УДК 528.48

К ВОПРОСУ СОСТАВЛЕНИЯ УСЛОВНЫХ УРАВНЕНИЙ В ГЕОДЕЗИЧЕСКИХ СЕТЯХ ИЗ ТРЕУГОЛЬНИКОВ С ИЗМЕРЕННЫМИ СТОРОНАМИ

Соколов Ю.Г., – к.т.н., профессор
Тимошенко Н.А., – ассистент
Данильченко П.М., – к. с.-х. н., доцент
Кубанский государственный аграрный университет

Для составления условных уравнений с целью уравнивания трилатерационных сетей рассматривается вопрос нахождения коэффициентов при поправках в измеренные стороны, минуя решения треугольников сетей. Для сетей из треугольников разработан алгоритм вычисления коэффициентов путем дифференцирования известных формул последовательных линейных засечек.

Ключевые слова: УСЛОВНЫЕ УРАВНЕНИЯ, ГЕОДЕЗИЧЕСКИЕ СЕТИ, ТРИЛАТЕРАЦИОННЫЕ СЕТИ, ТРЕУГОЛЬНИКИ С ИЗМЕРЕННЫМИ СТОРОНАМИ

Известен метод составления условных уравнений в трилатерации, в которой по измеренным и исходным сторонам вычисляют значения углов и получают невязки (в секундах). После этого составляют условные уравнения поправок к углам и, наконец, эти поправки выражают через поправки в измеренные стороны. В результате получают искомые уравнения поправок в измеренные величины (стороны) [1]. Такой путь представляется нерациональным с точки зрения участия углов в уравнениях поправок.

Предлагается унифицировать способ составления условных уравнений (без промежуточной ступени) при уравнивании сетей трилатерации.

Рассмотрим предлагаемую методику на примере цепочки треугольников, опирающуюся на две стороны триангуляции (рисунок 1).

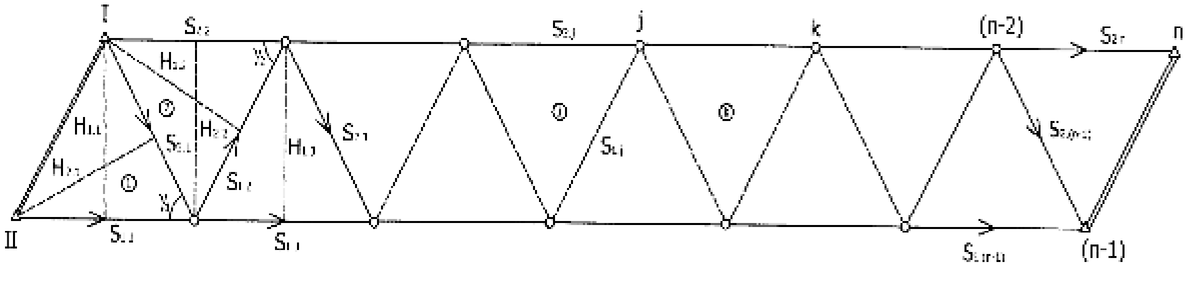

Рисунок 1. – Цепочка треугольников

В сети, показанной на рисунке 1, возникнут 3 условных уравнения: 2 координатных и одно для избыточно измеренной стороны $S_{2.n}$.

$$\left.\begin{aligned}&\left(\frac{\partial X_{n-1}}{\partial S_{1.1}}\right)\cdot V_{1.1}+\left(\frac{\partial X_{n-1}}{\partial S_{2.1}}\right)\cdot V_{2.1}+\left(\frac{\partial X_{n-1}}{\partial S_{1.2}}\right)\cdot V_{1.2}+\ldots+\left(\frac{\partial X_{n-1}}{\partial S_{1.(n-1)}}\right)\cdot V_{1.(n-1)}+\left(\frac{\partial X_{n-1}}{\partial X_{2.(n-1)}}\right)\cdot V_{2.(n-1)}+f_{X.(n-1)}=0\\&\left(\frac{\partial Y_{n-1}}{\partial S_{1.1}}\right)\cdot V_{1.1}+\left(\frac{\partial Y_{n-1}}{\partial S_{2.1}}\right)\cdot V_{2.1}+\left(\frac{\partial Y_{n-1}}{\partial S_{1.2}}\right)\cdot V_{1.2}+\ldots+\left(\frac{\partial Y_{n-1}}{\partial S_{1.(n-1)}}\right)\cdot V_{1.(n-1)}+\left(\frac{\partial Y_{n-1}}{\partial X_{2.(n-1)}}\right)\cdot V_{2.(n-1)}+f_{Y.(n-1)}=0\end{aligned}\right\}\quad(1)$$

$$V_{2.n}+V_{1.1}\cdot\left(\frac{\partial X_{n-2}}{\partial S_{1.1}}\cos a_{(n-2).n}+\frac{\partial Y_{n-2}}{\partial s_{1.1}}\sin a_{(n-2).n}\right)+V_{2.1}\cdot\left(\frac{\partial X_{n-2}}{\partial S_{2.1}}\cos a_{(n-2).n}+\frac{\partial Y_{n-2}}{\partial S_{2.1}}\sin a_{(n-2).n}\right)+\ldots+$$

$$+\left(\frac{\partial X_{n-2}}{\partial S_{2.n-2}}\cos a_{(n-2).n}+\frac{\partial Y_{n-2}}{\partial S_{2.n-2}}\sin a_{(n-2).n}\right)\cdot V_{2.(n-2)}+f_{S_{2.n}}=0,\quad(2)$$

где $V_{1.1,}V_{2.1,...,}V_{2.n-1,}V_{2n}$ - поправки в измеренные стороны $S_{1.1,}S_{2.1,...,}S_{2.n-1,}S_{2n}$,

$f_{X.n-1,}f_{Y.n-1}$ - невязки в приращениях координат,

$a_{(n-2)n}$ - дирекционный угол стороны $S_{2.n}$,

$f_{S.n}$ - невязка в длине стороны $S_{2.n}$, вычисленная как разность между измеренной длиной стороны и ее вычисленным значением.

В результате дифференцирования известных формул, используемых для определения координат линейными засечками, и последующих преобразований для частных производных по измеренным сторонам в формулах (1) и (2) был найден следующий алгоритм их определения

$$\left.\begin{aligned}&\frac{\partial X_{on.j}}{\partial S_{1.j}}=\frac{(Y_{on}-Y_{n})_j}{H'_j};\frac{\partial Y_{on.j}}{\partial S_{1.j}}=-\frac{(X_{on}-X_{n})_j}{H'_j};\\&\frac{\partial X_{on.j}}{\partial S_{2.j}}=\frac{(Y_{л}-Y_{on})_j}{H'_j};\frac{\partial Y_{on.j}}{\partial S_{2.j}}=-\frac{(X_{л}-X_{on})_j}{H'_j},\end{aligned}\right\}\quad(3)$$

где j=1,2,3,…,(n-1),

$\left.\begin{matrix}X_{n.j},Y_{n.j}\\X_{л.j},Y_{л.j}\end{matrix}\right\}$ - координаты правой и левой точек в j – ом треугольнике (по отношению к определяемой точке);

$X_{on.j},Y_{on.j}$ - координаты определяемой точки в j – ом треугольнике;

$H_{1.j},H_{2.j}$ - высоты в треугольнике, опущенные на стороны $S_{1.j},S_{2.j}$ соответственно.

Так для первого треугольника (рисунок 1) получим

$$\frac{\partial X_1}{\partial S_{1.1}}=\frac{(Y_1-Y_I)}{H_{1.1}};\ \frac{\partial Y_1}{\partial S_{1.1}}=-\frac{(X_1-X_I)}{H_{1.1}};$$

$$\frac{\partial X_1}{\partial S_{2.1}}=\frac{(Y_{II}-Y_1)}{H_{2.1}};\ \frac{\partial Y_1}{\partial S_{2.1}}=-\frac{(X_{II}-X_1)}{H_{2.1}}.$$

Здесь $H_{1.1}=S_{2.1}\cdot\sin g_1$, $H_{2.1}=S_{1.1}\cdot\sin g_1$.

Для второго треугольника будем иметь

$$\frac{\partial X_2}{\partial S_{1.2}}=\frac{(Y_2-Y_I)}{H_{1.2}};\ \frac{\partial Y_2}{\partial S_{1.2}}=-\frac{(X_2-X_I)}{H_{1.2}};$$

$$\frac{\partial X_2}{\partial S_{2.2}}=\frac{(Y_1-Y_2)}{H_{2.2}};\ \frac{\partial Y_2}{\partial S_{2.2}}=-\frac{(X_1-X_2)}{H_{2.2}},$$ и так далее.

Для сторон $S_{1.1},S_{1.3},...,S_{1.(n-1)}$ частные производные найдутся по формулам:

$$\left.\begin{aligned}\frac{\partial X_{оп.к}}{\partial S_{1.j}}&=\frac{1}{H_{1.j}}\cdot\left(Y_{оп.к}-Y_{1.j}\right);\\ \frac{\partial Y_{оп.к}}{\partial S_{1.j}}&=-\frac{1}{H_{1.j}}\cdot\left(X_{оп.к}-X_{1.j}\right),\end{aligned}\right\}\qquad(4)$$

где j = 1, 2, 3,…, (n-1)

$X_{оп.к},Y_{оп.к}$ - определяемые координаты $к$ – той точки цепи;

$X_{1.j},Y_{1.j}$ - координаты точки, из которой опущена высота $H_{1.j}$ на сторону $S_{1.j}$ треугольника.

Согласно (4) для точки, например 5, получим для стороны $S_{1.1}$:

$$\frac{\partial X_5}{\partial S_{1.1}}=\frac{1}{H_{1.1}}\cdot(Y_5-Y_I);\ \frac{\partial Y_5}{\partial S_{1.1}}=-\frac{1}{H_{1.1}}\cdot(X_5-X_I),$$

а для стороны $S_{1.3}$ будем иметь

$$\frac{\partial X_5}{\partial S_{1.3}}=\frac{1}{H_{1.3}}\cdot(Y_5-Y_2);\ \frac{\partial Y_5}{\partial S_{1.3}}=-\frac{1}{H_{1.3}}\cdot(X_5-X_2).$$

Для сторон $S_{2.j}$, j=2, 4, 6,…, n частные производные можно найти по следующим формулам:

$$\left.\begin{aligned}\frac{\partial X_{оп.к}}{\partial S_{2.j}}&=\frac{1}{H_{2.j}}\cdot\left(Y_{2.j}-Y_{оп.к}\right),\\ \frac{\partial Y_{оп.k}}{\partial S_{2.j}}&=-\frac{1}{H_{2.j}}\cdot\left(X_{2.j}-X_{оп.k}\right),\end{aligned}\right\}\qquad(5)$$

где $X_{оп.к}, Y_{оп.к}$ - определяемые координаты $к$ – той точки цепи,

$X_{2.j}, Y_{2.j}$ - координаты точки, из которой опущена высота $H_{2.j}$ на сторону $S_{2.j}$ треугольника.

Так, согласно формулам (5), для точки, например 4, и стороны $S_{2.2}$, получим:

$$\frac{\partial X_4}{\partial S_{2.2}} = \frac{1}{H_{2.2}} \cdot (Y_1 - Y_4); \ \frac{\partial Y_4}{\partial S_{2.2}} = -\frac{1}{H_{2.2}} \cdot (X_1 - X_4),$$

а для стороны $S_{2.4}$ и точки 5 будем иметь:

$$\frac{\partial X_5}{\partial S_{2.4}} = \frac{1}{H_{2.4}} \cdot (Y_3 - Y_5); \ \frac{\partial Y_5}{\partial S_{2.4}} = -\frac{1}{H_{2.4}} \cdot (X_3 - X_5).$$

Стороны $S_{2.1}, S_{1.2}, S_{2.3}, S_{1.4}, \ldots$ являются связующими и служат базовыми при вычислении координат линейной засечкой. Проследим их влияние на положение точек цепи.

Запишем для точки 2:

$$\left.\begin{aligned} X_2 &= X_I + q_2 \cdot (X_1 - X_I) + h_2 \cdot (Y_1 - Y_I) \\ Y_2 &= Y_I + q_2 \cdot (Y_1 - Y_I) - h_2 \cdot (X_1 - X_I) \end{aligned}\right\}, \qquad (6)$$

где $q_2 = \frac{1}{2}\left[1 + \left(\frac{S_{2.2}}{S_{2.1}}\right)^2 - \left(\frac{S_{1.2}}{S_{2.1}}\right)^2\right]$, $h_2 = \sqrt{\left(\frac{S_{2.2}}{S_{2.1}}\right)^2 - q_2^2}$.

Учитывая, что точка I – жесткая, найдем:

$$\frac{\partial X_2}{\partial S_{2.1}} = \frac{\partial q_2}{\partial S_{2.1}} \cdot (X_1 - X_I) + \frac{\partial X_1}{\partial S_{2.1}} \cdot q_2 + \frac{\partial h_2}{\partial S_{2.1}} \cdot (Y_1 - Y_I) + \frac{\partial Y_1}{\partial S_{2.1}} \cdot h_2;$$

$$\frac{\partial Y_2}{\partial S_{2.1}} = \frac{\partial q_2}{\partial S_{2.1}} \cdot (Y_1 - Y_I) + \frac{\partial Y_1}{\partial S_{2.1}} \cdot q_2 - \frac{\partial h_2}{\partial S_{2.1}} \cdot (X_1 - X_I) - \frac{\partial X_1}{\partial S_{2.1}} \cdot h_2.$$

Введем обозначения:

$$\left.\begin{aligned} \frac{\partial q_2}{\partial S_{2.1}} \cdot (X_1 - X_I) + \frac{\partial h_2}{\partial S_{2.1}} \cdot (Y_1 - Y_I) = a_2; \\ \frac{\partial q_2}{\partial S_{2.1}} \cdot (Y_1 - Y_I) - \frac{\partial h_2}{\partial S_{2.1}} \cdot (X_1 - X_I) = b_2. \end{aligned}\right\} \qquad (7)$$

Тогда получим:

$$\left.\begin{aligned}\frac{\partial X_2}{\partial S_{2.1}} &= \left(\frac{\partial X_1}{\partial S_{2.1}}\right)\cdot q_2 + \left(\frac{\partial Y_1}{\partial S_{2.1}}\right)\cdot h_2 + a_2;\\ \frac{\partial Y_2}{\partial S_{2.1}} &= \left(\frac{\partial Y_1}{\partial S_{2.1}}\right)\cdot q_2 - \left(\frac{\partial X_1}{\partial S_{2.1}}\right)\cdot h_2 + b_2.\end{aligned}\right\} \qquad (8)$$

Найдем выражения для коэффициентов a_2 и b_2.

Учитывая, что $q_2 = \frac{1}{2}\cdot\left[1+\left(\frac{S_{2.2}}{S_{2.1}}\right)^2 - \left(\frac{S_{1.2}}{S_{2.1}}\right)^2\right]$ и $h_2 = \sqrt{\left(\frac{S_{2.2}}{S_{2.1}}\right)^2 - q_2^2}$, найдем частные производные:

$$\frac{\partial q_2}{\partial S_{2.1}} = \frac{(1-2\cdot q_2)}{S_{2.1}};\ \frac{\partial h_2}{\partial S_{2.1}} = -\frac{h_2}{S_{2.1}}\cdot\left[1+\frac{q_2\cdot(1-q_2)}{h_2^2}\right].$$

После их подстановки в (7) получим:

$$\left.\begin{aligned}a_2 &= (1-2q_2)\cdot\cos a_{2.1} - h_2\cdot\left[1+\frac{q_2\cdot(1-q_2)}{h_2^2}\right]\cdot\sin a_{2.1},\\ b_2 &= (1-2q_2)\cdot\sin a_{2.1} + h_2\cdot\left[1+\frac{q_2\cdot(1-q_2)}{h_2^2}\right]\cdot\cos a_{2.1},\end{aligned}\right\} \qquad (9)$$

где $a_{2.1}$ - дирекционный угол стороны $S_{2.1}$.

После несложных преобразований эти коэффициенты примут более простой вид:

$$\left.\begin{aligned}a_2 &= \frac{1}{S_{2.1}}\cdot\left[(X_I - X_2)+\frac{(1-q_2)}{h_2}\cdot(Y_I - Y_2)\right];\\ b_2 &= \frac{1}{S_{2.1}}\cdot\left[(Y_I - Y_2)-\frac{(1-q_2)}{h_2}\cdot(X_I - X_2)\right].\end{aligned}\right\} \qquad (10)$$

Для точки 3 и последующих точек цепи для стороны $S_{2.1}$ коэффициенты a и b пропадают и выражения для нахождения частных производных примут вид:

$$\left.\begin{aligned}\frac{\partial X_{on.j}}{\partial S_{2.1}} &= \left(\frac{\partial X_{n.j}}{\partial S_{2.1}}\right)+\left(\frac{\partial X_{л}}{\partial S_{2.1}}-\frac{\partial X_{n}}{\partial S_{2.1}}\right)_j\cdot q_j + \left(\frac{\partial Y_{л}}{\partial S_{2.1}}-\frac{\partial Y_{n}}{\partial S_{2.1}}\right)_j\cdot h_j;\\ \frac{\partial Y_{on.j}}{\partial S_{2.1}} &= \left(\frac{\partial Y_{n.j}}{\partial S_{2.1}}\right)+\left(\frac{\partial Y_{л}}{\partial S_{2.1}}-\frac{\partial Y_{n}}{\partial S_{2.1}}\right)_j\cdot q_j - \left(\frac{\partial X_{л}}{\partial S_{2.1}}-\frac{\partial X_{n}}{\partial S_{2.1}}\right)_j\cdot h_j,\end{aligned}\right\} \qquad (11)$$

где $X_{on.j}, Y_{on.j}$ - координаты определяемых точек в j – том треугольнике;

$\left.\begin{matrix} X_{п.j}, Y_{п.j} \\ X_{л.j}, Y_{л.j} \end{matrix}\right\}$ - координаты правой и левой точек (по отношению к определяемой) в j – том треугольнике.

Нетрудно теперь заметить, что для точек, находящихся против сторон ходовой линии, в выражениях для частных производных будут присутствовать коэффициенты a и b; для остальных точек в последующих треугольниках они будут отсутствовать. Поэтому можно записать следующий алгоритм определения частных производных для связующих сторон:

$$\left.\begin{aligned} \frac{\partial X_{оп.j}}{\partial S_{св.j}} &= \left(\frac{\partial X_{п.j}}{\partial S_{св.j}}\right) + \left(\frac{\partial X_{л}}{\partial S_{св}} - \frac{\partial X_{п}}{\partial S_{св}}\right)_j \cdot q_j + \left(\frac{\partial Y_{л}}{\partial S_{св}} - \frac{\partial Y_{п}}{\partial S_{св}}\right)_j \cdot h_j + a_j, \\ \frac{\partial Y_{оп.j}}{\partial S_{св.j}} &= \left(\frac{\partial Y_{п.j}}{\partial S_{св.j}}\right) + \left(\frac{\partial Y_{л}}{\partial S_{св}} - \frac{\partial Y_{п}}{\partial S_{св}}\right)_j \cdot q_j - \left(\frac{\partial X_{л}}{\partial S_{св}} - \frac{\partial X_{п}}{\partial S_{св}}\right)_j \cdot h_j + b_j, \end{aligned}\right\} \tag{12}$$

где $S_{св.j}$ - связующая сторона в j – том треугольнике, противолежащая определяемой точке;

$$a_j = \frac{1}{S_{св.j}} \cdot \left[(X_п - X_{оп})_j + \frac{(1-q)_j}{h_j} \cdot (Y_п - Y_{оп})_j \right];$$

$$b_j = \frac{1}{S_{св.j}} \cdot \left[(Y_п - Y_{оп})_j - \frac{(1-q)_j}{h_j} \cdot (X_п - X_{оп})_j \right].$$

При $k > j$, $a_k = 0$, $b_k = 0$, получим:

$$\left.\begin{aligned} \frac{\partial X_{оп.k}}{\partial S_{св.j}} &= \left(\frac{\partial X_{п.k}}{\partial S_{св.j}}\right) + \left(\frac{\partial X_{л.k}}{\partial S_{св.j}} - \frac{\partial X_{п.k}}{\partial S_{св.j}}\right) \cdot q_k + \left(\frac{\partial Y_{л.k}}{\partial S_{св.j}} - \frac{\partial Y_{п.k}}{\partial S_{св.j}}\right) \cdot h_k, \\ \frac{\partial Y_{оп.k}}{\partial S_{св.j}} &= \left(\frac{\partial Y_{п.k}}{\partial S_{св.j}}\right) + \left(\frac{\partial Y_{л.k}}{\partial S_{св.j}} - \frac{\partial Y_{п.k}}{\partial S_{св.j}}\right) \cdot q_k - \left(\frac{\partial X_{л.k}}{\partial S_{св.j}} - \frac{\partial X_{п.k}}{\partial S_{св.j}}\right) \cdot h_k. \end{aligned}\right\} \tag{13}$$

Для стороны, например $S_{1.2}$, и точки 3, согласно формулам (12), получим:

$$\left.\begin{aligned} \frac{\partial X_3}{\partial S_{1.2}} &= \left(\frac{\partial X_2}{\partial S_{1.2}}\right) \cdot (1-q_3) - \left(\frac{\partial Y_2}{\partial S_{1.2}}\right) \cdot h_3 + \frac{1}{S_{1.2}} \cdot \left[(X_2 - X_3) + \frac{(1-q_3)}{h_3} \cdot (Y_2 - Y_3) \right]; \\ \frac{\partial Y_3}{\partial S_{1.2}} &= \left(\frac{\partial Y_2}{\partial S_{1.2}}\right) \cdot (1-q_3) + \left(\frac{\partial X_2}{\partial S_{1.2}}\right) \cdot h_3 + \frac{1}{S_{1.2}} \cdot \left[(Y_2 - Y_3) - \frac{(1-q_3)}{h_3} \cdot (X_2 - X_3) \right]. \end{aligned}\right\}$$

Значения частных производных $\left(\frac{\partial X_2}{\partial S_{1.2}}\right)$ и $\left(\frac{\partial Y_2}{\partial S_{1.2}}\right)$ найдутся по формулам (3).

Таким образом, предлагаемые алгоритмы позволяют достаточно просто находить коэффициенты условных уравнений и невязки, вычислив координаты точек цепи треугольников последовательными линейными засечками.

Литература

1. В.Д. Большаков и Г.П. Левчук. Справочник геодезиста, кн. 2. Изд. 3, переработанное и дополненное. М., «Недра», 1985 г. с. 91 – 94.