

УДК 51-77: 336.6

UDC 51-77: 336.6

**МАТЕМАТИЧЕСКОЕ МОДЕЛИРОВАНИЕ  
ДЕЯТЕЛЬНОСТИ ФИНАНСОВОЙ  
ПИРАМИДОЙ. ЧАСТЬ 1. ОСНОВНЫЕ  
ПОНЯТИЯ**

**MATHEMATICAL MODELING OF FINANCIAL  
PYRAMID SCHEME. PART 1. DEFINITIONS**

Коваленко Анна Владимировна  
к.э.н., доцент кафедры прикладной математики

Kovalenko Anna Vladimirovna  
Cand.Econ.Sci., assistant professor

Уртенов Махамет Хусеевич  
д.ф.-м.н., профессор кафедры прикладной  
математики

Urtenov Makhmet Khuseevich  
Dr.Sci.Phys.-Math., professor

*Кубанский государственный университет,  
Краснодар, Россия*

*Kuban State University, Krasnodar, Russia*

Чагаров Радмир Хамидбиевич  
аспирант

Chagarov Radmir Hamidbievich  
graduate

*Карачаево-Черкесский государственный  
университет, Карачаевск, Россия*

*Karachaev-Circassian State University, Karachaevsk,  
Russia*

В статье проанализированы различные подходы к математическому моделированию деятельности финансовых пирамид, такие как, «экономически рациональный субъект», игровой подход и подход С. В. Дубовского. В статье предлагаются модели финансовых пирамид лишенные недостатков рассмотренных подходов, включая зависимость времени существования пирамиды от начисляемой процентной ставки и роста числа клиентов и др. В работе проанализированы также различные варианты ведения рекламной кампании, в том числе учитывается неявная рекламная компания

The article analyzes the various approaches to the mathematical modeling of financial pyramids. It considered “economically rational subject”, game approach and the approach of Dubovsky. In this article, the mathematical models of the unproblematic approaches examined; we also analyzed their characteristics, including the dependence of the lifetime of the pyramid of accrued interest and the number of clients, the maximum possible profit of the founders of the pyramid, etc. This work analyzes the various options of the campaign, including whether the implicit advertising company, which arises from the spread of the financial company clients and rumors about their income

Ключевые слова: МАТЕМАТИЧЕСКОЕ  
МОДЕЛИРОВАНИЕ, ФИНАНСОВАЯ  
ПИРАМИДА, МАКСИМАЛЬНО ВОЗМОЖНАЯ  
ПРИБЫЛЬ, РЕКЛАМНАЯ КАМПАНИЯ,  
ПИРАМИДАЛЬНАЯ СХЕМА

Keywords: MATHEMATICAL MODELING,  
PYRAMID SCHEME, MAXIMUM POSSIBLE  
PROFIT, ADVERTISING CAMPAIGN, PYRAMID  
SCHEME OF PAYMENTS

**Актуальность.** Первые финансовые пирамиды возникли более 300 лет. Как показывает исследование, финансовые пирамиды особенно активно возникают и приобретают масштабное развитие во времена экономических кризисов (Россия 1905г, 90 гг XX века, современный мировой кризис 2008-2011гг) [1]. Феномен МММ-2011, который позволил привлечь по разным оценкам до 35 млн. клиентов показывает, что финансовые пирамиды возникают и в наши дни. В начальный период

деятельности финансовых пирамид, особенно, в условиях сильной инфляции, они оттягивают значительные средства населения, играя некоторую положительную роль в сдерживании темпов инфляции. Однако неизбежные в последующем, крушения крупных финансовых пирамид оставляют обманутыми миллионы человек, и приводят к серьезным и долгосрочным негативным социальным, экономическим и политическим последствиям, усиливая недоверие людей к финансовой, правоохранительной и политической системе государства.

В связи с этим математическое моделирование деятельности финансовых пирамид, определение основных этапов их развития и закономерностей функционирования имеют большое значения для профилактики и борьбы с ними.

Математическому моделированию деятельности финансовых пирамид посвящено много работ [1-6], причем существует несколько подходов к математическому описанию финансовых пирамид.

Первый подход основан на идее существования «экономически рационального субъекта». В работах посвященных данному подходу под финансовой пирамидой авторы понимают изменение цен, простым образом необъясняемое с помощью имеющейся информации и имеющее вид резкого повышения цен с последующим крахом.

Второй подход [1] можно назвать игровым. Основные идеи, положенные в его основу, таковы. Организатор создает финансовую пирамиду, при этом в качестве ее вкладчиков может выступать все экономически активное население страны или его часть. Желанием организатора является привлечение как можно большего их числа, т.к. при этом он максимизирует свою прибыль. В рамках данного подхода организатор и население рассматриваются как участники одной игры Понци с разными (неантагонистическими) интересами. Возможным выбором организатора финансовой пирамиды на каждом шаге является

либо выполнение всех своих обязательств, для которых наступил срок выполнения, и продолжение существования пирамиды, либо отказ от их выполнения (крах финансовой пирамиды). В это же время каждый представитель населения на каждом шаге решает, принимать ли участие в финансовой пирамиде, или нет. Время жизни пирамиды в рассматриваемом подходе зависит от числа ее участников в зависимости от времени, и ее крах заранее предрешен при исчерпании всего населения.

Третий подход предложен С. В. Дубовским [2, 3]. Целью организатора финансовой пирамиды является привлечение как можно большего числа ее участников, например, с помощью рекламной кампании или варьирования цены продажи в зависимости от текущего спроса. В отличие от предыдущего подхода, где крах финансовой пирамиды был обусловлен недостатком притока вкладчиков, здесь крах обусловлен свойствами самой пирамиды: в некоторый момент времени у организатора финансовой пирамиды может оказаться недостаточно средств для выполнения собственных обязательств независимо от абсолютного числа вкладчиков. В этой теории рассмотрен простой случай линейного и квадратичного роста выручки организатора финансовой пирамиды.

Недостаток модели С.В. Дубовского это отсутствие учёта затрат на рекламу и прочих затрат не связанных с погашением обязательств перед вкладчиками. А это, как уже было отмечено ранее, одни из самых важных параметров направленных на повышение числа вкладчиков, без которых финансовая пирамида просто не могла бы существовать, а, следовательно, влекут за собой большие денежные затраты.

В данной работе нами предлагаются математические модели финансовых пирамид лишенные указанных недостатков, проанализированы их основные характеристики, включая зависимость времени существования пирамиды от начисляемой процентной ставки и

роста числа клиентов, максимально возможную прибыль основателей пирамиды, и т.д.

В работе проанализированы также различные варианты ведения рекламной кампании, в том числе учитывается неявная рекламная компания, которая возникает в результате распространения клиентами финансовой компании информации и слухов о своих доходах.

### **1. Определение чистой финансовой пирамиды**

Основной характеристикой финансовой пирамиды является, так называемая, пирамидальная схема выплат дивидендов «старым» клиентам за счет взносов вновь привлекаемых клиентов. Под чистой финансовой пирамидой будем понимать организацию, финансовая деятельность, которой сводится в основном, к пирамидальной схеме привлечения клиентов. В качестве финансового инструмента при этом могут использоваться самые разные ценные бумаги, а также договоры займа, траста, селенга, страхования и т.д. Трудность борьбы с финансовыми пирамидами заключается в том, что практически все финансовые организации в той или иной мере используют пирамидальную схему выплат. В качестве примера можно привести банки, страховые общества, негосударственные пенсионные фонды, ипотечное кредитование и т.д. Важным примером, как показывает, финансовый кризис в Европе, является выпуск необеспеченных государственных облигаций. Ярким примером государственной финансовой пирамиды служит пирамида ГКО в России, которая привела страну к дефолту в 1998 году. Использование пирамидальной схемы привлечения средств приводит организацию к финансовой пирамиде, когда оно становится единственным (в этом случае мы будем говорить о чистой финансовой пирамиде) или доминирующим способом деятельности (в этом случае мы будем говорить о признаках финансовой пирамиды в деятельности финансовой организации).

В последнем случае можно ввести коэффициент пирамидальности за период  $T$  :

$$k_{nup} = \max\left(\frac{D_{nup}}{D_{np} + D_{nup}}, \frac{R_{nup}}{R_{np} + R_{nup}}\right),$$

где  $D_{nup}, D_{np}, R_{nup}, R_{np}$  - соответственно доход, полученный за счет взносов новых клиентов, производственной деятельности, а также расходов на обслуживание «старых» клиентов, и производственные расходы за период  $T$ . Чем ближе  $k_{nup}$  к 1, тем более явственнее в деятельности финансовой организации проявляются черты финансовой пирамиды.

Математическое моделирование деятельности финансовых пирамид, равно как и их дальнейший математический анализ даёт возможность по внешним признакам определить, в какой степени компания является финансовой пирамидой.

## 2. Основные предположения

Неотъемлемая часть деятельности финансовых пирамид - активная рекламная кампания, на которую тратятся значительные средства.

В связи с этим моделирование рекламной кампании должно быть составной частью математической модели финансовой пирамиды.

Это тем более верно, так как от эффективной рекламной кампании зависит количество новых клиентов, а значит и поступление новых средств, из которых выплачиваются проценты и производятся другие расходы.

Ясно, что вначале расходы на рекламу будут превышать поступление средств, поскольку сначала лишь небольшая часть потенциальных клиентов знает о существовании финансовой пирамиды.

С увеличением числа клиентов, поступление новых средств должно уже значительно превышать расходы на рекламу.

Однако, со временем, может наступить такой момент, когда реклама становится неэффективной из-за конкуренции со стороны других финансовых пирамид, финансовых компаний, из-за насыщения рынка финансовых услуг, из-за исчерпания потенциальных клиентов и так далее. В этом случае число клиентов финансовой пирамиды стабилизируется, новые средства перестают поступать, и начинается ее закат.

### **3. Моделирование суммы собираемой финансовой пирамидой**

Обозначим через  $N(t)$  – общее число клиентов финансовой пирамиды в текущий момент времени  $t$ ,  $N_n$  – общее число потенциальных клиентов,  $a(t)$  – интенсивность рекламной кампании, которую в первом приближении можно считать пропорциональной расходам на рекламу.

Рассчитаем сумму, собираемую финансовой пирамидой при следующих предположениях:

**1) имеется один тип вклада с фиксированной суммой  $m$ .** Как показывает анализ деятельности финансовых пирамид, большинство из них акцентировало свою деятельность на использовании какого-то одного финансового инструмента. В некоторых случаях использовались для каждой категории потенциальных клиентов свои финансовые инструменты, причем учет доходов и расходов велся, как правило, по каждому финансовому инструменту отдельно. Поэтому предположение об одном типе вклада не является особенно ограничительным;

**2) на каждый вклад через месяц начисляется  $\beta\%$ .** Обычно в финансовых расчетах базовым периодом является год. Использование месяца в качестве базового периода обусловлено особенностью деятельности финансовых пирамид, поскольку они часто используют именно месячные вклады и, кроме того, во многих случаях срок их деятельности ограничивается несколькими месяцами.

Пусть время  $t$  нормировано таким образом, что целые значения соответствуют календарным месяцам и  $t = 0$  соответствует началу деятельности финансовой пирамиды.

Через  $a(0)$  обозначим сумму, потраченную финансовой пирамидой на рекламную компанию до начала деятельности. Через  $S(t)$  обозначим сумму на «счетах» финансовой кампании, а через  $a(t)$  расходы на рекламу в текущем месяце  $t$ .

После первого месяца сумма  $S(t)$  составит

$$S(1) = S_0 + mN(1) - a(1) - bmN_0$$

(1)

где  $mN(1)$  – денежные поступления от первых клиентов,  $bmN(0)$  выплата дивидендов «старым» клиентам,  $S_0 = mN_0 - a(0)$ .

Во второй месяц имеем сумму

$$S(2) = S(1) + m(N(2) - N(1)) - a(2) - bmN(1)$$

(2)

где  $bmN(1)$  – выплаты по процентам за предыдущий месяц.

Соответственно, в произвольный месяц имеем сумму

$$S(t) = S(t-1) + m(N(t) - N(t-1)) - a(t) - bmN(t-1)$$

(3)

Из известной аналогии между разностными и дифференциальными уравнениями следует, что для каждой дискретной модели соответствует и непрерывная модель. Причем аналитически исследовать непрерывную модель, как правило, проще. Казалось бы, что из этого следует, что достаточно исследовать только непрерывные модели. Однако в данном случае это не так. В-первых, дискретные модели, в которых время принимает значения месяца, точно моделирует деятельность некоторых финансовых пирамид. Во-вторых, результаты расчета непрерывного и дискретного случаев могут существенно отличаться. Поскольку

приращения по времени достаточно большие (месяц), то и результаты могут отличаться на месяцы. Для клиента финансовой пирамиды иногда это очень много. В-третьих, для некоторых читателей дискретные модели более понятны и привычны. Поэтому в дальнейшем мы параллельно излагаем дискретные и непрерывные модели. Так, например, непрерывный аналог формулы (3) имеет вид:

$$\frac{dS}{dt} = m \frac{dN}{dt} - a(t) - bmN(t). \quad (4)$$

#### 4. Вывод общей формулы для собираемой суммы

Формула (3) является рекуррентной, что неудобно для некоторых аналитических исследований. Выведем общую формулу для суммы, используя метод математической индукции.

Подставим (1) в (2) и, приведя подобные, получим

$$S(2) = S_0 + mN(2) - \sum_{i=1}^2 a(i) - bm \sum_{i=0}^{t-1} N(i) \quad (5)$$

Предположим, что

$$S(t) = S_0 + mN(t) - \sum_{i=1}^t a(i) - bm \sum_{i=0}^{t-1} N(i) \quad (6)$$

Докажем, что тогда  $S(t+1) = S_0 + mN(t+1) - \sum_{i=1}^{t+1} a(i) - bm \sum_{i=0}^t N(i)$ .

Положим  $t+1$  и воспользуемся рекуррентной формулой (3), тогда

$$S(t+1) = S(t) + m(N(t+1) - N(t)) - a(t+1) - bmN(t) \quad (7)$$

Подставим (6) в (7) и получим

$$S(t+1) = S_0 + mN(t) - \sum_{i=1}^t a(i) - bm \sum_{i=0}^{t-1} N(i) + \\ + m(N(t+1) - N(t)) - a(t+1) - bmN(t)$$

Приведем подобные, тогда получим формулу

$$S(t+1) = S_0 + mN(t+1) - \sum_{i=1}^{t+1} a(i) - bm \sum_{i=0}^t N(i),$$



которую и требовалось доказать.

Перепишем формулу (6) в удобном для анализа виде

$$S(t) = S_0 + mN(t) - \sum_{i=1}^t a(i) - bm \sum_{i=0}^{t-1} N(i)$$

$$S(t) = S_0 + mN(t) - bm \sum_{i=0}^{t-1} N(i) - R(t) \quad (8)$$

где  $R(t) = \sum_{i=1}^t a(i)$  общие расходы на рекламу в ходе работы финансовой пирамиды к моменту  $t$ .

Если расходы на рекламу каждый месяц одинаковы  $a(1) = \dots = a(t) = \text{const} = R_0$ , то расходы на рекламу составят  $R(t) = R_0 t$ . В качестве примера можно назвать финансовую пирамиду «Хопер-инвест», которая во времена своего «расцвета» расходовала ежемесячно на рекламу по 1 млн. долларов. Формула (8) с учетом высказанного выше предположения, запишется в виде:

$$S(t) = S_0 + mN(t) - bm \sum_{i=1}^{t-1} N(i) - R_0 t \quad (9)$$

Другой, часто используемый финансовыми пирамидами, вариант заключается в использовании какого-то процента от доходов на рекламу. Предположим, что на рекламу каждый месяц уходит некоторый процент  $g$  ( $0 < g < 1$ ) от вновь поступающих средств  $m(N(t) - N(t-1))$ , т.е.  $a(t) = gm(N(t) - N(t-1))$ . Тогда

$$R(t) = \sum_{i=1}^t a(i) = gm \sum_{i=1}^t (N(i) - N(i-1)) = gm(N(t) - N_0)$$

или  $R(t) = R_0 + gmN(t)$ , где  $R_0 = -gmN_0$ .

Таким образом, формула (8) с учетом предположения запишется в виде:

$$S(t) = S_0 + mN(t) - bm \sum_{i=0}^{t-1} N(i) - R(t)$$

$$S(t) = S_0 + mN(t) - bm \sum_{i=1}^{t-1} N(i) - gmN(t) - R_0$$

или

$$S(t) = S_0 + (1 - g)mN(t) - bm \sum_{i=1}^{t-1} N(i) - R_0 \quad (10)$$

Отметим, что расходы финансовой кампании на выплату налогов, административные расходы, собственное потребление и прочие расходы могут быть учтены в процентной ставке  $g$ .

Непрерывный аналог формулы (8) получается интегрированием формулы (4) и имеет вид:

$$S(t) = S_0 - mN_0 + mN(t) - \int_0^t a(t) dt - bm \int_0^t N(t) dt. \quad (11)$$

Соответственно, непрерывный аналог формулы (9) получается из (11), если положить  $a(t) = const = R_0$ , тогда

$$S(t) = S_0 - mN_0 + mN(t) - bm \int_0^t N(t) dt - R_0 t \quad (12)$$

Непрерывный аналог формулы (10) получается, если положить  $a(t) = gm \frac{dN}{dt}$ , тогда из (11) следует, что:

$$S(t) = S_0 - (1 - g)mN_0 + (1 - g)mN(t) - bm \int_0^t N(t) dt \quad (13)$$

Для того чтобы проанализировать функции  $S(t)$  и установить основные закономерности деятельности финансовых пирамид необходимо теперь определить динамику изменения количества клиентов  $N(t)$  финансовой пирамиды.

**Выводы.** В данной статье:

– проанализированы и определены основные понятия, в том числе введено определение чистой финансовой пирамиды. Определен коэффициент пирамидальности за период  $T$  для финансовой организации, которая не является чистой финансовой пирамидой;

– обоснована рекуррентная формула для расчета собираемой финансовой пирамидой суммы денег, из которой выведена общая формула, связывающая собираемую сумму с числом клиентов и расходами на рекламу. Рассмотрены два разных варианта финансирования рекламной компании.

Следующая наша работа посвящена анализу различных сценариев изменения количества клиентов финансовой пирамиды (включая дискретный, непрерывный и стохастический случаи) и установлению основных закономерностей деятельности финансовых пирамид на основе математического анализа моделей финансовой пирамиды.

**Литература:**

1. Белянин А.В., Исупова О. Г. Финансовые пирамиды в переходные экономике с точки зрения теории игр // Российская программа экономических исследований. Научный доклад № 200010 ([www.eerc.ru](http://www.eerc.ru), <http://195.28.33.75/>).
2. Дубовский С. В. Прогнозирование инфляции и обменного курса рубля в российской нестационарной экономике. . М.: Издательство УРСС. . 2001.
3. Дубовский С. В. Обменный курс рубля как результат денежной эмиссии, внешней торговли и блуждающих финансовых потоков // Экономика и математические методы, 2002, том 38, № 2, с. 84-96.
4. Аникин А.В. История финансовых потрясений М. 2000
5. Маккей Ч. Наиболее распространенные заблуждения и безумства толпы. М. 1998
6. Исследовательская группа ЦИРКОН: финансовая активность населения России в 1995-2001 гг.