УДК 51-77: 336.6

UDC 51-77: 336.6

МАТЕМАТИЧЕСКОЕ МОДЕЛИРОВАНИЕ ДЕЯТЕЛЬНОСТИ ФИНАНСОВОЙ ПИРАМИДОЙ. ЧАСТЬ 2. ДИСКРЕТНЫЕ МОДЕЛИ

MATHEMATICAL MODELING OF FINANCIAL PYRAMID SCHEME. PART 2. DISCRETE MODELS

Коваленко Анна Владимировна
к.э.н., доцент кафедры прикладной математики

Уртенов Махамет Хусеевич
д.ф.–м.н., профессор кафедры прикладной математики
Кубанский государственный университет, Краснодар, Россия

Чагаров Радмир Хамидбиевич
аспирант
Карачаево-Черкесский государственный университет, Карачаевск, Россия

Kovalenko Anna Vladimirovna
Cand.Econ.Sci., assistant professor

Urtenov Makhamet Khuseevich
Dr.Sci.Phys.-Math., professor

Kuban State University, Krasnodar, Russia

Chagarov Radmir Hamidbievich
graduate
Karachaevo-Circassian State University, Karachaevsk, Russia

Статья посвящена анализу различных случаев изменения количества клиентов финансовой пирамиды и установлению основных закономерностей деятельности финансовых пирамид на основе дискретных моделей, и является продолжением работы [1], где были выведены формулы, моделирующие суммы, собираемые финансовой пирамидой

This article analyzes the changes in the number of cases of various clients of the pyramid and the establishment of the basic rules of the pyramid schemes based on discrete models. The article is also a continuation of previous work [1], which had formulas to simulate the amount collected by the pyramid scheme

Ключевые слова: МАТЕМАТИЧЕСКОЕ МОДЕЛИРОВАНИЕ, ФИНАНСОВАЯ ПИРАМИДА, МАКСИМАЛЬНО ВОЗМОЖНАЯ ПРИБЫЛЬ, РЕКЛАМНАЯ КАМПАНИЯ, ПИРАМИДАЛЬНАЯ СХЕМА ВЫПЛАТ, ДИСКРЕТНЫЕ МОДЕЛИ

Keywords: MATHEMATICAL MODELING, PYRAMID SCHEME, MAXIMUM POSSIBLE PROFIT, ADVERTISING CAMPAIGN, PYRAMID SCHEME OF PAYMENTS, DISCRETE MODELS

1. Постановка задачи

Обозначим через $N(t)$ – общее число клиентов финансовой пирамиды в текущий момент времени t, N_n – общее число потенциальных клиентов, $a(t)$ – интенсивность рекламной кампании, которую в первом приближении можно считать пропорциональной расходам на рекламу. Пусть время t нормировано таким образом, что целые значения соответствуют календарным месяцам и $t=0$ соответствует началу деятельности финансовой пирамиды. Через $a(0)$ обозначим сумму, потраченную финансовой пирамидой на рекламную компанию до начала деятельности. Через $S(t)$ обозначим сумму на «счетах» финансовой кампании, а через $a(t)$ расходы на рекламу в текущем месяце t. Обозначим $N(0)=N_0$ количество клиентов в начальный момент времени. Казалось бы, естественным положить $N_0=0$, однако в некоторых случаях организаторы финансовых пирамид распространяли свои акции и др. финансовые инструменты среди своих близких, знакомых и «нужных» людей. Наряду с очевидной коррупционной составляющей, такая мера как мы увидим ниже, имеет и экономический смысл, поскольку эти клиенты, получив первые дивиденды, значительно превосходящие среднерыночные, начинают распространять об этом информацию в виде слухов, становясь фактически добровольными рекламными агентами. Поэтому в некоторых случаях нужно считать $N_0>0$, но естественно, что при этом $N_0 \ll N_n$.

Общая формула для собираемой финансовой пирамидой суммы имеет вид [1]:

$$S(t)=S_0+mN(t)-bm\sum_{i=0}^{t-1}N(i)-R(t) \qquad (1)$$

где $R(t)=\sum_{i=1}^{t}a(i)$ общие расходы на рекламу в ходе работы финансовой пирамиды к моменту t.

Если расходы на рекламу каждый месяц одинаковы $a(1)=...=a(t)=const=R_0$, то расходы на рекламу составят $R(t)=R_0t$ и формула (1) примет вид [1]:

$$S(t)=S_0+mN(t)-bm\sum_{i=1}^{t-1}N(i)-R_0t \qquad (2)$$

Предположим, что на рекламу каждый месяц уходит некоторый процент g $(0<g<1)$ от вновь поступающих средств $m(N(t)-N(t-1))$, т.е. $a(t)=gm(N(t)-N(t-1))$, тогда формула (1) запишется в виде [1]:

$$S(t)=S_0+(1-g)mN(t)-bm\sum_{i=1}^{t-1}N(i)-R_0, \qquad (3)$$

где $R_0=-gmN_0$.

2. Модель с постоянным количеством клиентов

Предположим, что в какой-то момент времени t^* число клиентов финансовой пирамиды стабилизируется, т.е. прекращается приток новых клиентов: $N(t)=N^*=const$ при $t>t^*$.

Это может, происходить, например, из-за прекращения рекламной компании $(a(t)=0,\ t>t^*)$ или из-за ее неэффективности, насыщенности рынка финансовых услуг и т.д. Рассмотрим, как изменяется в этом случае сумма $S(t)$ при $t>t^*$. Для этого воспользуемся формулой (1):

$$S(t)=S_0+mN(t)-bm\sum_{i=0}^{t-1}N(i)-R(t)$$

Полагая $t>t^*$, перепишем эту формулу в виде:

$$S(t)=S_0+mN^*-bm\sum_{i=0}^{t^*-1}N(i)-bm\sum_{i=t^*}^{t-1}N(i)-R^*$$

Обозначим

$$S^*=S_0+mN^*-bm\sum_{i=0}^{t^*-1}N(i)-R^*,$$

где учтено, что $a_i(t)=0, t\geq t^*$, $N(t)=N^*=const$ при $t>t^*$,тогда

$$S(t)=S^*-bm\sum_{i=t^*}^{t-1}N^*, t>t^*$$

Воспользуемся тем, что $\sum_{i=t^*}^{t-1}N^*=N^*(t-t^*-1), \quad t>t^*$

Таким образом

$$S(t)=S^*-bmN^*(t-t^*-1), \quad t>t^*, \qquad (4)$$

из которого следует, что сумма $S(t)$ линейно уменьшается с момента t^* и в некоторый момент времени t_b (время банкротства) обращается в ноль, т.е. финансовая пирамида не может больше выполнит свои обязательства и терпит банкротство (разоряется). Из (4) следует, что время банкротства обратно пропорционально процентной ставке:

$$t_b = t^* + 1 + \frac{1}{b}k, \quad \text{где} \quad k = \frac{S^*}{mN^*}.$$

Таким образом, чем больше процентная ставка b, тем скорее наступит банкротство, при прочих равных условиях.

Кроме того, время банкротства прямо пропорционально собранной к моменту t^* сумме S^* и обратно пропорционально к количеству клиентов N^*, которым необходимо платить дивиденды.

Из анализа этой модели следует, что финансовая пирамида либо прекратит свою деятельность в некоторый момент времени близкий к t^*, либо должна обеспечивать за счет рекламы и др. мероприятий приток новых клиентов.

3. Модель с постоянным приростом клиентов

Предположим, что каждый месяц число клиентов растет одинаково, т.е.

$$N(t) - N(t-1) = q = const > 0 \tag{5}$$

$$N(0) = N_0 \tag{6}$$

Задача Коши (5), (6) имеет решение

$$N(t) = N_0 + qt, \tag{7}$$

Положим для простоты вычислений $N(0) = 0$, тогда

$N(t) = qt$ и, соответственно, $\sum_{i=1}^{t-1} N(i) = q\sum_{i=1}^{t-1} i = \frac{t(t-1)}{2}q$.

Воспользовавшись формулой (2), в случае, когда на рекламу выделяется ежемесячно постоянная сумма, получаем:

$$S(t) = S_0 + mqt - \frac{1}{2}bmqt(t-1) - R_0 t$$

Приведение подобных дает формулу:

$$S(t) = -\frac{1}{2}bmqt^2 + mq(1 + \frac{b}{2} - \frac{R_0}{mq})t + S_0 \qquad (8)$$

В случае когда на рекламу каждый месяц выделяется некоторый процент g $(0 < g < 1)$ от вновь поступающих средств mq, т.е. $R_0 = mqg$, то воспользовавшись формулой (3), получаем

$$S(t) = S_0 + (1-g)mN(t) - bm\sum_{i=1}^{t-1} N(i) - R_0$$

$$S(t) = S_0 + (1-g)mqt - \frac{1}{2}bmt(t-1) - R_0 \qquad (9)$$

Приведя подобные получаем:

$$S(t) = -\frac{1}{2}bmqt^2 + mq(1 + \frac{b}{2} - g)t + S_0 - R_0 \qquad (10)$$

В обоих случаях (8) или (10) графиком функции $S(t)$ является парабола ветви, которой направлены вниз (рис.1), и поэтому банкротство финансовой пирамиды неизбежно. Для конкретности далее под функцией $S(t)$ будем понимать функцию (10).

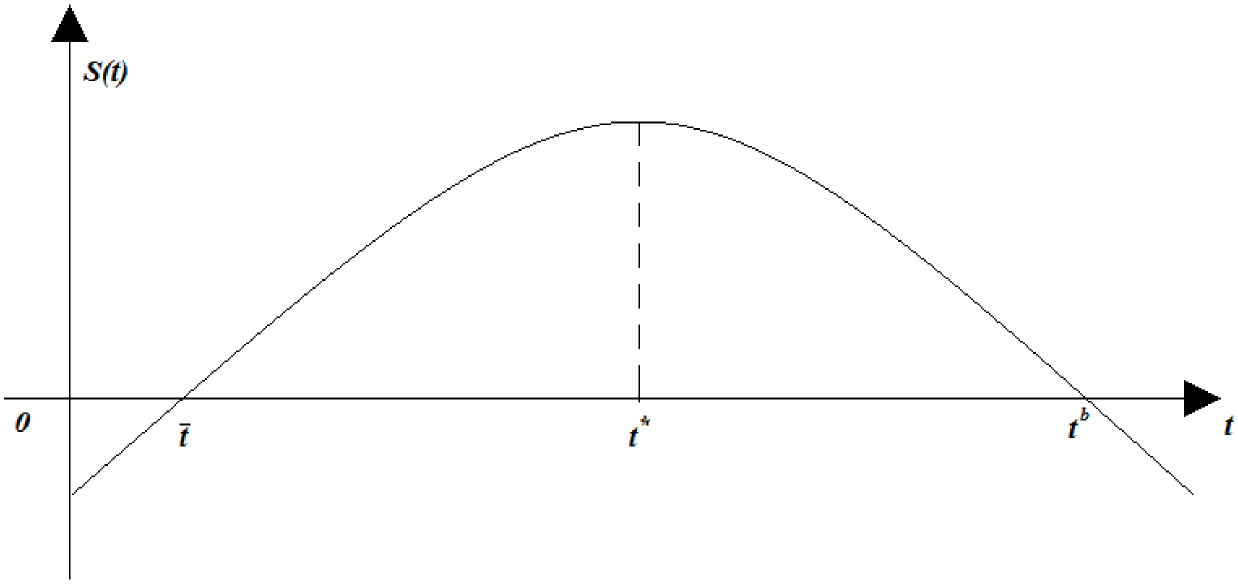

Рисунок 1. График функции $S(t)$. Здесь $\bar{t}$ - начало безубыточной деятельности финансовой пирамиды, t^* точка максимума функции $S(t)$, t_b - времени банкротства

Рассмотрим уравнение $S(t)=0$. Это уравнение имеет два решения. Первое решение $\bar{t}$ соответствует началу безубыточной деятельности, а второе t_b времени банкротства. В частном случае $S_0 - R_0 = 0, g = 0$ получаем $\bar{t}=0$, $t_b = 1+\frac{2}{b}$. В общем случае начало безубыточной деятельности и время банкротства финансовой пирамиды, вычисляются по формулам из (8):

$$\bar{t} = \frac{1}{2}+\frac{1}{b}-\frac{R_0}{bmq}-\sqrt{-\frac{2mqS_0}{b}} \quad \text{и} \quad t_b = \frac{1}{2}+\frac{1}{b}-\frac{R_0}{bmq}+\sqrt{-\frac{2mqS_0}{b}} \qquad (11)$$

или из (10)

$$\bar{t} = \frac{1}{2}+\frac{1}{b}-\frac{g}{b}-\sqrt{\left(\frac{1}{2}+\frac{1}{b}-\frac{g}{b}\right)^2-\frac{2(S_0-R_0)}{bmq}} \quad \text{и}$$

$$t_b = \frac{1}{2}+\frac{1}{b}-\frac{g}{b}-\sqrt{\left(\frac{1}{2}+\frac{1}{b}-\frac{g}{b}\right)^2-\frac{2(S_0-R_0)}{bmq}} \qquad (11')$$

Из формулы (10) следует, что оптимальное для организатора финансовой пирамиды время t^*, когда финансовая пирамида собирает максимальную сумму приходится на вершину параболы

$$S(t) = -\frac{bqm}{2}t^2 + mq(1 + \frac{b}{2} - g)t - a(0).$$

В частном случае $a(0) = 0,\ g = 0$ получаем $t^* = \frac{1}{2},\quad t_b = \frac{1}{2} + \frac{1}{b}.$

В общем случае $t^* = \frac{1}{2} + \frac{1}{b} - \frac{R_0}{mqb}$ или $t^* = \frac{1}{2} + \frac{1}{b} - \frac{g}{b}$

$$S^* = \frac{mq}{2b}\left(1 + \frac{b}{2} - \frac{R_0}{mq}\right)^2 + S_0 \text{ или } S^* = \frac{mq}{2b}\left(1 + \frac{b}{2} - g\right)^2 + S_0 - R_0$$

Заметим, что t^* не зависит от величины вклада, а зависит, от величин процентной ставки по вкладам и процентной ставки направляемой на рекламу и потребление. Чем меньше процентная ставка b, тем больше t^* и тем больше времени до банкротства. Обратим внимание, что и здесь время банкротства обратно пропорционально процентной ставке.

Максимально собираемая финансовой пирамидой сумма S^* линейно растет с увеличением величины вклада. Зависимость S^* от процентной ставки более сложна (рис.2).

Из рис. 2 видно, что S^* принимает минимальное значение при $b = 2$ и кроме того:

$S^*_{min} \approx \frac{1}{b}$, при малом $b > 0$

$S^*_{min} \approx 1 + \frac{b}{4}$, при больших $b > 0$.

Так как $b = 2$, т.е. $b = 200\%$ в месяц является нереальной процентной ставкой, то получаем, собираемая сумма тем больше, чем меньше процентная ставка, т.к. $S^*_{min} \approx \frac{1}{b}$, при малом $b > 0$.

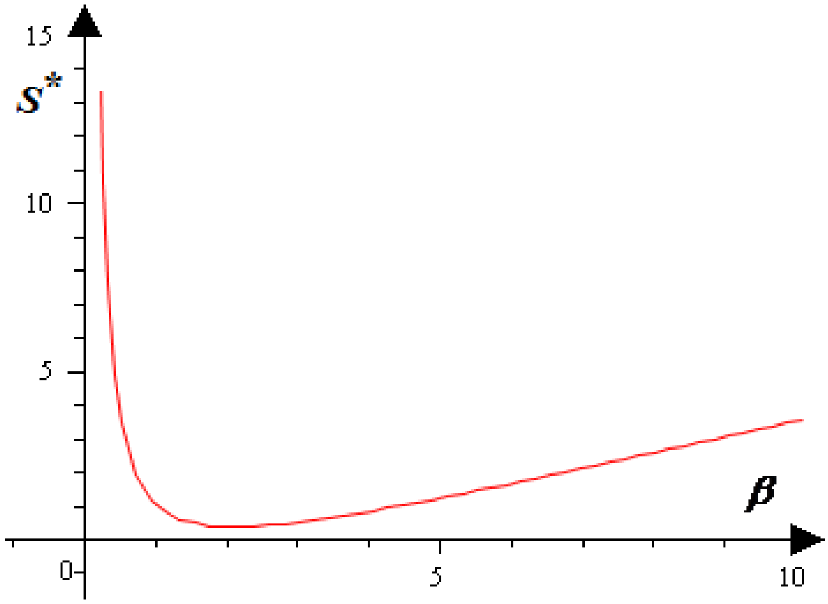

Рисунок 2. Зависимость S^* от процентной ставки b

4.Модель с линейным приростом клиентов

Предположим, что прирост клиентов растет с каждым месяцем линейно, т.е.

$$N(t) - N(t-1) = qt, \quad t > 0 \tag{12}$$

$$N(0) = N_0 \tag{13}$$

Эта задача Коши имеет решение

$$N(t) = N_0 + q\sum_{i=1}^{t} i, \quad t > 0 \quad \text{или}$$

$$N(t) = N_0 + \frac{1}{2}qt(t+1), \quad t > 0$$

Рассмотрим для простоты вычислений случай $N(0) = 0$, тогда

$$N(t) = \frac{1}{2}qt(t+1), \quad t > 0$$

и, соответственно:

$$\sum_{i=1}^{t-1} N(i) = \frac{1}{2} q \sum_{i=1}^{t-1} i(i+1) = \frac{1}{12} qt(t-1)(2t+1),$$

т.к. $\sum_{i=1}^{t-1} i^2 = \frac{1}{6} t(t-1)(2t-1)$ и $\sum_{i=1}^{t-1} i = \frac{1}{2} t(t-1)$

Воспользовавшись формулой (2) в случае, когда на рекламу выделяется ежемесячно постоянная сумма, получаем:

$$S(t) = S_0 + \frac{1}{2} mqt(t+1) - \frac{1}{12} bmqt(t-1)(2t+1) - R_0 t \text{ или}$$

$$S(t) = -\frac{1}{6} bmqt^3 + \frac{1}{2} mq(1 - \frac{1}{6} b)t^2 + \frac{1}{2} mq(1 - \frac{1}{6} b - R_0)t + S_0 \tag{14}$$

Аналогично предыдущему, в случае когда на рекламу каждый месяц выделяется некоторый процент g воспользовавшись формулой (3), получаем:

$$S(t) = S_0 + \frac{1}{2}(1-g)mqt(t+1) - \frac{1}{12} bmqt(t-1)(2t+1) - R_0 \quad \text{или}$$

$$S(t) = -\frac{1}{6} bmqt^3 + \frac{1}{2} mq(1 - g + \frac{1}{6} b)t^2 + \frac{1}{2} mq(1 - g + \frac{1}{6} b)t + S_0 - R_0 \tag{15}$$

Функции (14) и (15) ведут себя одинаково, поэтому ограничимся исследованием, например, функции (14).

5. Модель со сверхлинейным приростом клиентов

Предположим, что прирост клиентов растет с каждым месяцем сверхлинейно, например, со скоростью геометрической прогрессии, т.е.

$$N(t) = qN(t-1), \quad q > 1, \ t > 0 \tag{16}$$

Такой рост числа клиентов пытаются добиться финансовые пирамиды, использующие сетевые технологии. В качестве примера может служить пирамида МММ-2011, в которой попытались построить сетевую пирамиду с $q = 10$ (десятники, сотники и т.д.).

К разностному уравнению (16) нужно добавить начальное условие

$$N(0) = N_0, \tag{17}$$

причем в данном случае обязательно должно быть $N_0 > 0$.

Задача Коши (15), (16) имеет решение

$$N(t) = N_0 q^t, \quad t > 0$$

Положим для простоты вычислений $N(0) = 1$, тогда

$N(t) = q^t, \quad t > 0$ и, соответственно, $\sum_{i=1}^{t-1} N(i) = \sum_{i=1}^{t-1} q^i = \dfrac{q^t - q}{q - 1}$.

В случае $q = 10$ получаем функцию $N(t) = 10^t, \quad t > 0$, которая растет настолько быстро, что уже через 7 месяцев дает 10 млн. клиентов. Заметим, МММ-2011 успела за несколько месяцев привлечь 32 млн. вкладчиков

Воспользовавшись формулой (2) в случае, когда на рекламу выделяется ежемесячно постоянная сумма, получаем:

$$S(t) = S_0 + mN(t) - bm\sum_{i=1}^{t-1} N(i) - R_0 t$$

$$S(t) = S_0 + mq^t - bm\frac{q^t - q}{q - 1} - R_0 t \quad \text{или}$$

$$S(t) = \frac{mq}{q-1}(q^t - (b+1)q^{t-1} + b) - R_0 t + S_0 \tag{18}$$

Рассмотрим теперь, другой частный случай, когда $N(0) = q,$ тогда $N(t) = q^{t+1}, \quad t = 0,1,...$ Дальнейшие рассуждения подобны приведенным выше и здесь опускаются.

6. Модель с приростом клиентов за счет рекламной компании

Из приведенных выше математических моделей финансовых пирамид следует, что ключевое значение имеет прирост количества клиентов финансовой пирамиды. Очевидно, что это происходит за счет активной рекламной компании, на которую тратятся значительные средства.

В связи с этим моделирование рекламной кампании должно быть составной частью математической модели финансовой пирамиды.

Анализ деятельности финансовых пирамид показывает, что нужно учитывать два разных механизма рекламы:

а) Прямую рекламную компанию, которую проводить сама финансовая пирамида;

б) Общеизвестно, что значительная часть новых клиентов финансовой пирамиды приходят под воздействием информации и слухов, передаваемых в основном старыми клиентами, которые выступают как бы дополнительными рекламными агентами финансовой пирамиды.

В связи с этим, при моделировании рекламной кампании финансовые пирамиды будем основываться на следующих предположениях:

1) Скорость изменения со временем числа клиентов пропорционально эффективности рекламной компании и числу потенциальных клиентов, не знающих о существовании финансовой пирамиды.

Эффективность рекламной кампании в первом приближении можно считать пропорциональной расходам на рекламу $a_1(t)$, тогда:

$$N(t) - N(t-1) \sim a_1(t)(N_n - N(t-1)) \qquad (19)$$

2) Будем предполагать, что вклад информации и слухов, передаваемых старыми клиентами в увеличение скорости появления новых

клиентов пропорциональна их количеству, общительности $a_2(t)$ и числу потенциальных клиентов, не знающих о существовании финансовой пирамиды. Таким образом:

$$N(t)-N(t-1)\sim a_2(t)N(t-1)(N_n-N(t-1) \qquad (20)$$

Суммируя (19) и (20) получаем уравнение:

$$N(t)-N(t-1)=(k_1a_1(t)+k_2a_2(t)N(t-1))(N_n-N(t-1)), t>0, \qquad (21)$$

к этому уравнению добавляем начальное условие

$$N(0)=N_0, \qquad (22)$$

и для нахождения текущего числа клиентов финансовой пирамиды получаем задачу Коши (21- 22).

Задачу Коши (21-22) необходимо исследовать численными методами, так как, в общем случае она не имеет точного аналитического решения. Исключение составляет случай $a_1(t)=a_1=const,\ a_2(t)=a_2=const$. В связи с этим исследованию модели финансовой пирамиды с задачей Коши будет посвящена наша следующая статья.

По проведенному выше исследованию можно сделать ряд выводов:

1. Деятельность любой финансовой пирамиды заканчивается банкротством, причиной которой является пирамидальная схема выплаты дивидендов.
2. Постоянный или линейный рост числа клиентов финансовой пирамиды не может покрыть ее расходы, что приводит финансовую пирамиду к банкротству.
3. Если финансовой пирамиде удается обеспечить ажиотажный спрос и, соответственно, сверхлинейный рост числа клиентов, то достаточно быстро исчерпывается потенциальное множество клиентов финансовой пирамиды и закат деятельности финансовой пирамиды начинается с

момента стабилизации числа клиентов, т.е. с момента, когда останавливается приток новых клиентов.

Литература:

1. Коваленко А.В. Математическое моделирование деятельности финансовой пирамидой. Часть 1. Основные понятия / А.В. Коваленко, М.Х. Уртенов, Р.Х. Чагаров // Политематический сетевой электронный научный журнал Кубанского государственного аграрного университета (Научный журнал КубГАУ) [Электронный ресурс]. – Краснодар: КубГАУ, 2012. – №08(82). – Режим доступа: http://ej.kubagro.ru/2012/08/pdf/29.pdf, 0,688 у.п.л.