal Quantum Computer//Proceedings of the Royal Society of London A 400, pp. 97-117, 1985.

9. John A. Wheeler. Information, physics, quantum: The search for links/ in W. Zurek (ed.) Complexity, Entropy, and the Physics of Information. Redwood City, CA: Addison-Wesley, 1990.

10. G. 't Hooft. Quantum Gravity as a Dissipative Deterministic System// Class. Quant. Grav. 16: 3263-79. 1999.

11. Girelli F., Livine E. R. Reconstructing Quantum Geometry from Quantum Informa-tion: Spin Networks as Harmonic Oscillators// Class. Quant. Grav. 22: 3295-3314, 2005.

12. J. Schmidhuber. The Fastest Way of Computing All Universes. In H. Zenil, ed., A Computable Universe. World Scientific, 2012.

13. Blitz, David. Emergent Evolution: Qualitative Novelty and the Levels of Reality. Dordrecht: Kluwer Academic, 1992.

14. Lucenko E.V.. Avtomatizirovannyj sistemno-kognitivnyj analiz v uprav-lenii aktivnymi ob#ektami (sistemnaja teorija informacii i ee primenenie v issle-dovanii jekonomicheskih, social'no-psihologicheskih, tehnologicheskih i organizaci-onno-tehnicheskih sistem): Monografija (nauchnoe izdanie). – Krasnodar: KubGAU. 2002. – 605 s.

15. Lucenko E.V. Kolichestvennye mery vozrastanija jemerdzhentnosti v processe jevoljucii sistem (v ramkah sistemnoj teorii informacii) / E.V. Lucenko // Polite-maticheskij setevoj jelektronnyj nauchnyj zhurnal Kubanskogo gosudarstvennogo ag-rarnogo universiteta (Nauchnyj zhurnal KubGAU) [Jelektronnyj resurs]. – Krasnodar: KubGAU, 2006. – №05(021). S. 355 – 374. – Shifr Informregistra: 0420600012\0089, IDA [article ID]: 0210605031. – Rezhim dostupa: http://ej.kubagro.ru/2006/05/pdf/31.pdf, 1,25 u.p.l., impakt-faktor RINC=0,577

16. Lucenko E.V. Universal'nyj informacionnyj variacionnyj princip raz-vitija sistem / E.V. Lucenko // Politematicheskij setevoj jelektronnyj nauchnyj zhur-nal Kubanskogo

gosudarstvennogo agrarnogo universiteta (Nauchnyj zhurnal KubGAU) [Jelektronnyj resurs]. – Krasnodar: KubGAU, 2008. – №07(041). S. 117 – 193. – Shifr Informregistra: 0420800012\0091, IDA [article ID]: 0410807010. – Rezhim dostupa: http://ej.kubagro.ru/2008/07/pdf/10.pdf, 4,812 u.p.l., impakt-faktor RINC=0,577

17. Lucenko E.V. Realizacija operacii ob#edinenija sistem v sistemnom obobshhe-nii teorii mnozhestv (ob#edinenie buleanov) / E.V. Lucenko // Politematicheskij se-tevoj jelektronnyj nauchnyj zhurnal Kubanskogo gosudarstvennogo agrarnogo univer-siteta (Nauchnyj zhurnal KubGAU) [Jelektronnyj resurs]. – Krasnodar: KubGAU, 2011. – №01(065). S. 354 – 391. – Shifr Informregistra: 0421100012\0001, IDA [article ID]: 0651101029. – Rezhim dostupa: http://ej.kubagro.ru/2011/01/pdf/29.pdf, 2,375 u.p.l., im-pakt-faktor RINC=0,577

18. Trunev A.P. Gravitacionnye volny i kvantovaja teorija Shredingera// Poli-tematicheskij setevoj jelektronnyj nauchnyj zhurnal Kubanskogo gosudarstvennogo ag-rarnogo universiteta (Nauchnyj zhurnal KubGAU) [Jelektronnyj resurs]. – Krasnodar: KubGAU, 2014. – №02(096). S. 1189 – 1206. – IDA [article ID]: 0961402081. – Rezhim dos-tupa: http://ej.kubagro.ru/2014/02/pdf/81.pdf

19. Alexander Trunev. Gravitational waves and quantum theory// Politematicheskij setevoj jelektronnyj nauchnyj zhurnal Kubanskogo gosudarstvennogo agrarnogo univer-siteta (Nauchnyj zhurnal KubGAU) [Jelektronnyj resurs]. – Krasnodar: KubGAU, 2014. – №02(096). – IDA [article ID]: 0961402078. – Rezhim dostupa: http://ej.kubagro.ru/2014/02/pdf/78.pdf

20. Trunev A.P. Gravitacionnye volny i stacionarnye sostojanija kvantovyh i klassicheskih sistem// Politematicheskij setevoj jelektronnyj nauchnyj zhurnal Ku-banskogo gosudarstvennogo agrarnogo universiteta (Nauchnyj zhurnal KubGAU) [Jelek-tronnyj resurs]. – Krasnodar: KubGAU, 2014. – №03 (97).

21. Lucenko E.V. Obobshhennyj kojefficient jemerdzhentnosti Hartli kak koliche-stvennaja mera sinergeticheskogo jeffekta ob#edinenija buleanov v sistemnom obobshhe-nii teorii mnozhestv / E.V. Lucenko // Politematicheskij setevoj jelektronnyj nauch-nyj zhurnal Kubanskogo gosudarstvennogo agrarnogo universiteta (Nauchnyj zhurnal KubGAU) [Jelektronnyj resurs]. – Krasnodar: KubGAU, 2011. – №02(066). S. 535 – 545. – Shifr Informregistra: 0421100012\0031, IDA [article ID]: 0661102045. – Rezhim dos-tupa: http://ej.kubagro.ru/2011/02/pdf/45.pdf, 0,688 u.p.l., impakt-faktor RINC=0,577

22. Lucenko E.V., Trunev, A.P. Kojefficient jemerdzhentnosti klassicheskih i kvantovyh statisticheskih sistem// Politematicheskij setevoj jelektronnyj nauchnyj zhurnal Kubanskogo gosudarstvennogo agrarnogo universiteta (Nauchnyj zhurnal Kub-GAU) [Jelektronnyj resurs]. – Krasnodar: KubGAU, 2013. – №90(06).

23. Vladimir Dzhunushaliev, V. Folomeev, Burkhard Kleihaus, Jutta Kunz. Modified gravity from the quantum part of the metric// arXiv:1312.0225v2 [gr-qc], 9 Jan 2014.

24. L.D. Landau, E.M. Lifshitz. Statistical Physics. Vol. 5 (3rd ed.). Butterworth-Heinemann. 1980.

25. Trunev A.P. Jadernye obolochki i periodicheskij zakon D.I.Mendeleeva. Chast' 1, 2. // Politematicheskij setevoj jelektronnyj nauchnyj zhurnal Kubanskogo go-sudarstvennogo agrarnogo universiteta (Nauchnyj zhurnal KubGAU) [Jelektronnyj re-surs]. – Krasnodar: KubGAU, 2012. – №07(81). S. 491 – 514. – Rezhim dostupa: http://ej.kubagro.ru/2012/07/pdf/37.pdf

26. Pauli W. The Connection Between Spin and Statistics// Phys. Rev. 58 (8), 716-722, 1940.

27. Alon E. Faraggi and Marco Matone. The Equivalence Postulate of Quantum Me-chanics// arXiv:hep-th/9809127v2, 6 Aug 1999.