УДК 528.48

О ВСТАВКЕ ПУНКТА В ТВЁРДУЮ ФИГУРУ НА ОСНОВЕ ЛИНЕЙНЫХ ИЗМЕРЕНИЙ

Соколов Юрий Григорьевич
к. т. н., профессор

Бень Владимир Степанович
профессор

Струсь Сергей Сергеевич
ассистент
Кубанский государственный аграрный университет, Краснодар, Россия

Статья описывает сгущение геодезических сетей путём вставки пункта в жёсткую фигуру на основе линейных измерений. Рассматриваются способы уравнивания полученных результатов. Приводится оценка точности определения положения определяемого пункта.

Ключевые слова: ПУНКТЫ, ЛИНЕЙНЫЕ ИЗМЕРЕНИЯ, ОЦЕНКА ТОЧНОСТИ, ПОПРАВКИ

UDC 528.48

ABOUT A POINT INSERT IN A RIGID FIGURE ON THE BASIS OF LINEAR MEASUREMENTS

Sokolov Yuri Grigorievich
Cand. Tech. Sci., professor

Ben Vladimir Stepanovich
Professor

Strus Sergey Sergeevich
assistant
Kuban State Agrarian University, Krasnodar, Russia

The article describes a condensation of geodetic networks by a point insert in a rigid figure on the basis of linear measurements. Ways of equalising of the received results are considered. The estimation of accuracy of definition of the defined point position is resulted.

Keywords: POINTS, LINEAR MEASUREMENTS, ESTIMATION OF ACCURACY, CORRECTIONS

Пункты заполняющих геодезических сетей обычно определяют вставкой одиночных или группы пунктов путём выполнения угловых измерений. В настоящее время в связи с широким внедрением в производство светодальномерной техники появилась возможность оперативно и качественно, взамен угловых, производить линейные измерения, на которые, как известно, внешние условия, центровка и редукция оказывают значительно меньшее влияние, чем на угловые.

В работе предлагается положение пункта заполняющей сети определить путём выполнения только линейных измерений. Для сгущения геодезических сетей путём вставки пункта в жёсткую фигуру на основе линейных измерений рассматриваются способы уравнивания полученных результатов. Приводится оценка точности определения положения определяемого пункта.

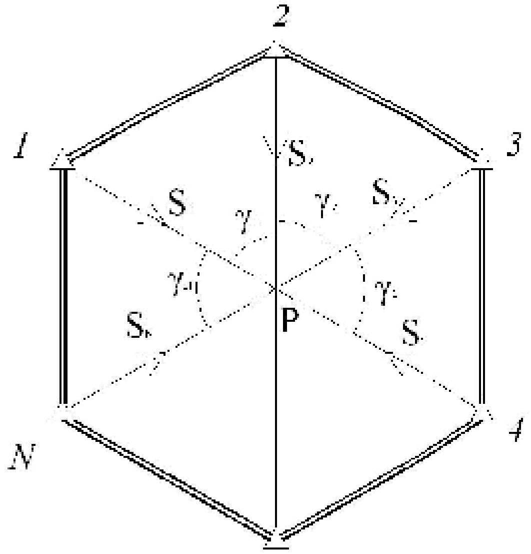

Рис.1. Вставка пункта в твёрдый n-угольник

Пусть имеем твёрдую фигуру n-угольник, в которой измерены длины линий S_1, S_2, …, S_n: P – определяемый пункт. Без учёта ошибок исходных данных каждой измеренной стороне при параметрическом способе уравнивания будет соответствовать одно уравнение погрешностей вида:

$$v_{pi} = -\cos a_{Pi} dX_P - \sin a_{Pi} dY_P + f_{Pi}, (i = 1,2,...,n) \qquad (1)$$

где

$f_{Pi} = S'_{Pi} - S''_{Pi}$,

S'_{Pi} - вычисленное, а S''_{Pi} - измеренное значение стороны;

a_{Pi} - дирекционный угол стороны S_{Pi};

dX_P, dY_P – поправки в предварительные координаты точки P, полученные из решения, например, линейной засечки по сторонам S_1 и S_2.

Решение уравнений погрешностей выполняется по методу наименьших квадратов с соблюдением условия $[vv] = \min$ (для равноточных измерений длин сторон).

Коэффициенты нормальных уравнений будут:

$$[aa] = \sum_{i=1}^{n} \cos^2 a_{Pi},$$

$$[ab] = \frac{1}{2}\sum_{i=1}^{n}\sin 2a_{Pi},$$

$$[bb] = \sum_{i=1}^{n}\sin^2 a_{Pi},$$

$$[af] = -\sum_{i=1}^{n} f_{Pi}\cdot\cos a_{Pi},$$

$$[bf] = -\sum_{i=1}^{n} f_{Pi}\cdot\sin a_{Pi}.$$

Искомые поправки dX_P и dY_P найдутся из решения нормальных уравнений:

$$[aa]dX_P + [ab]dY_P = [af] = 0, \qquad (2)$$
$$[ab]dX_P + [bb]dY_P = [bf] = 0,$$

а поправки в измеренные стороны вычисляются по формуле (1).

Оценку точности положения одиночно определяемого пункта можно выполнить по известным в теории ошибок формулам.

$$M = m_S\sqrt{\frac{[aa]+[bb]}{[aa][bb]-[ab]^2}}, \qquad m_S = \sqrt{\frac{[vv]}{n-2}}, \qquad (3)$$

где

m_S – средняя квадратическая ошибка линейных измерений,

n-2 – число избыточных измерений.

Для случая правильного n-угольника выразим коэффициенты при неизвестных через углы $g_1, g_2, ..., g_n = \frac{360}{n} = g$ при центральной точке Р.

Примем дирекционный угол стороны S_{Pi} равным нулю $(a_1 = 0)$. Тогда получим для уравнений (1):

$$v_{p1} = -\cos 0^o dX_P - \sin 0^o dY_P + f_{P1}; \qquad (4)$$

$$v_{p2} = -\cos g dX_P - \sin g dY_P + f_{P2};$$

\- - - - -

$$v_{pn} = -\cos(n-1)gdX_P - \sin(n-1)gdY_P + f_{Pn}.$$

Коэффициенты нормальных уравнений в этом случае будут иметь вид:

$$[aa] = \cos^2 0^o + \cos^2 g + \cos^2 2g + ... + \cos^2(n-1)g = \frac{n}{2}; \quad (5)$$

$$[ab] = \cos 0^o \cdot \sin 0^o + \cos g \cdot \sin g + \cos 2g \cdot \sin 2g + ... +$$
$$+ \cos(n-1)g \cdot \sin(n-1)g = 0;$$

$$[bb] = \sin^2 0^o + \sin^2 g + \sin^2 2g + ... + \sin^2(n-1)g = \frac{n}{2},$$

а средняя квадратическая ошибка положения пункта Р, согласно (3), найдётся по формуле:

$$M = \frac{2m_S}{\sqrt{n}} \quad (6)$$

Например, для правильного шестиугольника получим

$$M = 0{,}8 \cdot 2m_S.$$

Рассмотрим коррелатный метод уравнивания.

Для избыточно измеренных сторон S_3, S_4, …, S_n запишем условные уравнения вида [1,2].

$$\left(\frac{\partial X_P}{\partial S_1}\cos a_3 + \frac{\partial Y_P}{\partial S_1}\sin a_3\right)v_1 + \left(\frac{\partial X_P}{\partial S_2}\cos a_3 + \frac{\partial Y_P}{\partial S_2}\sin a_3\right)v_2 + v_3 + f_{S3} = 0; (7)$$

$$\left(\frac{\partial X_P}{\partial S_1}\cos a_4 + \frac{\partial Y_P}{\partial S_1}\sin a_4\right)v_1 + \left(\frac{\partial X_P}{\partial S_2}\cos a_4 + \frac{\partial Y_P}{\partial S_2}\sin a_4\right)v_2 + v_4 + f_{S4} = 0;$$

\- - - - - - - - - -

$$\left(\frac{\partial X_P}{\partial S_1}\cos a_n + \frac{\partial Y_P}{\partial S_1}\sin a_n\right)v_1 + \left(\frac{\partial X_P}{\partial S_2}\cos a_n + \frac{\partial Y_P}{\partial S_2}\sin a_n\right)v_2 + v_n + f_{Sn} = 0,$$

где направления дирекционных углов $a_3, a_4, ..., a_n$ показаны на рис.1 стрелками;

$f_S = S'' - S'$ - невязка в длине стороны,

при этом значения сторон S'' - измеренное, а S' - вычисленное по формуле:

$$S' = \sqrt{(X_i - X_P)^2 + (Y_i - Y_P)^2}, \qquad i=3, 4, …, n.$$

Частные производные по измеренным сторонам S_1 и S_2 найдём путём дифференцирования известных формул линейной засечки:

$$X_P = X_2 + q(X_1 - X_2) + h(Y_1 - Y_2), \qquad (8)$$

$$Y_P = Y_2 + q(Y_1 - Y_2) + h(X_1 - X_2),$$

где

$$q = \frac{1}{2}\left[1 + \left(\frac{S_2}{S}\right)^2 - \left(\frac{S_1}{S}\right)^2\right],$$

$$h = \sqrt{\left(\frac{S_2}{S}\right)^2 - q^2}.$$

В результате после несложных преобразований получим, согласно [2]:

$$\frac{\partial X_P}{\partial S_1} = \frac{S_1}{S^2 h}(Y_P - Y_2); \frac{\partial Y_P}{\partial S_1} = -\frac{S_2}{S^2 h}(X_P - X_2) \qquad (9)$$

$$\frac{\partial X_P}{\partial S_2} = \frac{S_2}{S^2 h}(X_1 - X_P); \frac{\partial Y_P}{\partial S_2} = -\frac{S_2}{S^2 h}(Y_1 - Y_P). \qquad (10)$$

Полученные выражения можно упростить. Для этого умножим и разделим выражение (9) на S_2, а (10) – на S_1. В результате получим:

$$\frac{\partial X_P}{\partial S_1} = \frac{\sin a_2}{\sin g_1}; \qquad \frac{\partial Y_P}{\partial S_1} = \frac{\cos a_2}{\sin g_1}; \qquad (11)$$

$$\frac{\partial X_P}{\partial S_2} = -\frac{\sin a_1}{\sin g_1}; \qquad \frac{\partial Y_P}{\partial S_2} = \frac{\cos a_1}{\sin g_1}.$$

Подставим найденные частные производные в (7). Получим:

$$\frac{\sin(a_2 - a_3)}{\sin g_1} v_1 + \frac{\sin(a_3 - a_1)}{\sin g_1} v_2 + v_3 + f_{S3} = 0; \qquad (12)$$

$$\frac{\sin(a_2 - a_4)}{\sin g_1} v_1 + \frac{\sin(a_4 - a_1)}{\sin g_1} v_2 + v_4 + f_{S4} = 0;$$

\- - - - - - - -

$$\frac{\sin(a_2 - a_n)}{\sin g_1} v_1 + \frac{\sin(a_n - a_1)}{\sin g_1} v_2 + v_n + f_{Sn} = 0.$$

Решая эту систему уравнений под условием $[vv] = \min$, найдём искомые поправки в длины сторон.

Для правильного, например, шестиугольника примем $a_1 = 180^o, a_2 = 240^o, a_3 = 300^o, a_4 = 0^o, a_5 = 60^o, a_6 = 120^o$. Тогда условные уравнения (12) примут вид:

$$\left.\begin{aligned} &-v_1 + v_2 + v_3 + f_{S3} = 0;\\ &-v_1 + 0 + v_4 + f_{S4} = 0;\\ &0 - v_2 + v_5 + f_{S5} = 0;\\ &v_1 - v_2 + v_6 + f_{S6} = 0. \end{aligned}\right\} \qquad (13)$$

а нормальные уравнения будут:

$$\begin{aligned} &3K_1 + K_2 - K_3 - 2K_4 + f_{S3} = 0; \qquad (14)\\ &K_1 + 2K_2 + 0 + K_4 + f_{S4} = 0;\\ &-K_1 + 0 + 2K_3 + K_4 + f_{S5} = 0;\\ &-2K_1 - K_2 + K_3 + 3K_4 + f_{S6} = 0. \end{aligned}$$

где K – коррелаты.

Для оценки точности определения положения пункта P найдём обратные веса $\frac{1}{P_{Fx}}$ и $\frac{1}{P_{Fy}}$.

Весовые функции, согласно (11), будут иметь вид:

$$F_X = -v_1; \qquad F_Y = 0{,}577v_1 - 1{,}155v_2.$$

Тогда

$$[aF_X] = +1; \quad [aF_Y] = -1{,}732; \quad [bF_X] = +1; \quad [bF_Y] = -0{,}577;$$
$$[cF_X] = 0; \quad [cF_Y] = +1{,}155; \quad [dF_X] = -1; \quad [dF_Y] = 1{,}732.$$

Присоединяя эти значения к уравнениям (14) и решая полученную систему по схеме Гаусса, найдём обратные веса $\frac{1}{P_{Fx}}$ и $\frac{1}{P_{Fy}}$. Пример решения полученной системы приведён в таблице 1.

Таблица 1.

Вычисление обратных весов по схеме Гаусса

K_1	K_2	K_3	K_4	F_X	F_Y
+3	+1	-1	-2	+1	-1,232
	-0,333	+0,333	+0,667	-0,333	+0,577
	+2	0	-1	+1	-0,577
	-0,333	+0,333	+0,667	-0,333	+0,577
	+1,667	+0,333	-0,333	+0,667	0
		-0,200	+0,200	-0,400	0
		+2	+1	0	+1,155
		-0,067	+0,067	-0,133	0
		-0,333	-0,667	+0,333	-0,577
		+1,600	+0,400	+0,200	+0,577
			-0,250	-0,125	-0,361
			3	-1	+1,732
			-0,100	-0,050	-0,144
			-0,067	+0,133	0
			-1,334	+0,667	-1,155
			+1,499	-0,250	+0,433
				+0,167	-0,289
				+1,000	+1,666
				-0,333	-0,999
				-0,267	0,000
				-0,025	-0,208
				-0,041	-0,125
				$\frac{1}{P_{Fx}}=0,334$	$\frac{1}{P_{Fy}}=+0,334$

Средняя квадратическая ошибка определения положения искомого пункта Р составит:

$$M = m_S\sqrt{\frac{1}{P_{Fx}}+\frac{1}{P_{Fy}}} = m_S\sqrt{0,668} = \pm 0,82 m_S .$$

Как и следовало ожидать, средние квадратические ошибки положения точки Р совпадают как при параметрическом, так и при коррелатном способах уравнивания. Предпочтение в рассматриваемом примере всё же следует отдать параметрическому способу, как более простому, в котором сразу находятся поправки dX_P и dY_P в предварительные координаты.

Литература

1. Соколов Ю.Г., Тимошенко Н.А. Об уравнивании заполняющих геодезических сетей из четырёхугольников с измеренными сторонами. – Ростов-на-Дону: «Земельный кадастр», Сб. научных трудов №4, 2002. – с.17-23.

2. Соколов Ю.Г., Тимошенко Н.А., Данильченко П.М. К вопросу составления условных уравнений в геодезических сетях из четырёхугольников с измеренными сторонами. – КубГАУ, Научный журнал «Электронный ресурс – Краснодар» №28, 2007. – с.7.