УДК 622.011.43

# КОНЕЧНО-ЭЛЕМЕНТНАЯ МОДЕЛЬ РАСЧЕТА НАПРЯЖЕННО-ДЕФОРМИРОВАННОГО СОСТОЯНИЯ УПРУГОГО МАССИВА, СОДЕРЖАЩЕГО ОСЕСИММЕТРИЧНУЮ ПОЛОСТЬ

Аршинов Г. А. – к. ф.-м. н.

*Кубанский государственный аграрный университет*

Рассматривается конечно-элементная модель расчета напряженно-деформированного состояния упругого полупространства, содержащего осесимметричную полость.

Модель строится из следующих соображений. Допустим, что в упругом однородном изотропном полупространстве образована осесимметричная (с вертикальной осью симметрии) полость с центром на глубине $H$ и максимальным характерным размером $a$. Предполагая, что $a/H$<<1, и учитывая малость влияния полости на напряженное состояние окружающего ее массива вне шара (центры полости и шара совпадают) радиуса $4a$, заменим весомое полупространство, содержащее емкость, невесомым круглым цилиндром с полостью, по верхнему торцу и боковой поверхности которого равномерно распределены сжимающие усилия $p = \gamma H$ ($\gamma$ – объемный вес массива) и $p_1 = \lambda p$, а нижний торец опирается на жесткое основание. Выделенную область массива с полостью аппроксимируем совокупностью кольцевых конечных элементов треугольного поперечного сечения и в силу осесимметричности рассмотрим лишь половину меридионального сечения полученной аппроксимации (рис. 1в). При наличии у полости экваториальной плоскости симметрии достаточно рассмотреть четверть указанного сечения (рис. 1а).

Предположим, что конечно-элементная идеализация содержит $E$ треугольников и $G$ узлов, будем нумеровать узлы (вершины) треугольников 1, 2, 3 против часовой стрелки.

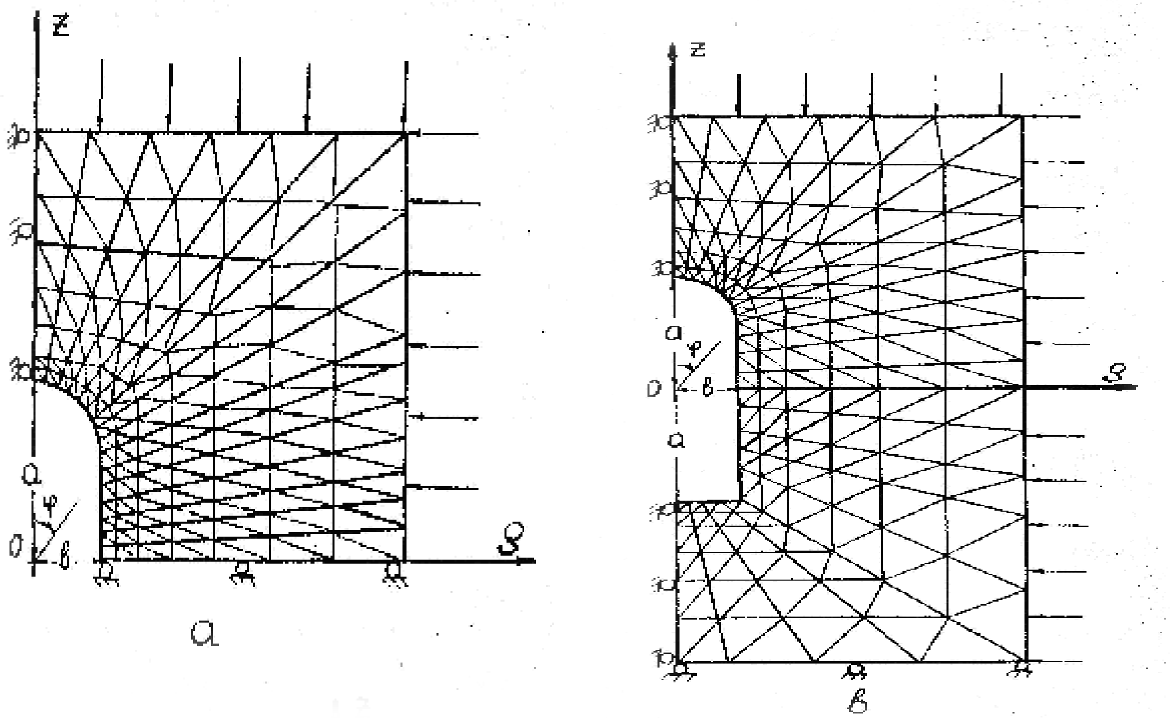


**Рисунок 1 – Конечно-элементная аппроксимация выделенной области с полостью**

Для удобства дальнейшего изложения воспользуемся матричной символикой [1]. Функцию перемещений $u(\rho,z)$ аппроксимируем следующим образом:

$$u(\rho,z) \approx \overline{\upsilon}(\rho,z) = \sum_{e=1}^{E} q_N^{(e)}(a_N + b_N\rho + c_N z), \qquad (1)$$

где $u$, $\overline{\upsilon}$ – вектора-столбцы, компоненты которых суть проекции вектора смещений и его аппроксимации на оси координат $O\rho$, $Oz$; $q_N^{(e)} = \begin{bmatrix} u_N \\ v_N \end{bmatrix}$ $(N = 1,2,3)$ – вектор узловых смещений $e$-го треугольника.

Коэффициенты $a_N, b_N, c_N$ определяются через координаты узлов элемента:

$$a_1 = S_{(e)}(\rho_2 z_3 - \rho_3 z_2), b_1 = S_{(e)}(z_2 - z_3), c_1 = S_{(e)}(\rho_3 - \rho_2), \frac{1}{S_{(e)}} = \begin{vmatrix} 1 & \rho_1 & z_1 \\ 1 & \rho_2 & z_2 \\ 1 & \rho_3 & z_3 \end{vmatrix}. \qquad (2)$$

Циклической перестановкой индексов в порядке 1, 2, 3 в (2) получаются остальные коэффициенты. Используя (1) и формулы Коши, представим вектор деформаций элемента в виде

$$\varepsilon_{(e)} = \begin{bmatrix} \varepsilon_\rho \\ \varepsilon_z \\ \varepsilon_\theta \\ \varepsilon_{\rho я} \end{bmatrix} = B_{(e)} q_{(e)}, \qquad (3)$$

где $B_{(e)} = [B_1 B_2 B_3]$; $B_i = \begin{bmatrix} b_i & 0 \\ 0 & c_i \\ \dfrac{a_i}{\rho} + b_i + \dfrac{c_i z}{\rho} & 0 \\ c_i & b_i \end{bmatrix}$, $i$=1, 2, 3,

а $q_{(e)} = \begin{bmatrix} q_1^{(e)} \\ q_2^{(e)} \\ q_3^{(e)} \end{bmatrix}$ – вектор узловых перемещений $e$-го элемента.

По закону Гука

$$\sigma_{(e)} = D\varepsilon_{(e)}, \qquad (4)$$

где $D = \begin{bmatrix} \lambda + 2\mu & \mu & \mu & 0 \\ \mu & \lambda + 2\mu & \mu & 0 \\ \mu & \mu & \lambda + 2\mu & 0 \\ 0 & 0 & 0 & \mu \end{bmatrix}$, а $\lambda, \mu$ – параметры Ламе.

Решение смешанной краевой задачи в случае ее осесимметричности минимизирует функционал энергии:

$$J(u) = 2\pi\left(\int_V \frac{1}{2}\varepsilon^{|}\sigma\rho d\rho dz - \int_V u^{|} f\rho d\rho dz - \int_s u^{|} p ds\right), \qquad (5)$$

где $f$, $p$ – вектора массовых и поверхностных сил, $V$ – область, в которой ищется решение, $S$ – граница $V$. Принимая во внимание (3) и (4), получим аппроксимацию функционала (5):

$$J(\overline{\upsilon}) = \sum_{e=1}^{E} \frac{1}{2} q^{|}_{(e)} k_{(e)} q_{(e)} - 2\pi \Big( \sum_{e=1}^{E} q^{|}_{(e)} \int_{V_{(e)}} A^{|}_{(e)} f \rho \partial\rho \partial z + \sum_{e=1}^{E} q^{|}_{(e)} \int_{S_{(e)}} A^{|}_{(e)} \rho \partial s \Big), \tag{6}$$

где матрица $k_{(e)} = 2\pi \int\limits_{V_{(e)}} B^{|}_{(e)} D B_{(e)} \rho \partial\rho \partial z$ называется матрицей жесткости $e$-го конечного элемента, а матрица

$$A_{(e)} = [\, A_1 A_2 A_3 \,]; \quad A_i = \begin{bmatrix} a_i + b_i\rho + c_i z & 0 \\ 0 & a_i + b_i\rho + c_i z \end{bmatrix}.$$

Введем матрицы $C_{(e)}$ размером $6 \times 2G$, компоненты которых либо нуль, либо единичные. Для любого $m$-го узла $e$-го элемента, совпадающего с $i$-м узлом в глобальной нумерации узлов конечно-элементной сетки, компоненты $C^{(e)}2m-1{,}2i-1$; $C^{(e)}2m-1{,}2i$; $C^{(e)}2m{,}2i-1$ и $C^{(e)}2m{,}2i$ равны 1. После перебора всех элементов и присвоения компонентам $C_{(e)}$ единицы согласно указанному правилу, оставшиеся компоненты приравниваются к нулю. Если

$$\upsilon = \begin{bmatrix} u_1 \\ v_1 \\ . \\ . \\ . \\ u_G \\ v_G \end{bmatrix}$$

– вектор смещений узлов согласно глобальной нумерации, то

$$q_{(e)} = C_{(e)} \upsilon. \tag{7}$$

Учитывая (7), запишем (6) в виде

$$J(\upsilon) = \frac{1}{2} \upsilon^{|} \Big( \sum_{e=1}^{E} C^{|}_{(e)} K_{(e)} C_{(e)} \upsilon - 2\pi \Big( \upsilon^{|} \sum_{e=1}^{E} C^{|}_{(e)} \int_{V_{(e)}} A^{|}_{(e)} f \rho \partial\rho \partial z + \upsilon^{|} \sum_{e=1}^{E_1} C^{|}_{(e)} \int_{S_{(e)}} A^{|}_{(e)} \rho \partial s + \Big)\Big)$$

или

$$J(\upsilon)=\frac{1}{2}\upsilon^{|}K\upsilon-\upsilon^{|}(F+\overline{\rho}). \tag{8}$$

Функционал (8) принимает минимальное значение, если $\frac{\partial J}{\partial \upsilon_i}=0$ ; $\upsilon_i=\begin{bmatrix}u_i\\ v_i\end{bmatrix}$; $I=1,2,\ldots,\sigma$.

Эти условия сводятся к системе линейных алгебраических уравнений относительно вектора глобальных узловых перемещений

$$K\upsilon=F+\overline{\rho}, \tag{9}$$

матрица коэффициентов которой *K* называется матрицей жесткости системы конечных элементов. Решение $\upsilon$ позволяет установить деформации и напряжения по формулам (3), (4).

Иногда в элементах полезно задавать начальные деформации или напряжения, тогда видоизменяется связь (4), которая в этих случаях соответственно имеет вид:

$$\sigma_{(e)}=D(\varepsilon_{(e)}-\varepsilon_0^{(e)}) \;;\; \sigma_{(e)}=D\varepsilon_{(e)}+\sigma_0^{(e)}, \tag{10}$$

где $\varepsilon_0^{(e)}$ и $\sigma_0^{(e)}$ – начальные деформации и напряжения, а к правой части (9) добавится слагаемое *Q*, соответственно равное

$$Q=2\pi\sum_{e=1}^{E}C_{(e)}^{|}B_{(e)}^{|}D\;\varepsilon_0^{(e)}, \tag{11}$$

или

$$Q=-2\pi\sum_{e=1}^{E}C_{(e)}^{|}B_{(e)}^{|}\sigma_0^{(e)}. \tag{12}$$

После решения системы $K\upsilon=F+\overline{\rho}+Q$ напряжение вычисляются согласно (10).

## Список литературы

1. Зенкевич, О. С. Метод конечных элементов в технике / О. С. Зенкевич. – М. : Мир, 1975.