УДК 622.011.43

МАТЕМАТИЧЕСКАЯ МОДЕЛЬ ПРОДОЛЬНЫХ КОЛЕБАНИЙ ДЛЯ НЕЛИНЕЙНО-ВЯЗКОУПРУГОГО СТЕРЖНЯ

Аршинов Г.А. – к. ф.-м. н.

Кубанский государственный аграрный университет

Исследуются условия возникновения уединенных продольных волн в физически и геометрически нелинейных вязкоупругих стержнях.

В бесконечном стержне, свободном от внешних воздействий, отнесенном к системе координат с осью x, расположенной вдоль осевой линии стержня, и осями y, z – в одном из поперечных сечений, перемещения точек стержня аппроксимируются функциями

$$u_1 = u(x,t), u_2 = -\nu y u_x, u_3 = -\nu z u_x, \qquad (1)$$

где u_1, u_2, u_3 – соответственно перемещения по осям x, y, z; t – время, ν – коэффициент Пуассона, $u_x = \dfrac{\partial u}{\partial x}$.

Деформации стержня задаются тензором Грина:

$$\varepsilon_{ij} = \frac{1}{2}(u_{i,j} + u_{j,i} + u_{k,i}u_{k,j}), \qquad (2)$$

где $x_1 = x$, $x_2 = y$, $x_3 = z$.

Реологические свойства стержня определяются уравнениями квадратичной теории вязкоупругости [1]:

$$\sigma_{ij}(t) = \lambda\theta\delta_{ij} + 2\mu\varepsilon_{ij} - \alpha\int_{-\infty}^{t} e^{-\beta(t-\tau)}[\lambda\theta(\tau)\delta_{ij} + 2\mu\varepsilon_{ij}(\tau) + 2\mu\gamma\varepsilon_u^2(\tau)e_{ij}(\tau)]d\tau, \qquad (3)$$

где λ,μ – параметры Ламе, $\theta = \varepsilon_{ii}$ – объемное расширение, δ_{ij} – символы Кронекера $e_{ij} = \varepsilon_{ij} - \frac{1}{3}\theta\delta_{ij}$ – компоненты девиатора деформаций, α,β,γ - реологические константы материала, $\varepsilon_u^2 = \frac{2}{3}e_{ij}e_{ij}$ – интенсивность деформаций.

Интегральные операторы в уравнениях (3) заменяются дифференциальными путем разложения функций

$$f(\tau) = \lambda\theta(\tau)\delta_{ij} + 2\mu\varepsilon_{ij}(\tau) + 2\mu\gamma\varepsilon_u^2(\tau)e_{ij}(\tau)$$

в ряд Тейлора по степеням $(t-\tau)$.

При условии быстрого затухания памяти материала $\beta t >> 1$ в разложениях можно сохранить два слагаемых ряда и записать

$$\sigma_{ij} = P(\lambda\theta\delta_{ij} + 2\mu\varepsilon_{ij}) + 2\gamma\mu p(\varepsilon_u^2 e_{ij}),$$

где введены операторы

$$P = \frac{\alpha}{\beta^2}\frac{\partial}{\partial t} + (1 - \frac{\alpha}{\beta}), \qquad p = \frac{\alpha}{\beta^2}\frac{\partial}{\partial t} - \frac{\alpha}{\beta},$$

действующие на функцию $f(t)$ по правилам

$$Pf = \frac{\alpha}{\beta^2}f_t + (1 - \frac{\alpha}{\beta})f, \qquad pf = \frac{\alpha}{\beta^2}f_t - \frac{\alpha}{\beta}f.$$

Компоненты девиатора деформаций:

$$e_{11} = \frac{2(1+\nu)}{3}u_x + \frac{1}{3}(1-\nu^2)u_x^2 +,$$

$$e_{22} = -\frac{1}{3}(1+\nu)u_x - \frac{1}{6}(1-\nu^2)u_x^2 - \frac{\nu^2 r^2}{6}u_{xx}^2,$$

$$e_{12} = -\frac{\nu y}{2}u_{xx} + \frac{\nu^2 y}{2}u_x u_{xx},$$

$$e_{13} = -\frac{\nu z}{2}u_{xx} + \frac{\nu^2 z}{2}u_x u_{xx},$$

где $r^2 = z^2 + y^2$.

Уравнение движения стержня выводится из вариационного принципа так же, как в работе [2] , и преобразуется к безразмерным переменным

$$\xi = \frac{x}{l} - \frac{c}{l}t,\ \tau = \varepsilon\frac{c}{l}t,\ u^* = \frac{u}{A},\ x^* = \frac{x}{d},\ y^* = \frac{y}{d},$$

где A – амплитудный параметр возмущения, l, d – соответственно характерные длина волны и поперечный размер стержня, c – скорость волны, $\varepsilon = \dfrac{A}{l}$ – характеристика нелинейности волнового процесса.

Если длина волны l значительно превосходит амплитудный параметр А, т. е. $\varepsilon = \dfrac{A}{l}$ – малый параметр, а поперечные размеры стержня и реологические постоянные α, β, γ определяют отношения порядков

$$\frac{\alpha c}{\beta^2 l} = O(\varepsilon),\ \gamma = O(\frac{1}{\varepsilon}),\ \frac{d}{l} = O(\sqrt{\varepsilon}),$$

где d – характерный размер поперечного сечения,
то безразмерное уравнение движения стержня примет вид:

$$\begin{gathered}\frac{\rho c^2}{E}\left[-u_{\xi\xi} + 2\varepsilon u_{\xi\tau} - \varepsilon^2 u_{\tau\tau} + \varepsilon\nu^2\left(u_{\xi\xi\xi\xi} - 2\varepsilon u_{\xi\xi\xi\tau} + \varepsilon^2 u_{\xi\xi\tau\tau}\right)\right] + \\ + (1 - \frac{\alpha}{\beta})u_{\xi\xi} + \varepsilon(1 - \frac{\alpha}{\beta})u_\xi u_{\xi\xi} + \frac{\alpha c}{\beta^2 l}(\varepsilon\frac{\partial}{\partial\tau} - \frac{\partial}{\partial\xi}) \cdot [u_{\xi\xi} + \varepsilon u_\xi u_{\xi\xi}] + \qquad (4) \\ + \varepsilon^2 a\gamma u_\xi^2 u_{\xi\xi} = 0,\end{gathered}$$

где $a = \dfrac{\alpha}{\beta(1+\nu)}$, а звездочки отброшены.

Функцию u представим в виде асимптотического разложения: $u = u_0 + \varepsilon u_1 + \ldots$ и подставим в уравнение (4). Из нулевого приближения следует уравнение:

$$\left[-\frac{\rho c^2}{E}+\left(1-\frac{\alpha}{\beta}\right)\right]u_{0\xi\xi}=0,$$

где E – модуль упругости.

Так как $u_{0\xi\xi}\neq 0,$ то скорость распространения волны $c=\sqrt{\frac{E}{\rho}(1-\frac{\alpha}{\beta})}.$

Из первого приближения вытекает модифицированное уравнение Кортевега де Вриза – Бюргерса:

$$\psi_\tau+b_1\psi\psi_\xi-b_2\psi^2\psi_\xi+b_3\psi_{\xi\xi}+b_4\psi_{\xi\xi\xi}=0, \qquad (5)$$

где $\psi=u_{0\xi},\;\; b_1=1-\frac{\alpha}{\beta}\;,b_2=a\gamma\varepsilon,\;\; b_3=-\frac{\alpha c}{\beta^2 l\varepsilon},\;\; b_4=\frac{\nu^2r^2d^2}{2\varepsilon l^2}.$

Точное решение уравнения (5) находится из сингулярного многообразия

$$ш=\frac{щ_0}{F}+щ_1, \qquad (6)$$

где $щ_0, щ_1, F$ – неизвестные функции независимых переменных.

Подстановка (6) в уравнение (5) дает

$$\psi_0=\pm\sqrt{\frac{6b_4}{b_2}}F_\xi,\quad \psi_1=\mathbf{m}\frac{1}{2}\sqrt{\frac{6b_4}{b_2}}\frac{F_{\xi\xi}}{F_\xi}\,\mathbf{m}\,\frac{b_3}{\sqrt{6b_2b_4}}+\frac{b_1}{2b_2},$$

где функция ψ_1 удовлетворяет уравнению (5).

В результате $\psi_0=\pm\sqrt{\frac{6b_4}{b_2}}\frac{F_\xi}{F}+\psi_1$. Подстановка в последнее равенство функции $F=1+e^{\frac{2(k_1\xi-\omega\tau)}{n}}$ приводит к точному решению уравнения (5) в виде:

$$\psi=\pm\frac{k_1}{n}\sqrt{\frac{6b_4}{b_2}}\mathrm{th}(\frac{k_1\xi-\omega\tau}{n})]\,\mathbf{m}\,\frac{b_3}{\sqrt{6b_2b_4}}+\frac{b_1}{2b_2}\;, \qquad (7)$$

где $\omega=(\frac{1}{4}\frac{b_1^2}{b_2}-\frac{1}{6}\frac{b_3^2}{b_4})k_1-\frac{2b_4}{n^2}k_1^3,\;\; n\in Z,\quad k_1$ – произвольный параметр.

Далее исследуются случаи, когда полученное решение описывает структуру ударных волн.

1) Пусть $\frac{k_1}{n} > 0$ и $\pm \frac{k_1}{2n}\sqrt{\frac{6b_4}{b_2}} \mp \frac{b_3}{\sqrt{6b_2b_4}} + \frac{b_1}{2b_2} = 0$,

тогда
$$\frac{k_1}{2n}\sqrt{\frac{6b_4}{b_2}} = \frac{b_3}{\sqrt{6b_2b_4}} \mp \frac{b_1}{2b_2}$$

и

$$\psi = (-\frac{b_1}{2b_2} \pm \frac{b_3}{\sqrt{6b_2b_4}})\mathrm{th}(\frac{k_1\xi - \omega\tau}{n})] \mp \frac{b_3}{\sqrt{6b_2b_4}} + \frac{b_1}{2b_2}.$$

В итоге

$$\psi = (\frac{b_1}{2b_2} \pm \frac{b_3}{\sqrt{6b_2b_4}})(1 - \mathrm{th}(\frac{k_1\xi - \omega\tau}{n})).$$

Если $\frac{b_1}{2b_2} > \pm \frac{b_3}{\sqrt{6b_4b_2}}$, то при выбранных условиях в стержне возникает уединенная ударная волна растяжения $(\psi > 0)$, если $\frac{b_1}{2b_2} < \pm \frac{b_3}{\sqrt{6b_4b_2}}$ – волна сжатия $(\psi < 0)$.

2) Пусть $\frac{k_1}{n} < 0$ и $\mp \frac{k_1}{2n}\sqrt{\frac{6b_4}{b_2}} \mp \frac{b_3}{\sqrt{6b_2b_4}} + \frac{b_1}{2b_2} = 0$,

тогда

$$\frac{k_1}{2n}\sqrt{\frac{6b_4}{b_2}} = -\frac{b_3}{\sqrt{6b_2b_4}} \pm \frac{b_1}{2b_2} < 0$$

и

$$\psi = (\frac{b_1}{2b_2} \mp \frac{b_3}{\sqrt{6b_2b_4}})\mathrm{th}(\frac{k_1\xi - \omega\tau}{n}) \mp \frac{b_3}{\sqrt{6b_2b_4}} + \frac{b_1}{2b_2}.$$

В результате

$$\psi = (\pm\frac{b_1}{2b_2} - \frac{b_3}{\sqrt{6b_2b_4}})(1 + th(\frac{k_1\xi - \omega\tau}{n}))\,.$$

Если $\pm\frac{b_1}{2b_2} > \frac{b_3}{\sqrt{6b_4b_2}}$ или $\frac{b_1}{2b_2} > \pm\frac{b_3}{\sqrt{6b_4b_2}}$, то при указанных условиях в оболочке возникает ударная волна растяжения $(\psi > 0)$.

Если $\pm\frac{b_1}{2b_2} < \frac{b_3}{\sqrt{6b_4b_2}}$ или $\frac{b_1}{2b_2} < \pm\frac{b_3}{\sqrt{6b_4b_2}}$, то при выбранных условиях – ударная волна сжатия $(\psi < 0)$.

Из проведенного исследования следует: как при $\frac{k_1}{2n} > 0$, так и $\frac{k_1}{2n} < 0$ в случае выполнения условия $\frac{b_1}{2b_2} > \pm\frac{b_3}{\sqrt{6b_4b_2}}$ в физически и геометрически нелинейном вязкоупругом стержне возникает уединенная ударная волна растяжения. Если выполняется условие $\frac{b_1}{2b_2} < \pm\frac{b_3}{\sqrt{6b_4b_2}}$, то образуется ударная волна сжатия.

Как и в линейном случае [2], при переходе к размерным переменным получается поправка к скорости распространения волны $\frac{\omega}{k_1}\varepsilon$.

Список литературы

1. Москвитин В.В. Сопротивление вязкоупругих материалов. М.: Наука, 1972.

2. Аршинов Г.А. Математическая модель продольных колебаний и эволюционные уравнения для линейно-вязкоупругого стержня // Научный журнал КубГАУ. 2004. № 3 (5). http: // ej. kubagro. ru.