УДК 519.711.3

О КОРРЕКТНОСТИ КРАЕВЫХ ЗАДАЧ, ОПИСЫВАЮЩИХ РАССЕЯНИЕ ПРИМЕСИ В ТУРБУЛЕНТНОЙ АТМОСФЕРЕ

Семенчин Евгений Андреевич
д.ф.-м.н., профессор
Кубанский государственный университет, Краснодар, Россия

Лайпанова Зульфа Мисаровна
соискатель, ст. преподаватель
Карачаево-Черкесский государственный Университет им. У. Дж. Алиева

В статье дан обзор результатов разрешимости начально-граничной задачи, описывающей рассеяние примеси в турбулентной атмосфере, корректности математических моделей, описывающих рассеяние примеси в атмосфере и представленной задачей Коши, первой и третьей краевой задачами

Ключевые слова: КОРРЕКТНОСТЬ, НАЧАЛЬНО-КРАЕВЫЕ ЗАДАЧИ, ЗАДАЧА КОШИ, УСТОЙЧИВОСТЬ РЕШЕНИЯ, ЕДИНСТВЕННОСТЬ РЕШЕНИЯ, ФУНДАМЕНТАЛЬНОЕ РЕШЕНИЕ УРАВНЕНИЯ, ДИФФУЗИЯ

UDC 519.11.3

ABOUT A CORRECTNESS OF THE PROBLEM OF DESCRIBING DISPERSION OF AN IMPURITY IN TURBULENT ATMOSPHERE

Semenchin Evgeniy Andreevich
Dr.Sci.Phys.-Math., professor
Kubansky State University, Krasnodar, Russia

Laipanova Zulfa Misarovna
competitor, senior lecturer
Karachaevo-Circassian State University of U. D. Aliev

The review of resolvability of the beginning-boundary problem describing dispersion of an impurity in turbulent atmosphere, correctness of mathematical models, describing impurity dispersion in atmosphere and Koshi's problem, the first right problem, the third right problem is given in the article

Keywords: CORRECTNESS, BEGINNING-EDGED PROBLEMS, KOSHI'S PROBLEM, SOLUTION STABILITY, SINGULARITY OF SOLUTION, FUNDAMENTAL DECISION OF EQUATION, DIFFUSION

1. Разрешимость задач, описывающих рассеяние примеси в атмосфере

В теории и практике современных исследований рассеяния примеси в турбулентной атмосфере используются две начально-граничные задачи, которые в самой общей постановке имеют вид [3]:

$$\frac{\partial q}{\partial t} + \sum_{i=1}^{3} u_i \frac{\partial q}{\partial x_i} + aq = \sum_{i=1}^{3}\sum_{j=1}^{3} \frac{\partial}{\partial x_i} K_{ij} \frac{\partial q}{\partial x_j} + f\,, \tag{1}$$

$$K_{ij} = K_{ji}, \quad i, j = 1,2,3,$$

$$\sum_{i=1}^{3} \frac{\partial u_i}{\partial x_i} = 0\,, \tag{2}$$

$$t \in [0,T], \quad 0 < T < +\infty, \quad (x_1, x_2, x_3) \in G\,,$$

$$q(t, x_1, x_2, x_3) \ge 0, \quad t \in [0,T), \quad (x_1, x_2, x_3) \in G\,, \tag{3}$$

$$q(0, x_1, x_2, x_3) = j\,(x_1, x_2, x_3)\,, \tag{4}$$

$$q(t, x_1, x_2, x_3)\,\big|_{\partial G} = y\,(x_1, x_2, x_3)\,; \tag{5}$$

или (1)-(4), где вместо (5) рассматривается граница

$$\left.\left\{\frac{\partial q}{\partial v} + bq\right\}\right|_{\partial G_0} = V\,. \tag{6}$$

Здесь $q(t, x_1, x_2, x_3)$ - функция, значения которой в каждый момент времени $t \in [0, T)$ совпадает со средним значением концентрации примеси в связной области G, $\partial G = \partial G_0 \cup \partial G_1 \cup \partial G_2$, ∂G_0 - нижняя, ∂G_1 - боковая, ∂G_2 - верхняя части границы ∂G, $\overline{G} = G \cup \partial G$; $u_i = u_i(t, x_1, x_2, x_3)$, $i = 1,2,3$, - функции, значения которых совпадают со значениями средней скорости ветра в момент t в точке (x_1, x_2, x_3) соответственно вдоль осей Ox_1, Ox_2, Ox_3 (рассматривается декартова прямоугольная система координат); $a = a\,(t, x_1, x_2, x_3)$ - функция, характеризующая убыль примеси в момент t в точке (x_1, x_2, x_3) за счет либо ее радиоактивного распада, либо за счет вступления в химические реакции с веществами, находящимися в атмосфере, и компонентами атмосферного воздуха; $K_{ij} = K_{ij}\,(t, x_1, x_2, x_3)$, $i, j = 1,2,3,$ - элементы матрицы коэффициентов турбулентной диффузии; $f = f\,(t, x_1, x_2, x_3)$ - функция, моделирующая источник выбросов вещества в атмосферу (функция источника); $j = j\,(x_1, x_2, x_3)$ - функция, значения которой в точке $(x_1, x_2, x_3) \in G$ в момент времени $t_0 = 0$ совпадает со значениями концентрации примеси в атмосфере (функция, описывающая фоновую концентрацию); $\frac{\partial q}{\partial v}$ - производная по внутренней нормали ∂G_0:

$$\frac{\partial q\,(t, x)}{\partial v\,(t, x)} = \lim_{\substack{y \to x \\ y \in K}} \sum_{j=1}^{3} K_{ij}\,(t, x)\cos(N, x)\,\frac{\partial q\,(t, x)}{\partial y_i}\,, \tag{7}$$

$$x = x(x_1, x_2, x_3)\,, \quad y = y(x_1, x_2, x_3)\,,$$

$N-$ внутренняя нормаль к ∂G_0 в точке $x \in \partial G_0$, $K-$ конечный, замкнутый конус с вершиной $x \in \partial G_0$, который содержится в $G+\{x\}$, $b(t,x_1,x_2,x_3)$, - функция, характеризующая гравитационное осаждение примеси на ∂G_0, $V(t,x_1,x_2,x_3)$ - скорость сухого осаждения примеси на ∂G_0, $t \in [0,T)$, $(x_1,x_2,x_3) \in G_0$.

Функция источника примеси f задается в виде [3, 4]:

$$f(t,x_1,x_2,x_3) = Q(t,x_1,x_2,x_3)d(t,x_1,x_2,x_3), \quad (8)$$

где $Q(t,x)$ - мощность источника примеси (масса примеси, выбрасываемой в области G в момент t в точке $x \in \overline{G}$), $d(t,x)$ - дельта функция Дирака. При этом, если источник является (t_0 - момент начала действия источника):

1) точечным, сосредоточенным в точке $x_0 = (x_1^0, x_2^0, x_3^0) \in \overline{G}$,

1.1) мгновенного действия, то $Q(t,x) = Q = const$,

$$f(t,x_1,x_2,x_3) = Qd(t)d(x_1 - x_1^0)d(x_2 - x_2^0)d(x_3 - x_3^0),$$

1.2) непрерывного действия, то

$$Q(t,x) = Q(t), \quad f(t,x_1,x_2,x_3) = Q(t)d(x_1 - x_1^0)d(x_2 - x_2^0)d(x_3 - x_3^0);$$

2) линейным, сосредоточенным на интервале $[a,b]$ числовой прямой, параллельной оси Ox_2 и пересекающей ось Ox_3 в точке $(0,0,x_3^0)$

2.1) мгновенного действия, то

$$Q(t,x_1,x_2,x_3) = \begin{cases} Q(x_2), & x_2 \in [a,b], \\ 0, & x_2 \notin [a,b], \end{cases}$$

$$f(t,x_1,x_2,x_3) = Q(x_2)d(t)d(x_1 - x_1^0)d(x_3 - x_3^0);$$

2.2) непрерывного действия, то

$$Q(t,x_1,x_2,x_3) = \begin{cases} Q(t,x_2), & t \in [0,T], \quad x_2 \in [a,b], \\ 0, & x_2 \notin [a,b], \end{cases}$$

$$f(t,x_1,x_2,x_3) = Q(t,x_2)d(x_1 - x_1^0)d(x_3 - x_3^0);$$

3) площадным, сосредоточенным на площадке S, лежащей на плоскости x_1Ox_2, и пересекающей ось Ox_3 в точке $(0,0,x_3^0)$

3.1) мгновенного действия, то

$$Q(t,x_1,x_2,x_3)=\begin{cases}Q(x_1,x_2), & x_1,x_2\in S,\\ 0, & x_1,x_2\notin S,\end{cases}$$

$$f(t,x_1,x_2,x_3)=Q(x_1,x_2)d(t)d(x_3-x_3^0);$$

3.2) непрерывного действия, то

$$Q(t,x_1,x_2,x_3)=\begin{cases}Q(t,x_1,x_2), & t\in[0,T],\quad x_1,x_2\in S,\\ 0, & x_1,x_2\notin S,\end{cases}$$

$$f(t,x_1,x_2,x_3)=Q(t,x_1,x_2)d(t)d(x_3-x_3^0);$$

4) поверхностным, сосредоточенным на поверхности $S_П$ тела $П$

4.1) мгновенного действия, то

$$Q(t,x_1,x_2,x_3)=\begin{cases}Q(x_1,x_2,x_3), & (x_1,x_2,x_2)\in S_П,\\ 0, & (x_1,x_2,x_2)\notin S_П,\end{cases}$$

$$f(t,x_1,x_2,x_3)=Q(x_1,x_2,x_3)d(t);$$

4.2) непрерывного действия, то

$$Q(t,x_1,x_2,x_3)=\begin{cases}Q(t,x_1,x_2,x_3), & t\in[0,T],\ (x_1,x_2,x_2)\in S_П,\\ 0, & (x_1,x_2,x_2)\notin S_П,\end{cases}$$

$$f(t,x_1,x_2,x_3)=Q(x_1,x_2,x_3).$$

Уравнение (1) можно переписать в эквивалентном виде:

$$\frac{\partial q}{\partial t}+\sum_{i=1}^{3}h_i\frac{\partial q}{\partial x_i}+aq=\sum_{i=1}^{3}\sum_{j=1}^{3}K_{ij}\frac{\partial^2 q}{\partial x_i\partial x_j}+f, \qquad (9)$$

$$h_i=u_i-\sum_{i=1}^{3}\frac{\partial K_{ij}}{\partial x_j},\quad i=1,2,3. \qquad (10)$$

Следует заметить, что уравнение (9) (а значит и (1)) совпадает с уравнением

$$Lu = f_{\Phi} \ , \qquad (11)$$

$$Lu = \sum_{i=1}^{n}\sum_{j=1}^{n} a_{ij} \frac{\partial^2 u}{\partial x_i \partial x_j} + \sum_{i=1}^{n} b_i \frac{\partial u}{\partial x_i} + cu - \frac{\partial u}{\partial t} \, , \qquad (12)$$

из [6] при n=3 с точностью до знака у f и f_{Φ}: f и f_{Φ} имеют противоположные знаки (см. (7.1) из гл.1, (3.2) из гл.2, (2.12) из гл. 3, (1.1), (1.3) из гл. 5 [6]). Этот факт будет учитываться в приводимых ниже результатах исследования.

Уравнению (1) поставим в соответствие уравнение

$$\frac{\partial q}{\partial t} + \sum_{i=1}^{3} u_i \frac{\partial q}{\partial x_i} + aq = \sum_{i=1}^{3}\sum_{j=1}^{3} \frac{\partial}{\partial x_i} K_{ij} \frac{\partial q}{\partial x_j} + Q \, , \qquad (13)$$

уравнению (9) – уравнение

$$\frac{\partial q}{\partial t} + \sum_{i=1}^{3} h_i \frac{\partial q}{\partial x_i} + aq = \sum_{i=1}^{3}\sum_{j=1}^{3} K_{ij} \frac{\partial^2 q}{\partial x_i \partial x_j} + Q \, , \qquad (14)$$

отличающиеся соответственно от (1) и (9) лишь видом функции f: вместо f задаваемой выражением (8), здесь рассматривается мощность источника примеси Q.

В данном параграфе исследуем следующую задачу: найти (указать) условия, при выполнении которых задачи (1)-(5). (1)-(4), (6) имеют единственное решение (под решением каждой из этих задач будем понимать обобщенное решение в смысле [2]).

Несмотря на очевидную необходимость проведения таких исследований (решению аналитическими и численными методами указанных начально-граничных задач посвящено значительное число работ, в которых изначально явно или неявно допускается, что решение рассматриваемой задачи существует и единственно), подобных исследований в этом направлении до настоящего времени не проводилось. Как правило, авторы публикаций, посвященных различным проблемам математического моделирования рассеяния примеси в атмосфере либо вообще не затрагивают этот вопрос (о существовании и единственности решения), либо без должного на то основания ссылаются на классические работы [2], [6]. Ниже можно будет убедиться: достаточно ясное и четкое освещение данного вопроса не является тривиальным и требует скрупулезного анализа результатов из [2], [6]. Исключение составляет монография [3], однако в этой работе найдены лишь достаточные условия единственности решения задач типа (9) - (5), (1) (9) - (4), (6). Вопрос о существовании их решения в [3] не затрагивался.

Далее всюду будем использовать обозначения из [2], [6].

Теорема 1. Пусть коэффициенты u_i, K_{ij}, a, $i, j = 1,2,3$, принадлежат классу $H^{b,\frac{b}{2}}(\overline{D}_4^T)$ и ограничены на $\overline{D}_4^T$, кроме того u_i, K_{ij} непрерывно дифференцируемы по x_i, $i, j = 1,2,3$ в $\overline{D}_4^T$, $Q \geq 0$, $j \geq 0$, Q, j ограничены, Q удовлетворяет условию Гёльдера с показателем b, j непрерывна в $\overline{D}_4^T$, ∂G удовлетворяет условиям Ляпунова. Тогда задача (1) – (5) при $y = 0$ имеет единственное решение, совпадающее с решением задачи (13), (2) − (5).

Доказательство.

◄Так как u_i, K_{ij}, $i, j = 1,2,3$ непрерывно дифференцируемы по x_i в $\overline{D}_4^T$, то уравнение (1) эквивалентно уравнению (9), уравнение (13) -уравнению (14).

Рассмотрим задачу (13), (2) – (5), которая эквивалентна задаче (14), (2)- (5). При выполнении условий данной теоремы, очевидно, выполняются условия теоремы 16.2 из гл. 4 § 16 [2], а значит, решение задачи (14) (13), (2), (4), (5) существует, теоремы 5.2 из гл. 4 § 5 [2], а значит решение задачи (14) (13), (2), (4), (5) единственно и оно представимо в виде:

$$q(t, x_1, x_2, x_3) = \int_0^t dt \iiint_G q_0(t, x_1, x_2, x_3; t, y_1, y_2, y_3) Q dy_1 dy_2 dy_3 +$$

$$+\iiint\limits_G q_0(t,x_1,x_2,x_3;t\,,y_1,y_2,y_3)j\,(y_1,y_2,y_3)dy_1dy_2dy_3 \qquad (15)$$

(см. соотношение (16.17) из гл. 4 [2]),

где $q_0(t,x_1,x_2,x_3;t\,,y_1,y_2,y_3)$ - функция Грина для задачи (14) (13), (2), (4), (5) в области $\overline{D}_4^T$, т.е. q_0 удовлетворяет уравнению:

$$\frac{\partial q_0}{\partial t}+\sum_{i=1}^{3}h_i\frac{\partial q_0}{\partial x_i}+aq_0=\sum_{i=1}^{n}\sum_{j=1}^{n}K_{ij}\frac{\partial^2 q_0}{\partial x_i\partial x_j}+d\,(t-t\,)d\,(x_1-y_1)d\,(x_2-y_2)d\,(x_3-y_3)\,, \qquad (16)$$

$$\Big(\frac{\partial q_0}{\partial t}+\sum_{i=1}^{3}u_i\frac{\partial q_0}{\partial x_i}+aq_0=\sum_{i=1}^{n}\sum_{j=1}^{n}\frac{\partial}{\partial x_i}K_{ij}\frac{\partial q_0}{\partial x_j}+d\,(t-t\,)d\,(x_1-y_1)d\,(x_2-y_2)d\,(x_3-y_3)\Big) \qquad (17)$$

и условиями:

$$q_0(t,x_1,x_2,x_3;t\,,y_1,y_2,y_3)=0\,, \qquad (18)$$

$$q_0(t,x_1,x_2,x_3;t\,,y_1,y_2,y_3)\big|_{(x_1,x_2,x_3)\in\partial G}=0\,. \qquad (19)$$

Кроме того, в условиях данной теоремы выполняются условия теоремы 2.1 и следствия 2.1 из гл. 1 § 2 [2].

А тогда

$$q(t,x_1,x_2,x_3)\geq 0\,,\ (t,x_1,x_2,x_3)\in D_4^T\,. \qquad (20)$$

Из данных рассуждений, (20) и условий $Q\geq 0$, $j\ \geq 0$ следует, что если выполнены условия данной теоремы, то решение задачи (14) ((13)), (2)-(5) существует и единственно.

Учитывая равенство (8) и используя свойства d - функции Дирака [2], соотношение (15) можно переписать в эквивалентном виде:

$$q(t,x_1,x_2,x_3)=\int_0^t dt\iiint\limits_G q_0(t,x_1,x_2,x_3;t\,,y_1,y_2,y_3)\,fdy_1dy_2dy_3+$$

$$+\iiint\limits_G q_0(t,x_1,x_2,x_3;t\,,y_1,y_2,y_3)j\,(y_1,y_2,y_3)dy_1dy_2dy_3\,. \qquad (21)$$

Снова воспользовавшись свойствами d - функции, непосредственным подсчетом можно убедиться, что функция (21) удовлетворяет уравнению (9), а, следовательно, и уравнению (1). Учитывая, что $q_0(t,x_1,x_2,x_3;t\,,y_1,y_2,y_3)$ является функцией Грина для задачи

(13), (2)-(5) (т.е. решением задачи (17) − (19)), заключаем, что функция (21) удовлетворяет условиям (3), (4), (5). Значит, решение (1) − (5) существует и единственно. ►

Теорема 2. Пусть выполнены все условия теоремы 1. Тогда задача (1) − (5) при $f = 0$, $j = 0$ имеет единственное решение.

Доказательство.

◄ Если выполнены условия данной теоремы, то: 1) выполнены все условия теоремы 16.1 из гл. 4 § 16 [2], а значит, решение задачи (9), (2), (4), (5) при $f = 0$, $j = 0$ существует; 2) выполнены все условия теоремы 5.2 из гл. 4 § 5 [2], а значит, решение задачи (9), (2), (4), (5) при $f = 0$, $j = 0$ единственно; 3) выполнены все условия теоремы 2.1 из гл. 1 § 2 [2], а значит, согласно следствию 2.1 из этой теоремы, решение задачи (9), (2), (4), (5) при $f = 0$, $j = 0$ неотрицательно, т.е. выполняется условие (3).

Уравнение (9) эквивалентно уравнению (1). А тогда, согласно 1) - 3), решение задачи (1) - (5) при $f = 0$, $j = 0$ существует и единственно. ►

Теорема 3. Пусть выполнены все условия теоремы 1. Тогда (1) − (5) имеет единственное решение, совпадающее с решением (13), (2) − (5).

Доказательство.

◄Все условия теоремы 3 те же, что и условия теоремы 1.2. Обозначим через $q_1(t, x_1, x_2, x_3)$ решение задачи (1) − (5) при $y = 0$, через $q_2(t, x_1, x_2, x_3)$ - решение этой задачи при $f = 0$, $j = 0$. Непосредственным подсчетом легко убедиться, что $q\ (t, x_1, x_2, x_3) = q_1(t, x_1, x_2, x_3) + q_2(t, x_1, x_2, x_3)$ является решением (1) - (5). Так как $q_1(t, x_1, x_2, x_3)$, согласно теореме 1, - единственное решение задачи (1) - (5) при $y = 0$, согласно теореме 2, - единственное решение задачи (1) − (5) при $f = 0$, $j = 0$, то $q(t, x_1, x_2, x_3)$, очевидно, будет единственным решением задачи (1) − (5). ►

Перейдем к анализу задачи (1) - (4), (6).

Рассмотрим оператор

$Lq = \sum_{i=1}^{3}\sum_{j=1}^{3} k_{iq}\frac{\partial^2 q}{\partial x_i \partial x_j} - \sum_{i=1}^{3} h_i \frac{\partial q}{\partial x_i} - lq - \frac{\partial q}{\partial t}$, определенный в $\overline{D}_4^T$, где h_i имеет вид (10). Будем предполагать, что L удовлетворяет следующим условиям.

а) L - параболический оператор в $\overline{D}_4^T$, т. е. при всех $(t,x) \in \overline{D}_4^T$ и любого вещественного вектора $x = (x_1, x_2, x_3) \neq (0,0,0)$ выполняется условие

$$\sum_{i=1}^{3}\sum_{j=1}^{3} K_{ij}(t,x) x_i x_j > 0 .$$

в) Коэффициенты L непрерывны $\overline{D}_4^T$ и для всех $(t,x) \in \overline{D}_4^T$, $(t^0, x^0) \in \overline{D}_4^T$ и некоторого $b = const,\quad 0 < b < 1$, выполнены условия:

$$\left|K_{ij}(t,x) - K_{ij}(t^0,x^0)\right| \leq A\left(\left|x - x^0\right|^b + \left|t - t^0\right|^{\frac{b}{2}}\right),$$

$$\left|h_i(t,x) - h_i(t,x^0)\right| \leq A\left|x - x^0\right|^b ,$$

$$\left|a(t,x) - a(t,x^0)\right| \leq A\left|x - x^0\right|^b ,$$

$$i, j = 1,2,3, \quad A = const > 0 .$$

Теорема 4. Пусть выполнены условия а), b), u_i, K_{ij} непрерывно дифференцируемы по x_i, $i = 1,2,3$, в D_4^T, граница $\partial G \in C^{1+a}$, Q непрерывна по Гёльдеру по x с показателем g равномерно в $\overline{D}_4^T$, j непрерывна в $\overline{G}$ и равна нулю в некоторой d - окрестности границы ∂G, b, v непрерывны на $\partial G_0 \times [0,T]$. Тогда решение задачи (1) - (4), (6) существует и единственно.

Доказательство.

◄ По условию u_i, K_{ij}, $i = 1,2,3$, непрерывно дифференцируемы по x_i в D_4^T. Поэтому уравнение (1) эквивалентно уравнению (9), уравнение (13) – уравнению (14).

Аналогично тому, как мы это делали при доказательстве теоремы 1, рассмотрим задачу (13), (2) – (4), (6), эквивалентную задаче (14), (2) – (4), (6).

Если выполнены условия данной теоремы, то, очевидно, выполняются условия теоремы 2 из гл. 5 § 3 [6] (случай n=3). Откуда следует, что решение q задачи (14) ((13)), (2), (4), (6) существует, единственно и представимо в виде:

$$q(t,x_1,x_2,x_3)=\int_0^t dt\iiint_{\partial G}\Gamma(t,x_1,x_2,x_3;t,z,h,q)r(t,z,h,q)dS+$$
$$+\iiint_{G}\Gamma(t,x_1,x_2,x_3;t,z,h,q)j(z,h,q)dzdhdq+ \qquad (22)$$
$$+\int_0^t dt\iiint_{G}\Gamma(t,x_1,x_2,x_3;t,z,h,q)Q(t,z,h,q)dzdhdq\ ,$$

где $r(t,z,h,q)-$ непрерывная на $\partial G\times[0,T]$ функция, являющаяся решением интегрального уравнения (3.8), которое представимо в виде (3.10) из гл. 5 § 3 [6], dS - элемент поверхности ∂G, Г – фундаментальное решение уравнения $Lq=0$,

$$L(.)=\frac{\partial(.)}{\partial t}+\sum_{i=1}^{3}h_i\frac{\partial(.)}{\partial x_i}+a(.)-\sum_{i=1}^{n}\sum_{j=1}^{n}K_{ij}\frac{\partial^2(.)}{\partial x_i\partial x_j}=0 \qquad (23)$$

$$\left(\ L(.)=\frac{\partial(.)}{\partial t}+\sum_{i=1}^{3}u_i\frac{\partial(.)}{\partial x_i}+a(.)-\sum_{i=1}^{n}\sum_{j=1}^{n}\frac{\partial}{\partial x_i}K_{ij}\frac{\partial(.)}{\partial x_j}=0\right). \qquad (24)$$

Обозначим в (7) (а значит и в (6))

$$b_i(t,x)=\sum_{j=1}^{3}K_{ij}(t,x)\cos(N,x)\,,\qquad i=1,2,3.$$

В условиях нашей теоремы выполняются (для случая n=3) все условия теоремы 2.2 из гл. 1 § 2 [2] (принцип максимума). А тогда, согласно этой теореме, $q(t,x)$ удовлетворяет неравенству

$$q(t_1,x)\ge\sup_{l>a_0}\min\left\{0,\ \min_{\partial D_4^{t_1}}\frac{ve^{l(t_1-t_0)}}{|b|};\ e^{lt_1}\min_G u(x,0);\ \frac{1}{l-a_0}\min(Qe^{l(t_1-t_0)})\right\}, \qquad (25)$$

$$|b|=\sqrt{b_1^2+b_2^2+b_3^2}\ ,$$

$$a_0=\max_{D_4^{t_1}}(-\|K(t,x)\|)\,,$$

$$x=(x_1,x_2,x_3)\,,\quad t_1\ge t_0\ge 0\,.$$

Рассмотрим выражение

$$\bar{q}(t,x_1,x_2,x_3)=\int_0^t dt\iiint_{\partial G}\Gamma(t,x_1,x_2,x_3;t,z,h,q)r(t,z,h,q)dS+$$

$$+\iiint_G \Gamma(t,x_1,x_2,x_3;t,z,h,q)j(z,h,q)dzdhdq+ \qquad (26)$$

$$+\int_0^t dt\iiint_G \Gamma(t,x_1,x_2,x_3;t,z,h,q)f(t,z,h,q)dzdhdq\ ,$$

полученное из (22) путем замены в последнем слагаемом (22) Q на f. Из (8) и свойств d - функции Дирака следует, что (26) эквивалентно в $\bar{D}_4^T$ (22), т.е.

$$\bar{q}(t,x_1,x_2,x_3)=q(t,x_1,x_2,x_3),\ (t,x_1,x_2,x_3)\in D_4^T\ . \qquad (27)$$

Из (27) вытекает, что $\bar{q}(t,x_1,x_2,x_3)$ удовлетворяет условиям (3), (4), (6), так как этим условиям в D_4^T удовлетворяет $q(t,x_1,x_2,x_3)$.

Подставим формально (26) в (1), т.е. вычислим $L\bar{q}(t,x_1,x_2,x_3)$, $(t,x_1,x_2,x_3)\in D_4^T$, $(x_1,x_2,x_3)\notin\partial G$, где $L(.)$ имеет вид (24).

Согласно (26), (24)

$$L\bar{q}(t,x_1,x_2,x_3)=L\int_0^t dt\iiint_{\partial G}\Gamma(t,x_1,x_2,x_3;t,z,h,q)r(t,z,h,q)dS+$$

$$+L\iiint_G \Gamma(t,x_1,x_2,x_3;t,z,h,q)j(z,h,q)dzdhdq+ \qquad (28)$$

$$+L\int_0^t dt\iiint_G \Gamma(t,x_1,x_2,x_3;t,z,h,q)f(t,z,h,q)dzdhdq\ .$$

Вычислим выражение в правой части (28), упростив для этого каждое слагаемое:

$$L\int_0^t dt\iiint_{\partial G}\Gamma(t,x_1,x_2,x_3;t,z,h,q)r(t,z,h,q)dS=$$

$$=\iiint_{\partial G}\Gamma(t,x_1,x_2,x_3;t,z,h,q)r(t,z,h,q)dS+ \qquad (29)$$

$$+\int_0^t dt\iiint_{\partial G}\left[L\Gamma(t,x_1,x_2,x_3;t,z,h,q)\right]r(t,z,h,q)dS\equiv 0\,,$$

так как по условию $\Gamma(t, x_1, x_2, x_3; t, z, h, q)$ - фундаментальное решение уравнения $L\bar{q} = 0$, а согласно определения Г

$\Gamma(t, x_1, x_2, x_3; t, z, h, q) \equiv 0$, при $(x_1, x_2, x_3) \notin \partial G$, $(z, h, q) \in \partial G$, и $L\Gamma(t, x_1, x_2, x_3; t, z, h, q) = 0$. (30)

$$L\iiint_G \Gamma(t, x_1, x_2, x_3; t, z, h, q) j(t, z, h, q) dz dh dq =$$

$$= \iiint_G [L\Gamma(t, x_1, x_2, x_3; t, z, h, q)] j(t, z, h, q) dz dh dq = 0, \qquad (31)$$

$$L\int_0^t dt \iiint_G \Gamma(t, x_1, x_2, x_3; t, z, h, q) f(t, z, h, q) dz dh dq =$$

$$= \iiint_G \Gamma(t, x_1, x_2, x_3; t, z, h, q) f(t, z, h, q) dz dh dq + \qquad (32)$$

$$+ \int_0^t dt \iiint_G [L\Gamma(t, x_1, x_2, x_3; t, z, h, q)] f(t, z, h, q) dz dh dq = f(t, x_1, x_2, x_3).$$

Равенство (32) вытекает из равенств

$$\Gamma(t, x_1, x_2, x_3; t, z, h, q) = d(x - z) d(y - h) d(z - q),$$

$$\iiint_G f(t, z, h, q) d(x - z) d(y - h) d(z - q) dz dh dq = f(t, x_1, x_2, x_3)$$

и равенства (30).

Из (28), (29), (31), (32) следует, что

$$L\bar{q}(t, x_1, x_2, x_3) = f(t, x_1, x_2, x_3).$$

Из (33) заключаем, что $\bar{q}(t, x_1, x_2, x_3)$ является решением уравнения (1), из (27) – что решение единственно и оно удовлетворяет условиям (3), (4), (6) (в силу того, что этим условиям удовлетворяет $q(t, x_1, x_2, x_3)$). ►

2. Разрешимость математических моделей рассеяния примеси в атмосфере, используемых в прикладных исследованиях.

Полученные результаты применяются для анализа математических моделей, часто используемых на практике.

Убедимся, что для основных начально-граничных задач, используемых в прикладных исследованиях рассеяния примеси в турбулентной атмосфере, выполняются все условия теорем 1-4 из пункта 1. В этих задачах обычно полагают, что коэффициенты и функции в задачах (1) – (5), (1) – (4), (6) имеют следующий вид [1] (для полного соответствия с обозначениями, используемыми на практике, будем считать, что $x_1 = x$, $x_2 = y$, $x_3 = z$).

$$u_1 = u_1(z) = c_1 \ln z, \quad c_1 = const > 0, \quad u_2 = u_3 = 0 \tag{34}$$

(этот случай означает, что ось Ох сориентирована по направлению вектора скорости ветра, а скорость ветра вдоль оси Oz изменяется по логарифмическому закону),

$$K_{ij} = \begin{cases} K_{ij} \neq 0, & i = j, \\ = 0, & i \neq j, \quad i = 1,2,3, \end{cases}$$

т.е. в матрице коэффициентов диффузии учитываются только диагональные элементы, а все элементы, не расположенные на главной диагонали, считают равными нулю; при этом $K_{11} = K_{22} = c_2 u_1$, $c_2 = const > 0$, где u_1 задается выражением (34), $K_{33} = c_3 z + c_4$, $c_3 = const > 0$, $c_4 = const \geq 0$.

В качестве G часто выбирают [3] прямой круговой цилиндр высоты H с достаточно большим радиусом R основания, расположенного на подстилающей поверхности $z = 0$. Предполагается, что H меньше высоты так называемого пограничного слоя атмосферы [1]. Такой способ задания G удобен при аналитических (если это возможно в отдельных случаях [4]) и численных решениях рассматриваемых начально-граничных задач.

Функции a, Q, φ, y, b, v задают таким образом, что выполняются условия теорем 1-4. Чаще всего полагают, что эти функции являются постоянными величинами в G.

При данном выборе u_i, $i = 1,2,3$, условие (2) выполняется тождественно.

Для указанных u_i, a, K_{ij}, j, y, b, v, G условия теорем 1- 4 выполняются. Поэтому используемые в прикладных исследованиях задачи вида (1) – (5), (1) – (4), (6) всегда имеют (и при том одно) решение.

Обратим внимание на следующее обстоятельство. При численном решении задач (1) – (5), (1) –(4), (6) в уравнении (1) часто f заменяют на Q без должного на то обоснования. Однако, результаты численных расчетов в этом случае удовлетворительно согласуются с экспериментальными данными. Объяснить этот факт можно следующим образом. Из доказательств теорем 1- 4 следует, что вид $q(t,x_1,x_2,x_3)$ не зависит от выбора в уравнении (1) в качестве свободного члена f или Q (см. (15) и (21), (22) и (26), (27)). Поэтому и результаты численных расчетов (при замене f на Q в уравнении (1)) всегда будут хорошо согласованы с экспериментальными данными (если только, конечно, сама модель (1) – (5) или (1) – (4), (6) адекватно экспериментальным данным описывает изменения значений $q(t,x_1,x_2,x_3)$ в G).

3. Корректность задач, описывающих рассеяние примеси в атмосфере

В работе [5] было показано, что при выполнении определенных условий задача Коши (1)-(4) так же описывает процесс рассеяния примеси в турбулентной атмосфере. В п. 1 эта задача отдельно не была рассмотрена и исследована на предмет ее разрешимости, т.к. этот результат автоматически вытекает из теоремы 12 (§7 гл. 2) и 10 (§4 гл. 2) монографии [6]. На основе этих теорем можно доказать корректность задачи (1)- (4).

Теорема 5. Пусть выполнены условия

$$K_{ij} = 0, \quad i \neq j, \quad i, j = 1,2,3;$$

$$L_1 < \infty, \quad L_2 = \infty \text{ или } L_1 = \infty,$$

$$L_1 = \int_0^{z_0} \exp\left\{ -\int_{z_0}^{z} \frac{u_3(s)}{k_{33}(s)} ds \right\} dz,$$

$$L = \int_0^{z_0} \frac{1}{K_{33}} \left(\int_0^s \exp\left\{ - \int_{z_0}^{z} \frac{u_3(s)}{K_{33}(s)} ds \right\} dz \right) \exp\left\{ - \int_{z-0}^{s} \frac{u_3(s)}{K_{33}(s)} ds \right\} ds \ , \qquad (35)$$

$z_0 = const > 0$, из [5], кроме того, выполнены условия:

$$l_0 |x|^2 \le \sum_{i=1}^{3} \sum_{j=1}^{3} k_{ij} x_i x_j \le l_1 |x|^2 ,$$

$$x = (x_{1,} x_{2,} x_3), \quad l_0 = const > 0, \quad l_1 = const > 0 , \qquad (36)$$

h_i K_{ij} непрерывно дифференцируемы и ограничены в $G \times [0,T]$ и удовлетворяет при всех (t,x), $(t^0, x^0) \in \overline{G} \times [0,T]$ и некотором $r \in (0,1)$ условиям

$$|K_{ij}(t,x) - K_{ij}(t^0, x^0)| \le A(|x - x^0|^r + |t - t^0|^{r\backslash 2}) ,$$

$$|h_i(t,x) - h_i(t,x^0)| \le A|x - x^0|^r , \qquad (37)$$

$$|a(t,x) - a(t,x^0)| \le A|x - x^0|^r , \ A = const > 0 ,$$

$j(x) \ge 0, Q(t,x)$ непрерывны соответственно в $\overline{G}$, $\overline{G} \times [0,T]$ и удовлетворяют условиям:

$$|Q(t,x)| \le B \exp(c|x|^2) ,$$

$$|j(x)| \le B \exp(c|x|^2) ,$$

$$B = const > 0, \quad c = const > 0 . \qquad (38)$$

Тогда задача Коши (1)- (4) является корректно поставленной.

Доказательство. ◄ Если выполнены условия теоремы из [5], то имеет смысл постановка задачи Коши (1)-(4) в $\overline{G} \times [0,T]$.

Если выполнены указанные в данной теореме условия, то выполнены условия теорем 12 (§7 гл.1) и 10 (§4 гл. 2) из [6]. А тогда задача Коши (1)-(4) в $\overline{G} \times [0,T]$ разрешима.

Докажем непрерывную зависимость решения $q(t,x)$ задачи (1)-(4) от изменений $Q(t,x)$ и $j(x)$. Пусть $Q(t,x)$ и $j(x)$ изменились (увеличились) соответственно на $e_1 > 0$ и $e_2 > 0$, тогда вместо (1) и (2)-(4) имеем задачу Коши

$$\frac{\partial q_{e_1e_2}}{\partial t}+\sum_{i=1}^{3}h_i\frac{\partial q_{e_1e_2}}{\partial x_i}+aq_{e_1e_2}=\sum_{i=1}^{3}\sum_{j=1}^{3}k_{ij}\frac{\partial^2 q_{e_1h_2}}{\partial x_i\partial x_j}+(Q+e_1)\,, \tag{39}$$

$$\sum_{i=1}^{3}\frac{\partial u_i}{\partial x_i}=0\,,\ t\in[0,T],\ 0<T<+\infty\,,\ x=(x_1,x_2,x_3)\in G\,,\ g(0,x)=j\,(x)+e_2\,. \tag{40}$$

Вычитая (1), (4) соответственно (39) и (40) будем иметь:

$$\frac{\partial(q-q_{e_1,e_2})}{\partial t}+\sum_{i=1}^{3}h_i\frac{\partial(q-q_{e_1,e_2})}{\partial x_i}+a\,(q-q_{e_1,e_2})=\sum_{i=1}^{3}\sum_{j=1}^{3}k_{ij}\frac{\partial^2(q-q_{e_1,e_2})}{\partial x_i\partial x_j}+e_1\,,$$

$$q(0,x)-q_{e_1e_2}(0,x)=e_2\,.$$

Положим $G=R^3$(это допущение возможно, т. к. в этом случае разрешимость задачи (1)-(4) остается справедливой - см. теорему 12 (§7 гл. 1) и теорему 10 (§4 гл.2) из [6]. В этом случае (см. теорему 12 (§7 гл. 1))

$$q(t,x)-q_{e_1,e_2}(t,x)=\int_{R^3}F(t,x;x,0)e_2dx-\int_0^{+}\int_{R^3}F(t,x;t,x)e_1dtdx\quad ,$$

где

$F(t,x;t,x)-$ фундаментальное решение уравнения

$$\frac{\partial(q-q_{e_1,e_2})}{\partial t}+\sum_{i=1}^{3}h_i\frac{\partial(q-q_{e_1,e_2})}{\partial x_i}+a\,(q-q_{e_1,e_2})=\sum_{i=1}^{3}\sum_{j=1}^{3}k_{ij}\frac{\partial^2(q-q_{e_1,e_2})}{\partial x_i\partial x_j}\,.$$

Откуда, очевидно,

$$\left|q-q_{e_1,e_2}\right|\le e_2+T\cdot e_1\,.$$

Из этого неравенства следует непрерывная зависимость $g(t,x)$ от изменений $Q(t,x)$ и $j\,(x)$. ►

В параграфе 1 были указаны условия, при выполнении которых задача (1)-(5) является разрешимой, т. е. имеет единственное решение. Исследуем теперь эту задачу на устойчивость решения q к возмущениям функций $Q, j\,, y$.

Теорема 6. Пусть выполнены условия теоремы 3 из п. 1. Кроме того, дополнительно выполняются условия: в каждой точке $(t,x)\in D_4^T$, $D_4^T=(0,T)\times G$, и для любого действительного вектора $x=(x_1,x_2,x_3)$, $|x|\neq 0$,

$$\sum_{i=1}^{3}\sum_{j=1}^{3}K_{ij}(t,x)x_i x_j>0\,, \qquad (39)$$

$a(t,x)\leq 0$ при $(t,x)\in D_4^T$ и для некоторого $l=const>0$ в D_4^T

$$K_{11}l^2+h_1 l>1,\ \text{где}\ h_1=\sum_{j=1}^{3}\frac{\partial}{\partial x_1}K_{1j}-u_1\,. \qquad (40)$$

Тогда задача (1)-(5) является корректно поставленной (относительно параметров Q, j, y).

Доказательство. ◄ Если выполнены условия теоремы 3 из п.1, то задача (1)-(5) имеет, согласно этой теореме, единственное решение (разрешима). Покажем, что если в дополнение к этим условиям выполнены остальные условия данной теоремы, то решение q будет непрерывно зависеть от Q, j, y ,а, следовательно устойчивым к возмущениям в Q, j, y . Это в свою очередь будет означать корректность поставленной задачи (1)-(5) относительно Q, j, y .

Согласно доказательству теоремы 1 из п.1 уравнение (1) эквивалентно уравнениям (9), (13), (14). Этот факт будем использовать в дальнейших рассуждениях.

Согласно [6] (см.§3 гл. 2) имеет место неравенство:

$$\max_{\bar{D}_4^T}|q|\leq\max_{\bar{G}}|q|\,|_{t=0}+(\mathbf{l}^{ld}-1)\max_{\bar{D}_4^T}|Q|\,, \qquad (41)$$

где $a=const>0$ определяется в [6] (см. см.§3 гл. 2, с. 60-61).

Откуда

$$\max_{\bar{D}_4^T}|q|\leq\max_{G}j(x_1,x_2,x_3)+\max_{\partial G}y(x_1,x_2,x_3)+(\mathbf{l}^{ld}-1)\max_{\bar{D}_4^T}|Q|\,. \qquad (42)$$

Пусть Q, j, y получили (соответственно) возмущения e_1, e_2, e_3. Обозначим через $q_e = q_e(t,x),\quad x=(x_1,x_2,x_3)$, возмущенное решение (1)-(5) или (13), (2)-(5). Имеем задачу:

$$\frac{\partial q_e}{\partial t}+\sum_{i=1}^{3}u_i\frac{\partial q_e}{\partial x_i}+aq_e=\sum_{i=1}^{3}\sum_{j=1}^{3}\frac{\partial}{\partial x_i}K_{ij}\frac{\partial q_e}{\partial x_j}+(Q+e_1), \tag{43}$$

$$q_e(t,x_1,x_2,x_3)\ge 0,\quad t\in[0,T),\quad (x_1,x_2,x_3)\in G,$$

$$q_e(0,x_1,x_2,x_3)=j(x_1,x_2,x_3)+e_2, \tag{44}$$

$$q_e(t,x_1,x_2,x_3)|_{\partial q}=y(x_1,x_2,x_3)+e_3. \tag{45}$$

Вычтем почленно (13) из (43), (4) из (4.5.6), (44) из (45):

$$\frac{\partial(q_e-q)}{\partial t}+\sum_{i=1}^{3}u_i\frac{\partial(q_e-q)}{\partial x_i}+a(q_e-q)=\sum_{i=1}^{3}\sum_{j=1}^{3}\frac{\partial}{\partial x_i}K_{ij}\frac{\partial(q_e-q)}{\partial x_j}+e_1, \tag{46}$$

$$(q_e-q)|_{t=0}=e_2, \tag{47}$$

$$(q_e-q)|_{\partial G}=e_3. \tag{48}$$

Используя неравенство (42) применительно к задаче (46)-(48), будем иметь:

$$\max_{\overline{D}_4^T}|q_e-q|\le|e_2|+|e_3|+(\mathbf{1}^{ld}-1)\cdot|e_1|. \tag{49}$$

Из (49) вытекает непрерывная зависимость значений q от значений Q, j, y. ►

В параграфе 1 были указаны условия, при выполнении которых задача (1)-(4), (6) является разрешимой (имеет единственное решение). Исследуем теперь эту задачу на устойчивость решения q к возмущениям функций Q, j, y. Если q окажется устойчивым к возмущениям этих функций, то указанная задача (1)-(4), (6) будет корректно поставленной.

Теорема 7. Пусть выполнены условия теоремы 4. Тогда задача (1)-(4), (6) является корректно поставленной (относительно параметров Q, j, n).

Доказательство. ◄ Воспользуемся схемой доказательства, использованной при доказательстве теоремы 6 п. 3. Как отмечалось ранее уравнение (1) эквивалентно уравнениям (9), (13), (14). Согласно [6] (см. лемму 2 из §3 гл. 5) при выполнении условий данной теоремы в области $\overline{D}_4^T = [0,T]\times\overline{G}$ справедливо неравенство

$$|q(t,x)| \le k(\sup_{\overline{D}_4^T}|Q| + \sup_{\partial G\times[0,T]}|n| + \sup_{D_4^T}|j|), \tag{50}$$

где $k = const > 0$, k зависит только от $\overline{D}_4^T$, b (см. (6), уравнения (14)).

Пусть Q, j, n испытали соответственно возмущения e_1, e_2, e_3; через $q_e = q_e(t,x)$, $x = (x_1, x_2, x_3)$, обозначим возмущенное решение (1)-(4), (6), удовлетворяющее задаче:

$$\frac{\partial q_e}{\partial t} + \sum_{i=1}^{3} u_i \frac{\partial q_e}{\partial x_i} + a q_e = \sum_{i=1}^{3}\sum_{j=1}^{3} \frac{\partial}{\partial x_i} K_{ij} \frac{\partial q_e}{\partial x_j} + (Q + e_1), \tag{51}$$

$$q_e(t,x) \ge 0,\ t\in[0,T],\ x\in G,$$

$$q_e(0,x) = j(x) + e_2, \tag{52}$$

$$\left\{\frac{\partial q_e}{\partial n} + b q_e\right\}|_{x\in\partial G_0} = n(t,x) + e_3. \tag{53}$$

Вычтем почленно (13) из (51), (4) из (52), (6) из (53):

$$\frac{\partial(q_e - q)}{\partial t} + \sum_{i=1}^{3} u_i \frac{\partial(q_e - q)}{\partial x_i} + a(q_e - q) = \sum_{i=1}^{3}\sum_{j=1}^{3} \frac{\partial}{\partial x_i} K_{ij} \frac{\partial(q_e - q)}{\partial x_j} + e_1, \tag{54}$$

$$(q_e - q)|_{t=0} = e_2, \tag{55}$$

$$\left\{\frac{\partial(q_e - q)}{\partial n} + b(q_e - q)\right\}|_{x\in\partial G_0} = e_3. \tag{56}$$

Применяя неравенство (50) к решению задачи (54)-(56), будем иметь:

$$|q_e - q| \le k(|e_1| + |e_2| + |e_3|). \tag{57}$$

Из (57), очевидно, вытекает непрерывная зависимость на $\overline{D}_4^T$ значений g от Q, j, n. Согласно теореме 4 из п. 1, в условиях данной теоремы, задача (1)-(4), (6) разрешима. Следовательно, она является корректно поставленной. ►

Литература

1. Современные проблемы атмосферной диффузии и загрязнения атмосферы: Монография / М. Е. Берлянд. Л.: Гидрометеоиздат, 1975. 392с.
2. Линейные и квазилинейные уравнения параболического типа: Монография / О. А. Ладыженская, В. А. Солоников, Н. Н. Уральцева. М.: Наука, 1967. 736с.
3. Математическое моделирование в проблеме охраны окружающей среды: Монография / Г. И. Марчук. М.: Наука, 1982. 320с.
4. Аналитические решения краевых задач в математической модели атмосферной диффузии: Монография / Е. А. Семенчин. Изд-во СККИУУ, 1993. 142с.
5. Семенчин Е. А. О граничных условиях в задаче атмосферной диффузии. // Обозрение прикладной и промышленной математики. Т. 12, вып. 3. С 635-639.
6. Уравнения с частными производными параболического типа: Монография / А. Н. Фридман. М.: Мир, 1968. 428с.