УДК 514.84

ГРАВИТАЦИОННЫЕ ВОЛНЫ И КВАНТОВАЯ ТЕОРИЯ ШРЕДИНГЕРА

Трунев Александр Петрович
к.ф.-м.н., Ph.D.
Директор, A&E Trounev IT Consulting, Торонто, Канада

В работе рассмотрена теория гравитации в многомерных пространствах. Сформулирована модель метрики, удовлетворяющая основным требованиям квантовой теории. Показано, что в такой метрике гравитационные волны описываются уравнением Лиувилля. Доказана гипотеза Шредингера о связи волновой функции с гравитационными волнами. Построены решения уравнений гравитационного поля, моделирующие волны де Бройля.

Ключевые слова: ГРАВИТАЦИОННЫЕ ВОЛНЫ, КВАНТОВАЯ ТЕОРИЯ, ТЕОРИЯ СТРУН, ТЕОРИЯ ГРАВИТАЦИИ ЭЙНШТЕЙНА, ТЕМНАЯ МАТЕРИЯ, ТЕМНАЯ ЭНЕРГИЯ.

UDC 514.84

GRAVITATIONAL WAVES AND SCHRODINGER QUANTUM THEORY

Alexander Trunev
Cand.Phys.-Math.Sci., Ph.D.
Director, A&E Trounev IT Consulting, Toronto, Canada

In this paper, we consider gravitation theory in multidimensional space. The model of the metric satisfying the basic requirements of quantum theory is proposed. It is shown that gravitational waves are described by the Liouville equation. Conjecture about the Schrödinger wave function due to gravitational waves was proved. Solutions of the gravitational field equations similar to the de Broglie waves have been constructed.

Keywords: GENERAL RELATIVITY, GRAVITATIONAL WAVES, BLACK ENERGY, BLACK MATTER, QUANTUM THEORY, STRING-THEORY.

Введение

Общая теория относительности является основной современной космологии и квантовой теории гравитации /1-13/. Уравнения гравитационного поля Эйнштейна имеют вид /1/:

$$R_{mn} - \frac{1}{2} g_{mn} R = g_{mn} \Lambda + \frac{8pG}{c^4} T_{mn} \quad (1)$$

R_{mn}, g_{mn}, T_{mn} - тензор Риччи, метрический тензор и тензор энергии-импульса; Λ, G, c - космологическая постоянная Эйнштейна, гравитационная постоянная и скорость света соответственно.

В общем случае имеют место соотношения

$$R_{ik} = R^{j}_{ijk}, \quad R = g^{ik} R_{ik},$$
$$R^{a}_{bgd} = \frac{\partial \Gamma^{a}_{bd}}{\partial x^{g}} - \frac{\partial \Gamma^{a}_{bg}}{\partial x^{d}} + \Gamma^{m}_{bd}\Gamma^{a}_{mg} - \Gamma^{m}_{bg}\Gamma^{a}_{md}, \qquad (2)$$
$$\Gamma^{i}_{jk} = \frac{1}{2} g^{is}\left(\frac{\partial g_{sj}}{\partial x^{k}} + \frac{\partial g_{sk}}{\partial x^{j}} - \frac{\partial g_{jk}}{\partial x^{s}}\right)$$

R^{a}_{bgd} - тензор Римана, Γ^{i}_{kl} – символы Кристоффеля второго рода.

Тензор энергии-импульса материи в уравнении (1), вообще говоря, зависит от гравитационного поля. В этой связи Эйнштейн и Инфельд сформулировали программу /6/:

«Все попытки представить материю тензором энергии-импульса неудовлетворительны, и мы хотим освободить нашу теорию от специального выбора такого тензора. Поэтому мы будем иметь дело здесь только с гравитационными уравнениями в пустом пространстве, а материя будет представлена сингулярностями гравитационного поля».

Этот подход к решению проблемы происхождения материи не является единственным. Чтобы сохранить основную идею определения метрики в теории гравитации Эйнштейна, мы предположим, что уравнение Эйнштейна (1) распадается на два независимых уравнения /7-9/:

$$R_{mn} - \frac{1}{2} g_{mn} R = k g_{mn}$$
$$\frac{8pG}{c^{4}} T_{mn} = g_{mn}(k - \Lambda) \qquad (3)$$

Здесь k – некоторая функция, зависящая от размерности пространства. Отметим, что первым уравнением определяется метрика пространства-времени, а вторым уравнением задается распределение материи, которое соответствует этой метрике. Эта гипотеза соответствует идее о происхождении материи из гравитационного поля /3,8-11/, но без специального предположения о наличии сингулярности метрики.

В работе /7/ модель (3) была использована для построения метрики неоднородной вращающейся Вселенной. Был предложен механизм производства материи из темной энергии путем фазового перехода. В работе /8/ представленная модель квантовой гравитации в многомерных пространствах размерностью D с метрикой

$$\begin{aligned} ds^2 &= \psi(t,r)dt^2 - p(\psi)dr^2 - d\phi_1^{\ 2} - \sin^2\phi_1 d\phi_2^{\ 2} - \sin^2\phi_1 \sin^2\phi_2 d\phi_3^{\ 2} - \\ &\dots - \sin^2\phi_1 \sin^2\phi_2 \dots \sin^2\phi_{N-1} d\phi_N^{\ 2} \end{aligned} \tag{4}$$

Здесь $\phi_1, \phi_2, \dots, \phi_N$ - углы на единичной сфере, погруженной в $D-1$ мерное пространство. Метрика (4) описывает многие важные случаи симметрии, используемые в физике элементарных частиц и в теории супергравитации /13-15/. Такой подход позволяет охватить все многообразие материи, которую производит фабрика природы, путем выбора уравнения состояния $p = p(\psi)$.

В настоящей работе метрика (4) и модель (3) использованы для обоснования гипотезы Шредингера /16/ о связи гравитационных волн с волновой функцией квантовой механики.

Супергравитация и движение материи

Рассмотрим гравитацию в пространствах с метрикой (4). Уравнение Эйнштейна в форме (3) является универсальным, поэтому обобщается на пространство любого числа измерений /5,8,13/. Движение материи будем описывать уравнением Гамильтона-Якоби, которое также обобщается на любое число измерений. Вместе эти два уравнения составляют универсальную модель, описывающую движение материи в D-мерном пространстве:

$$R_{mn} - \frac{1}{2} g_{mn} R = k g_{mn} \tag{5}$$

$$g^{ik} \frac{\partial S}{\partial x^i} \frac{\partial S}{\partial x^k} = 0 \tag{6}$$

Уравнения поля в метрике (4) сводятся к одному уравнению второго порядка /8/

$$-p' y_{tt} + y_{rr} = -Kpy - \frac{pp' - 2p''py + p'^2 y}{2py} y_t^2 + \frac{p + p'y}{2py} y_r^2 \tag{7}$$

В общем случае параметры модели и скалярная кривизна зависят только от размерности пространства, имеем

$$\begin{aligned} &k = D(D-5)/2 + 3, \\ &K = 2(D-3), \\ &R = -D^2 + 3D \end{aligned} \tag{8}$$

Отметим, что уравнение (7) изменяет свой тип в зависимости от знака производной p':

в области $p' < 0$ уравнение (7) имеет эллиптический тип;

в области $p' > 0$ уравнение (7) имеет гиперболический тип;

в области $p' = 0$ уравнение (7) имеет параболический тип.

Сигнатура метрики (4) не меняется, если потребовать дополнительно $p(y) > 0, y > 0$.

Уравнение Гамильтона-Якоби в метрике (4) имеет вид

$$\begin{gathered} \frac{1}{y}\left(\frac{\partial S}{\partial t}\right)^2 - \frac{1}{p}\left(\frac{\partial S}{\partial r}\right)^2 - \left(\frac{\partial S}{\partial f_1}\right)^2 - \sin^{-2} f_1 \left(\frac{\partial S}{\partial f_2}\right)^2 - \\ \sin^{-2} f_1 \sin^{-2} f_2 \left(\frac{\partial S}{\partial f_3}\right)^2 - \ldots - \sin^{-2} f_1 \sin^{-2} f_2 \ldots \sin^{-2} f_{N-1} \left(\frac{\partial S}{\partial f_N}\right)^2 = 0 \end{gathered} \tag{9}$$

Уравнение (9) можно проинтегрировать при некоторых предположениях, используя метод, который предложил Шредингер /16/. Суть метода состоит в том, чтобы представить решение уравнения (11) в виде

$$S = S_{cl} + \mathbf{h} \ln \Psi_S \tag{10}$$

Здесь в теорию в явном виде вводится классическое действие - S_{cl}, постоянная Планка и волновая функция Ψ_S. Используя классическое действие, мы определяем те параметры задачи, которые могут считаться внешними для квантовой системы. При таком подходе становится очевидной связь квантовой механики с классической механики /17/.

В случае метрики (4) удобно будет выбрать в качестве переменных квантовой механики углы на единичной сфере, а в качестве координат классического действия – время и радиальную координату. Тогда уравнение (9) разделяется на два уравнения

$$\begin{aligned} &\frac{1}{y}\left(\frac{\partial S_{cl}}{\partial t}\right)^2 - \frac{1}{p}\left(\frac{\partial S_{cl}}{\partial r}\right)^2 = M^2 \\ &\left(\frac{\partial \Psi_S}{\partial f_1}\right)^2 + \sin^{-2} f_1 \left(\frac{\partial \Psi_S}{\partial f_2}\right)^2 + \ldots + \sin^{-2} f_1 \sin^{-2} f_2 \ldots \sin^{-2} f_{N-1} \left(\frac{\partial \Psi_S}{\partial f_N}\right)^2 = \frac{M^2}{\mathbf{h}^2} \Psi_S^2 \end{aligned} \tag{11}$$

Здесь M – произвольная постоянная.

Гравитационные волны

Рассмотрим гравитационные волны, которые возникают в метрике (4) в случае линейного уравнения состояния. Положим в уравнении (7)

$p = y \ / c^2, y \ = e^w$.

Тогда уравнение (7) приводится к виду уравнения Лиувилля:

$$w_{tt} = c^2 w_{rr} + K e^w \tag{12}$$

Для уравнения (12) можно указать алгоритм построения общего решения и различных частных решений типа уединенных волн /18-24/. Общее решение дается формулой Лиувилля:

$$w(r,t) = \ln\left[\frac{8c^2 f'(h)g'(V)}{K\left(f(h)+g(V)\right)^2}\right], \quad h = ct - r, V = r + ct \tag{13}$$

Здесь $f(h), g(V)$ – произвольные функции. Отметим, что уравнение (12) широко используется в теории струн и квантовой гравитации /21-24/, поскольку соответствующая модель является полностью интегрируемой. Обычно это уравнение выводится из принципа стационарности действия /21-24/, однако использованный нами метод имеет то преимущество, что можно определить метрику, соответствующую гравитационным волнам и движение пробных частиц в этой метрике.

Действительно используя формулу Лиувилля (13), можно указать общее решение уравнений Эйнштейна в форме (3), описывающее гравитационные волны в метрике (4):

$$\begin{gathered} y\ (r,t) = \frac{8c^2 f_h(h)g_V(V)}{K\left(f(h)+g(V)\right)^2}, \quad p(y\ ) = y\ /c^2, \\ K = 2(D-3), \quad h = ct - r, V = r + ct \end{gathered} \tag{14}$$

Гравитационные волны типа (14) распространяются в комбинации, включающей опережающие и запаздывающие волны. Это обстоятельство наводит на мысль, что скалярные гравитационные волны могут служить источником квантового движения частиц, например, в форме волн де Бройля /25/.

Действительно, запишем первое уравнение (11) в метрике (14), имеем

$$\frac{1}{c^2}\left(\frac{\partial S_{cl}}{\partial t}\right)^2 - \left(\frac{\partial S_{cl}}{\partial r}\right)^2 = \frac{8M^2}{K}\frac{f_h(h)g_V(V)}{\left(f(h)+g(V)\right)^2} \tag{15}$$

Предполагая, что действие зависит от координат h, V, преобразуем обе части уравнения (15) к эквивалентному виду

$$4\left(\frac{\partial S_{cl}}{\partial h}\right)\left(\frac{\partial S_{cl}}{\partial V}\right)=\frac{8M^2}{K}\frac{\partial \ln\left(f(h)+g(V)\right)}{\partial h}\frac{\partial \ln\left(f(h)+g(V)\right)}{\partial V} \tag{16}$$

Отсюда следует, что действие можно выразить через произвольные функции $f(h), g(V)$ в виде

$$S_{cl}=M\sqrt{\frac{2}{K}}\ln[f(h)+g(V)] \tag{17}$$

Уравнение (17) можно рассматривать и в обратную сторону, предполагая, что неизвестные функции $f(h), g(V)$ связаны с действием пробных частиц

$$f(h)+g(V)=\exp(S_{cl}/h),\ h=M\sqrt{\frac{2}{K}} \tag{18}$$

Все функции, входящие в уравнение (18) являются вещественными.

Если предположить, что $p=-y/c^2$, тогда, полагая в уравнении (7) $y=e^w$ приходим к уравнению Лиувилля эллиптического типа

$$w_{tt}+c^2w_{rr}=Ke^w \tag{19}$$

В этом случае также можно получить решения уравнения (19) общего вида, которые выражаются через аналитические функции /19/. Применение эллиптической модели (32) в квантовой теории гравитации можно найти в работе /22/.

Уравнение (18) позволяет определить метрику, если известно движение произвольных пробных частиц, тогда как уравнение (17) позволяет определить действие, если известна метрика. Такая взаимосвязь действия и волновой функции возникает в квантовой теории Шредингера /16/. Можно, поэтому предположить, что гравитационные волны связаны с волнами материи, на существование которых впервые указал де Бройль /25/.

В таком случае уравнение (17) является прямым доказательством гипотезы де Бройля о волнах материи, а уравнение (18) является доказательством гипотезы Шредингера /16/, который опирался на идеи де Бройля и Эйнштейна при создании квантовой механики.

Волны материи, предсказанные де Бройлем в 1924 г, были обнаружены экспериментально уже в 1927 году, когда Дэвисон и Джермер осуществили дифракцию электронов на кристалле никеля в лаборатории Белла /26/. Однако поиск гравитационных волн, предсказанных Эйнштейном в 1916 г /1/, так и не увенчался успехом.

В этой связи приведем фрагмент из письма Шредингера к Эйнштейну: «…я уже давно думаю, что следует отождествлять Ψ-волны с волнами нарушения гравитационного потенциала - конечно, не с теми, которые ты исследовал впервые, но с теми, которые обладают действительной массой, т.е. не исчезающим T_{ik}. Это значит, я думаю, что нужно в абстрактной общей теории относительности, содержащей T_{ik} еще как «asylum ignorantial» (по твоему собственному выражению), ввести материю не в качестве массивных точек или чего-нибудь подобного, а как квантованные гравитационные волны» /16/.

Если гравитационные волны связаны с волнами материи, как предполагал Шредингер, то должны быть определенные эффекты обусловленные излучением и поглощением гравитационных волн электронами в атомах. Однако до последнего времени никаких эффектов такого рода не было обнаружено. Теория гравитационного излучения, развитая для атома водорода, позволяет определить ширину перехода с излучением одного гравитона из состояния 3d (m = 2) в состояние 1s /27-29/:

$$\Gamma(3d \to 1s) = \frac{a^{6} G m_e^3 c}{360 \mathbf{h}^2} = 5.7 \cdot 10^{-40} s^{-1} \qquad (20)$$

Здесь $a = \frac{e^2}{\mathbf{h} c}$ – постоянная тонкой структуры.

В формуле (20) фигурирует константа гравитационного взаимодействия, заимствованная из макроскопической теории, которая также фигурирует в уравнении (1). Как известно, в теории Эйнштейна гравитационное излучение связано с изменением квадрупольного механического момента системы /1, 27-29/. Однако из уравнения (18) следует, что гравитационные волны связаны с изменением действия.

Заметим, что Эйнштейн, создавая теорию гравитационного излучения в 1918 году /1/, не предполагал, что его теория гравитации будет использована в квантовой теории без всяких изменений. Более того, Эйнштейн считал, что развитие квантовой теории позволит создать теорию гравитации, свободную от проблемы теплового излучения гравитонов. Эйнштейн предполагал зависимость интенсивности излучения гравитационных волн от движения материи, как и в электродинамике, но такую, чтобы система не теряла энергию достаточно долго.

В этом смысле выражение (20) отражает квазиклассический подход в квантовой теории гравитации, в котором не учитывается истинная природа гравитационных волн и квантовый характер гравитационных переходов. В результате имеем крайне низкую вероятность излучения (20), поэтому эффект гравитационного излучения такого рода, видимо, невозможно наблюдать в лабораторных условиях /27/.

С другой стороны, волны де Бройля были не только зарегистрированы в лабораториях, но и нашли широкое применение в прикладной физике. Однако в силу определенных исторических причин эти волны не отождествляются с гравитационными волнами. Развитие квантовой механики пошло в направлении противоположном тому, которое указал Шредингер. Лишь в последнее время, в связи с открытием темной энергии и темной материи возникла проблема интерпретации барионной материи, содержание которой во Вселенной составляет не более 5% /12, 30/.

Если содержание барионной материи мало, то почему в лабораториях наблюдаются только частицы, находящиеся в связи с барионной материей, но нет никаких следов темной энергии или темной материи? Этот вопрос, на наш взгляд, напрямую связан с гравитационными волнами, которые также не были обнаружены, не смотря на все усилия. Не исключено, что ответ лежит на поверхности и сводится к интерпретации уравнений (17)-(18), которые указывает на прямую связь волн де Бройля и волновой функции Шредингера с гравитационными волнами.

Метрика Шварцшильда и уравнение состояние материи

Все статические метрики вида (4) описываются уравнением (7), полагая в этом уравнении $y_t = y_{tt} = 0$, находим

$$y_{rr} = -Kpy + \frac{p + p'y}{2py} y_r^2 \qquad (21)$$

Интегрируя уравнение (21), получим

$$py(C - 2Ky) = y_r^2 \qquad (22)$$

C – произвольная постоянная. Для физических приложений представляют интерес статические решения, которые имеют в качестве асимптотики метрику Шварцшильда, описывающую гравитационное поле точечной массы

$$y = 1 - \frac{2m}{R} \tag{23}$$

Метрика (23) широко используется в теории в связи с явлением коллапса, ведущим к образованию черных дыр /27-28, 31-32/. Заметим, что метрика Шварцшильда определена в сферических координатах, тогда как метрика (4) является центрально-симметрической. Для согласования метрик положим $R = 1/r$, тогда метрика Шварцшильда преобразуется к виду

$$y = 1 - 2mr \tag{24}$$

Среди статических метрик, имеющих в качестве асимптотики метрику Шварцшильда (23), можно выделить экспоненциальную зависимость

$$y = \exp(-2mr) = 1 - 2mr + \ldots \tag{25}$$

Подставляя выражение (25) в уравнение (22), находим уравнение состояния, которое согласовано с метрикой Шварцшильда

$$\begin{aligned} p &= \frac{4m^2 y}{C - 2Ky} = \frac{2m^2}{K}\frac{-1}{1 \pm \exp(2mr - m)}, \\ \frac{dp}{dy} &= \frac{C}{(C - 2Ky)^2}, \quad C = \pm 2Ke^{-m} \end{aligned} \tag{26}$$

Заметим, что в метрике Шварцшильда (23) параметр m соответствует массе или энергии покоя системы. Мы предполагаем, что источник гравитации типа точечной массы обусловлен в метрике (4) наличием двух типов уравнения состояния, соответствующих бозонам и фермионам.

Сопоставим первое уравнение (26) с квантовыми статистиками:

- в случае бозонов $p = \frac{2m^2}{K}\frac{1}{\exp(2mr - m) - 1}, \quad C > 0, p(y) > 0, p'(y) > 0$;

- в случае фермионов $p = -\frac{2m^2}{K}\frac{1}{\exp(2mr - m) + 1}, \quad C < 0, p(y) < 0, p'(y) < 0$.

Указанное деление материи на бозоны и фермионы по виду уравнения состояния (26) является условным. Как известно, деление частиц на фермионы и бозоны первоначально возникло в статистической физике, и лишь благодаря теореме Паули была установлена связь спина со статистикой /33/.

Существование материи на основе фермионов приводит к тому, что уравнение поля (7) имеет эллиптический тип. Как известно, в этом случае малые возмущения затухают, или нарастают по экспоненте, что согласуется с общим поведением барионной материи во Вселенной, подверженной инфляции /5/.

С другой стороны, существование материи на основе бозонов приводит к уравнению поля гиперболического типа. В таком пространстве-времени существуют гравитационные волны конечной амплитуды. В случае линейных возмущений уравнения состояния, когда $p = y / c^2$ эти волны могут быть описаны волновыми решениями уравнения Лиувилля (12).

Гравитационные волны и волны де Бройля

Рассмотрим модель волн де Бройля /25/, существование которых было доказано экспериментально /26/, и происхождение которых традиционно связывают с квантовыми свойствами материи, а не с гравитационными волнами. Необходимо указать такое уравнение состояния для уравнения (7), которое описывает периодические решения вида $y = y(r + ut)$. Положим в уравнении (7)

$$p = y(r + ut)/c^2 + b, y = e^w .$$

Тогда уравнение (7) принимает вид

$$w'' + \frac{bc^2 w'^2}{2(bc^2 + e^w)} + \frac{K(bc^2 + e^w)}{c^2 - u^2} = 0 . \qquad (27)$$

Положим $w(0) = w_0$, $w'(0) = 0$. Волновые решения уравнения (27) существуют при условии $b < 0$ - рис. 1-2. Такого типа гравитационные волны похожи на волны де Бройля в той области параметров, где гравитационные волны являются линейными. Для нахождения этих решений представим уравнение (27) в виде

$$\tilde{w}_{zz} - \frac{\frac{1}{2}\tilde{w}_z^{\ 2}}{\exp(\tilde{w}) - 1} + \exp(\tilde{w}) - 1 = 0, \quad \tilde{w} = w - \ln\left|bc^2\right|. \tag{28}$$

Здесь обозначено

$$\tilde{w} = \tilde{w}(z, b), \; z = \sqrt{K\left|bc^2\right|/(c^2 - u^2)}\,(r + ut), \; b = w_0 - \ln\left|bc^2\right|$$

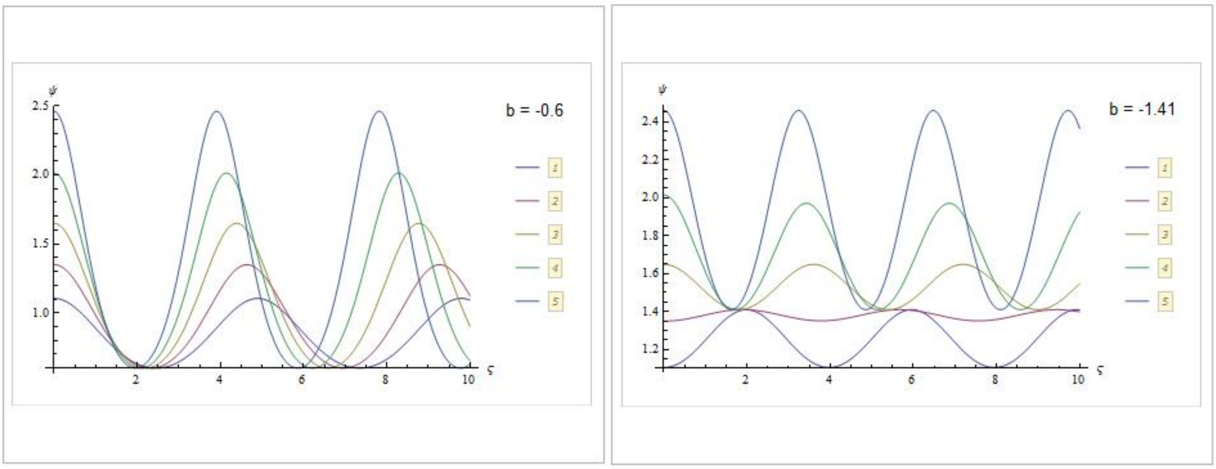

Рис. 1. Гравитационные волны связанные с волнами де Бройля, вычисленные по уравнению (27) для двух значений параметра b и для ряда начальных данных.

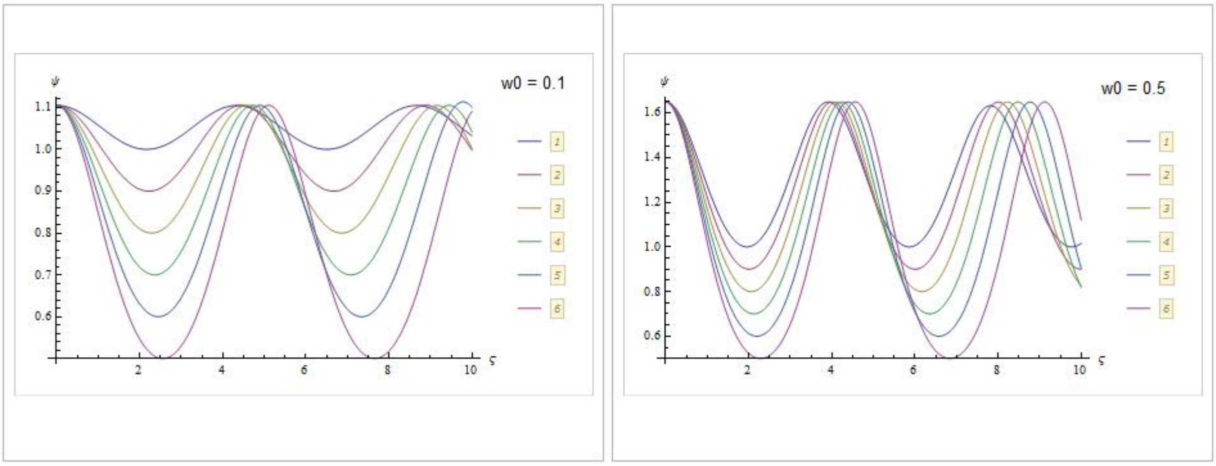

Рис. 2. Гравитационные волны связанные с волнами де Бройля, вычисленные по уравнению (27) для двух значений параметра w_0 и для ряда значений параметра *b=-2;-1.9;-1.8;-1.7;-1.6;-1.5* – кривые *1-6* соответственно.

Разложим экспоненту в уравнении (28) с точностью до линейного слагаемого, в результате получим

$$\tilde{w}_{zz} - \frac{\tilde{w}_z^{\,2}}{2\tilde{w}} + \tilde{w} = 0 \qquad (29)$$

Общее решение уравнения (29) имеет вид

$$\tilde{w} = C_1 \cos^2\left(\frac{z - z_0}{\sqrt{2}}\right) \qquad (30)$$

C_1, z_0 – произвольные постоянные, которые найдем из начальных условий

$$\tilde{w}(0) = w_0 - \ln\left|bc^2\right|,\ \tilde{w}_z(0) = 0 \to C_1 = w_0 - \ln\left|bc^2\right|.$$

Для выполнения уравнения (29) с необходимой точностью достаточно будет потребовать, чтобы выполнялось условие $\left|C_1\right| << 1$ - рис. 3.

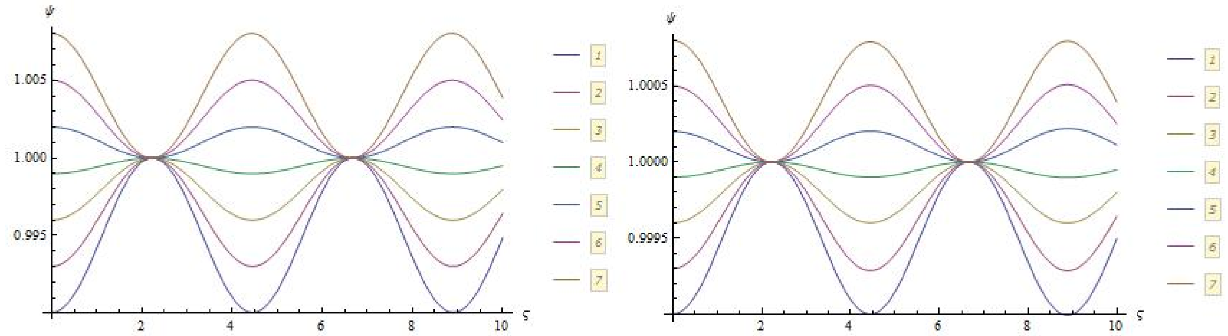

Рис. 3. Гравитационные волны моделирующие волны де Бройля в области параметров $|C_1| << 1$.

Следовательно, метрику, описывающую волны де Бройля, можно представить в виде

$$y = \exp\left(w_0 \cos^2 z' + \ln\left|bc^2\right| \sin^2 z'\right),$$
$$z' = \sqrt{K\left|bc^2\right| / 2(c^2 - u^2)}\,(r + ut) \qquad (31)$$

Наконец, заметим, что возникшее исторически различие между квантовой механикой и общей теорией относительности было обусловлено, главным образом, успешным использованием квантовой механики в объяснении ряда феноменов в области атомной и ядерной физики, химии и биологии. Вследствие этого сложилось мнение, что законы квантовой механики являются фундаментальными, тогда как законы макроскопической физики являются следствием квантовой механики. Однако происхождение самой квантовой механики при этом оставалось скрытым вплоть до последнего времени /17,31-33/, хотя предпринимались многочисленные попытки вывести квантовую теорию из квантовой теории гравитации и статистической механики /32-33/.

Предложенный нами подход к решению проблемы происхождения квантовой механики из общей теории относительности Эйнштейна /1/ в форме уравнений (3) с метрикой (4) может явиться основой для построения ряда моделей, объясняющих не только связь волновой функции с гравитационными волнами, в полном соответствии с гипотезой Шредингера /16/, но и квантовой статистики.

Библиографический список

1. Einstein A. Zur allgemeinen Relativitatstheorie. Sitzungsber. preuss. Akad. Wiss., 1915, 44, 2, 778—786; Erklarung der Perihelbeivegung der Merkur aus der allgemeinen Relativitdtstheorie. Sitzungsber. preuss. Akad. Wiss., 1915, 47, 2, 831—839; Die Grundlage der allgemeinen Relativitatstneorie. Ann. Phys., 1916, 49, 769—822; Nahemngsweise Integration der Feldgleichungen der Gravitation. Sitzungsber. preuss. Akad. Wiss., 1916, 1, 688—696; Kosmologische Betrachtungen zur allgemeinen Relativitdtstheorie. Sitzungsber. preuss. Akad. Wiss., 1917, 1, 142—152; Uber Gravitationwellen. Sitzungsber. preuss. Akad. Wiss., 1918, 1, 154—167.
2. Zeldovich, Y. B. The Cosmological Constant and the Theory of Elementary Particles// Soviet Physics Uspekhi vol. 11, 381-393, 1968.
3. Steven Weinberg. The Cosmological Constant Problems// arXiv:astro-ph/0005265v1 12 May 2000.
4. C.P. Burgess. The Cosmological Constant Problem: Why it's hard to get Dark Energy from Micro-physics//arXiv:1309.4133v1 [hep-th] 16 Sep 2013
5. Andrei Linde. Inflationary Cosmology after Planck 2013//arXiv:1402.0526v1 [hep-th] 3 Feb 2014.
6. Einstein A., Infeld L. Gravitational Equations and the Problems of Motion //Ann.Math., 1940,41, 455—464; On the Motion of Particles in General Relativity Theory// Canad. J. Math., 1949, 1, 209—241.
7. Trunev A.P. Cosmology of inhomogeneous rotating universe and reality show//, Network electronic scientific journal of the Kuban State Agrarian University (The Journal KubGAU) [electronic resource], Krasnodar KubGAU, 2014. – №01(095). – IDA [article ID]: 0951401028, http://ej.kubagro.ru/2014/01/pdf/28.pdf
8. Trunev A.P. QUANTUM GRAVITY AND YANG-MILLS THEORY // Network electronic scientific journal of the Kuban State Agrarian University (The Journal KubGAU) [electronic resource], Krasnodar KubGAU, 2014. – №01(095) http://ej.kubagro.ru/2014/01/pdf/70.pdf
9. Wheeler J. A. On the Nature of Quantum Geometrodynamics// Annals of Physics 2, No, 6 (Dec 1957): 604 – 614.
10. John A Wheeler. Neutrinos, Gravitation, and Geometry/ In Rendiconti della Scuola internazionale di fisica "Enrico Fermi." Corso XI, by L. A.Radicati. Bologna: Zanichelli, 1960, 67 – 196.

11. Sundance O. Bilson-Thompson, Fotini Markopoulou, Lee Smolin. Quantum gravity and the standard model//arXiv:hep-th/0603022, 21 Apr 2007.
12. Planck Collaboration: Cosmological parameters. – Plank 2013 results, Astronomy & Astrophysics manuscript, March 21, 2013; Planck 2013 results. XXVI. Background geometry and topology of the Universe. Submitted to A&A (2013).
13. Bernard de Wit. Supergravity // arXiv: hep-th/0212245v1 19 Dec 2002.
14. Yang C. N., Mills R. L. Conservation of Isotopic Spin and Isotopic Gauge Invariance// Phys. Rev. 96: 191–195. 1954.
15. H. Fritzsch, M. Gell-Mann, H. Leutwyler. Advantages of the color octet gluon picture// Phys. Lett. B 47 (1973) 365.
16. Erwin Schrödinger. Quantisierung als Eigenwertproblem (Erste Mitteilung)//Annalen der Physik, (4), 79, (1926), 361-376; Quantisierung als Eigenwertproblem (Zweite Mitteilung)//Annalen der Physik, (4), 79, (1926), 489-527; Letter Schrodinger to Einstein, Jul 19, 1939.
17. Stephen L. Adler. Where is quantum theory headed? // arXiv:1401.0896 [quant-ph], 5 Jan 2014; Incorporating gravity into trace dynamics: the induced gravitational action//Class. Quantum Grav. 30, 2013.
18. N.H. Ibragimov. Transformation Groups Applied to Mathematical Physics. – Reidel, Boston, 1984.
19. Darren G. Growdy. General Solution to the 2D Liouville Equation//Int. J. Engng Sci., Vol. 35, No. 2, pp. 141-149, 1997.
20. Nir Cohen, Julia V. Toledo Benavides. Exact solutions of Bratu and Liouville equations// CNMAC 2010, pp. 750-756.
21. Polyakov A.M. Quantum geometry of bosonic strings//Phys. Letter, 103B, 3, 1981.
22. Zamolodchikov A, Zamolodchikov Al. Liouville Field Theory on a Pseudosphere// arxiv: hep-th/0101152v1. 23 Jan, 2001.
23. J. Teschner. Liouville theory revisited// arxiv: hep-th/0104158v3, 9 Nov 2001.
24. Yu Nakayama. Liouville Field Theory// arxiv: hep-th/0402009v7, 10Dec, 2004.
25. L. de Broglie. Recherches sur la theorie des quanta. - Thesis (Paris), 1924.
26. Clinton J. Davisson, Lester H. Germer. Diffraction of Electrons by a Crystal of Nickel// Phys. Rev. 30, 705, 1927; Clinton J. Davisson. The discovery of electron waves. Nobel Lecture, Dec 13, 1937.
27. Steven Weinberg. Gravitation and Cosmology. – John Wiley & Sons, 1972.
28. C. Kiefer. Quantum Gravity. – Clarendon Press, Oxford, 2004.
29. Stephen Boughn, Toni Rothman. Aspect of Gravitation Detection: Graviton Emission and Absorption by Atomic Hydrogen// arxiv: gr-gc/0605052v2 Feb 6, 2008.
30. J. Rosner. Planning the Future of U.S. Particles Physics// arxiv: 1401.6075v1 [hep-ex] 23 Jan 2014.
31. Ricardo Gallego Torrome´. On the emergence of quantum mechanics, diffeomorphism invariance and the weak equivalence principle from deterministic Cartan-Randers systems// arXiv:1402.5070v1 [math-ph] 20 Feb 2014.
32. Fotini Markopoulou and Lee Smolin. Quantum Theory from Quantum Gravity// arXiv:gr-qc/0311059v2 14 Jun 2004.

33. Stephen L. Adler. Statistical Dynamics of Global Unitary Invariant Matrix Models as Pre-Quantum Mechanics// arXiv:hep-th/0206120v1 13 Jun 2002.