

УДК 539.3:534:532.5

НЕЛИНЕЙНЫЕ УЕДИНЕННЫЕ УДАРНО-ВОЛНОВЫЕ СТРУКТУРЫ В ВЯЗКОУПРУГИХ СТЕРЖНЯХ

Аршинов Г.А. – канд. физ.-мат. наук

Кубанский государственный аграрный университет

Лаптев В.Н. – канд. техн. наук

Кубанский государственный аграрный университет

Елисеев Н.И. – соискатель

Краснодарский военный институт им. С.М. Штеменко

Предложен вывод уравнений движения геометрически нелинейного вязкоупругого стержня с учетом инерции поперечных движений и использования неклассических кинематических уравнений. Проанализирован общий случай, когда вязкоупругие свойства проявляются при объемных и сдвиговых деформациях. Для эволюционного уравнения Кортевега де Вриза – Бюргера, к которому сводятся методом возмущений полученные уравнения движения, определено точное решение, описывающее продольные уединенные волны. Определены условия формирования ударно-волновых структур деформации сжатия и растяжения стержня.

В работе [1] исследуются уединенные нелинейные волны в упругих стержнях. Дисперсионные нелинейные волны в вязкоупругих стержнях при упругих объемных деформациях рассмотрены в монографии [2]. В отличие от [2] в предлагаемой статье проанализирован более общий случай распространения уединенных волн, когда вязкоупругие свойства стержня проявляются при объемных и сдвиговых деформациях.

Рассмотрим бесконечный стержень неизменного поперечного сечения, свободный от внешних объемных и поверхностных воздействий. Введем систему координат, направив ось x вдоль линии центров тяжести поперечных сечений, а оси y и z расположим в одном из них. Учитывая инерцию поперечных движений, аппроксимируем перемещения точек стержня функциями [1]

$$u_1 = u(x, t), \quad u_2 = -\nu u u_x, \quad u_3 = -\nu z u_x, \quad (1)$$

где u_1, u_2, u_3 – соответственно перемещения по осям x, y, z , t – время, ν – коэффициент Пуассона.

Конечные деформации стержня зададим соотношениями тензора Грина:

$$\varepsilon_{ij} = \frac{1}{2}(u_{i,j} + u_{j,i} + u_{k,i}u_{k,j}), \quad (2)$$

предполагая, что $x_1 = x, x_2 = y, x_3 = z$.

Воспользуемся уравнениями линейной вязкоупругости для описания наследственных реологических свойств стержня [3]

$$\begin{aligned} s_{ij}(t) &= 2\mu[e_{ij}(t) - \alpha \int_{-\infty}^t e^{-\beta(t-\tau)} e_{ij}(\tau) d\tau] \\ \sigma(t) &= K[\theta(t) - \alpha \int_{-\infty}^t e^{-\beta(t-\tau)} \theta(\tau) d\tau] \end{aligned}, \quad (3)$$

где s_{ij}, e_{ij} – соответственно компоненты девиаторов напряжений и деформаций;

$\sigma = \frac{1}{3}\sigma_{ii}$ – среднее напряжение, $\theta = \varepsilon_{ii}$ – объемное расширение,

$K = \frac{E}{3(1-2\nu)}$ – модуль объемной деформации, $\mu = \frac{E}{2(1+\nu)}$ – параметр Ламе;

α, β – константы, определяющие реологические свойства стержня; E – модуль Юнга; ν – коэффициент Пуассона.

С целью упрощения исследования интегральные операторы в уравнениях (3) заменим дифференциальным разложением функции $e_{ij}(\tau), \theta(\tau)$ в

ряд Тейлора по степеням $(t - \tau)$, ограничиваясь при этом двумя слагаемыми, при условии $\beta t \gg 1$.

В результате получаем приближенные формулы для компонент напряжений

$$\sigma_{ij} = L(\lambda\theta\delta_{ij} + 2\mu\varepsilon_{ij}), \quad (4)$$

где введен оператор L , определяемый равенством $L = \frac{\alpha}{\beta^2} \frac{\partial}{\partial t} + (1 - \frac{\alpha}{\beta})$ и действующий на функцию $f(t)$ по правилу $Lf = \frac{\alpha}{\beta^2} f_t + (1 - \frac{\alpha}{\beta})f$, а $\lambda = \frac{\nu E}{(1 + \nu)(1 - 2\nu)}$ —

параметр Ламе.

Формулы (4) представим в развернутом виде:

$$\sigma_{11} = L \left\{ Eu_x + \frac{1}{2} \left[(\lambda + 2\mu) + 2\nu^2 \lambda \right] u_x^2 + (\lambda + 2\mu) \nu^2 r^2 u_{xx}^2 \right\};$$

$$\sigma_{22} = \sigma_{33} = L \left\{ \frac{1}{2} \left[2(\lambda + \mu) \nu^2 + \lambda \right] u_x^2 + \lambda \nu^2 r^2 u_{xx}^2 \right\};$$

$$\sigma_{12} = L[\mu y(-\nu u_{xx} + \nu^2 u_x u_{xx})];$$

$$\sigma_{13} = L[\mu z(-\nu u_{xx} + \nu^2 u_x u_{xx})]$$

или

$$\sigma_{11} = L[E(u_x + A_1 u_x^2 + A_2 r^2 u_{xx}^2)];$$

$$y_{22} = y_{33} = L[E(B_1 u_x^2 + B_2 r^2 u_{xx}^2)];$$

$$y_{12} = L \left[\frac{Ey}{2(1 + H)} (-H u_{xx} + H^2 u_x u_{xx}) \right];$$

$$y_{13} = L \left[\frac{Ez}{2(1 + H)} (-H u_{xx} + H^2 u_x u_{xx}) \right],$$

где

$$A_1 = a(2\nu^3 - \nu + 1), \quad B_1 = a\nu(2\nu - 2\nu^2 + 1), \quad A_2 = a\nu^2(1 - \nu),$$

$$B_2 = a\nu^3, \quad a = \frac{1}{2(1 + \nu)(1 - 2\nu)}, \quad r^2 = z^2 + y^2.$$

Уравнение движения стержня получим из вариационного принципа

$$\delta J = \int_{t_1}^{t_2} \iiint_V \{ \rho \delta \dot{u}_i - \sigma_{ij} \delta \varepsilon_{ij} \} dV = 0, \quad (5)$$

где точкой обозначена производная по t , ρ – плотность материала стержня, $\delta \varepsilon_{ij}$ – вариации деформаций, δu_i – вариации перемещений, а тройной интеграл вычисляется по объему стержня.

Вычислим вариации деформаций стержня

$$\begin{aligned} \delta \varepsilon_{11} &= \delta u_x + u_x \delta u_x + v^2 r^2 u_{xx} \delta u_{xx}, \\ \delta \varepsilon_{22} &= \delta \varepsilon_{33} = (-v + v^2 u_x) \delta u_x, \\ \delta \varepsilon_{12} &= -\frac{vy}{2} \delta u_{xx} + \frac{v^2 y}{2} (u_{xx} \delta u_x + u_x \delta u_{xx}), \\ \delta \varepsilon_{13} &= -\frac{vz}{2} \delta u_{xx} + \frac{v^2 z}{2} (u_{xx} \delta u_x + u_x \delta u_{xx}). \end{aligned}$$

Определим вариацию внутренней энергии стержня, используя формулы (4), а также вариации компонент деформации

$$\begin{aligned} \delta w &= L \left\{ E \left[-\left(u_x + B_1 u_x^2 + B_2 r^2 u_{xx}^2 + u_x^2 + A_1 u_x^3 + A_2 r^2 u_x u_{xx}^2 \right)_x + \right. \right. \\ &+ v^2 r^2 \left(u_x u_{xx} + A_1 u_{xx} u_x^2 + A_2 r^2 u_{xx}^3 \right)_{xx} + \\ &+ 2 \left(v B_1 u_x^2 + v B_2 r^2 u_{xx}^2 - v^2 B_1 u_x^3 - v^2 B_2 r^2 u_x u_{xx}^2 \right)_x + \\ &+ \frac{r^2 v^2}{4(1+v)} \left((-4_{xx} + v u_x u_{xx})_{xx} - v \left(-u_{xx}^2 + v u_x u_{xx}^2 \right)_x + \right. \\ &\left. \left. + v \left(-u_x u_{xx} + v u_x^2 u_{xx} \right)_{xx} \right] \right\} \delta u. \end{aligned}$$

После преобразований приходим к равенству:

$$\begin{aligned} \delta w &= L \left\{ E \left[-\left(u_{xx} 2A_1 u_x u_{xx} + 2A_2 r^2 u_{xx} u_{xxx} + 2u_x u_{xx} + 3A_1 u_x^2 u_{xx} + \right. \right. \\ &+ A_2 r^2 u_{xx}^4 + 2A_2 r^2 u_x u_{xx} u_{xxx} \right) + v^2 r^2 \left(u_{xx}^2 + u_x u_{xxx} + A_1 u_{xxx} u_x^2 + \right. \\ &+ 2A_1 u_{xx}^2 u_x + 3A_2 r^2 u_{xx}^2 u_{xxx} \right)_x + 2 \left(2v B_1 u_x u_{xx} + 2v B_2 r^2 u_{xx} u_{xxx} - \right. \\ &- 3v B_1 u_x^2 u_{xx} - v B_2 r^2 u_{xx}^3 - 2v^2 r^2 B_2 u_x u_{xx} u_{xxx} \left. \right) + \\ &\left. + \frac{r^2 v^2}{4(1+v)} \left(u_{xxxx} - \left(2v u_x u_{xx} - v^2 u_x u_{xx} \right)_{xx} - v \left(-u_{xx}^2 + v u_x u_{xx}^2 \right)_x \right] \right\} \delta u. \end{aligned}$$

Уравнение движения стержня получим из (5) после подстановки в него значения вариации внутренней энергии:

$$\begin{aligned}
& \rho(-u_{tt} + v^2 r^2 u_{ttxx}) + L\{E[u_{xx} - (vB_1 - 2A_1 - 2)u_x u_{xx} - \frac{v^2 r^2}{4(1+v)}u_{xxxx} + \\
& + \left(3v^2 r^2 - 2A_2 r^2 + 4vB_2 r^2 - \frac{v^3 r^2}{1+v}\right)u_{xx} u_{xxx} + \left(6v^2 r^2 A_1 - 2A_2 r^2 - 4v^2 B_2 r^2 - \frac{3v^4 r^2}{2(1+v)} - \right. \\
& \left. - \frac{v^3 r^2}{2(1+v)}\right)u_x u_{xx} u_{xxx} - (3A_1 + 6vB_1)u_x^2 u_{xx} - A_2 r^2 u_{xx}^4 + \left(v^2 r^2 + \frac{v^3 r^2}{2(1+v)}\right)u_x u_{xxxx} + \\
& + \left(2v^2 A_1 r^2 - 2v^2 B_2 r^2 + \frac{v^4 r^2}{2(1+v)}\right)u_{xx}^3 + \left(A_1 v^2 r^2 - \frac{r^2 v^4}{4(1+v)}\right)u_x^2 u_{xxxx} + \\
& \left. + 6A_2 v^2 r^4 u_{xx} u_{xxx}^2 + 3A_2 r^4 v^2 u_{xx}^2 u_{xxxx}\right\} = 0.
\end{aligned}$$

После преобразования уравнение представим в виде:

$$\begin{aligned}
& \rho(-u_{tt} + v^2 r^2 u_{ttxx}) + LE\left\{u_{xx} + (2A_1 - 4vB_1 + 2)u_x u_{xx} - \frac{v^2 r^2}{4(1+v)}u_{xxxx}\right\} + \\
& + z^2\left(2A_2 - 3v^2 - 4vB_2 + \frac{v^3}{1+v}\right)u_{xx} u_{xxx} + r^2(2A_2 - 6v^2 A_1 + 4v^2 B_2 + \\
& + \frac{3v^4}{2(1+v)} + \frac{v^3}{2(1+v)})u_x u_{xx} u_{xxx} + (3A_1 + 6vB_1)u_x^2 u_{xx} + \alpha_2 r^2 u_{xx}^4 - \\
& - z^2\left(v^2 + \frac{v^3}{2(1+v)}\right)u_x u_{xxxx} + r^2\left(-2v^2 A_1 + 2v^2 B_2 - \frac{v^4}{2(1+v)}\right)u_{xx}^3 + \\
& + r^2\left(\frac{v^4}{4(1+v)} - A_1 v^2\right) - 6A_2 v^2 r^4 u_{xx} u_{xxx}^3 - 3A_2 v^2 r^4 u_{xx}^2 u_{xxxx}\} = 0.
\end{aligned}$$

В последнем уравнении движения перейдем к безразмерным переменным

$$\xi = \frac{x}{l} - \frac{c}{l}t, \quad \tau = \varepsilon \frac{c}{l}t, \quad u^* = \frac{u}{A}, \quad x^* = \frac{x}{d}, \quad y^* = \frac{y}{d},$$

где A – амплитудный параметр возмущения; l, d – соответственно характерные длина волны и поперечный размер стержня, c – скорость волны, $\varepsilon = \frac{A}{l}$ – характеристика нелинейности волнового процесса.

Допустим, что $\varepsilon = \frac{A}{l}$ – малый параметр, т.е. характерная длина волны

l значительно превосходит амплитудный параметр A , а поперечный раз-

мер стержня и реологические постоянные α, β , определяют отношения порядков

$$\frac{\alpha c}{\beta^2 l} = O(\varepsilon), \quad \frac{d}{l} = O(\sqrt{\varepsilon}).$$

Пренебрегая членами порядка выше, чем ε , получаем безразмерное уравнение движения стержня:

$$\begin{aligned} & \frac{\rho c^2}{E} \left(-u_{\xi\xi} + 2\varepsilon u_{\xi\tau} + v^2 \frac{r^2}{l^2} u_{\xi\xi\xi\xi} \right) + \left(1 - \frac{\alpha}{\beta} \right) u_{\xi\xi} - \frac{\alpha c}{\beta^2 l} u_{\xi\xi\xi} + \\ & + 2(A_1 - 4vB_1 + 2) \left(1 - \frac{\alpha}{\beta} \right) \varepsilon u_{\xi} u_{\xi\xi} - \frac{v^2 r^2}{4(1+v)l^2} \left(1 - \frac{\alpha}{\beta} \right) u_{\xi\xi\xi\xi} = 0 \end{aligned} \quad (6)$$

Для анализа уравнения (6) применим метод возмущений. Представим функцию $u(\xi, \tau)$ в виде асимптотического разложения

$$u = u_0 + \varepsilon u_1 + \mathbf{K}. \quad (7)$$

Осуществим подстановку асимптотического разложения (7) в уравнение (6), и с учетом введенных соотношений порядков в нулевом приближении получим

$$\left[-\frac{\rho c^2}{E} + \left(1 - \frac{\alpha}{\beta} \right) \right] u_{0\xi\xi} = 0.$$

Согласно условию $u_{0\xi\xi} \neq 0$, из последнего уравнения найдем скорость распространения продольной волны в линейно-вязкоупругом стержне

$$c = \sqrt{\frac{E}{\rho} \left(1 - \frac{\alpha}{\beta} \right)}. \quad (8)$$

Из формулы (8) при $\alpha = 0$, т.е. отсутствии свойства вязкости, вытекает известная формула для скорости распространения продольной волны в линейно-упругом стержне:

$$c = \sqrt{\frac{E}{\rho}}.$$

Для разрешимости уравнения относительно неизвестной функции u_1 в разложении (7), полученном из первого приближения, необходимо, что-

бы u_0 удовлетворяло известному уравнению Кортевега де Вриза – Бюргерса:

$$\Psi_\tau + b_1\Psi\Psi_\xi + b_2\Psi_{\xi\xi\xi} + b_3\Psi_{\xi\xi} = 0, \quad (9)$$

где $\Psi = u_{0\xi}$, $b_1 = 1 - \frac{\alpha}{\beta}$, $b_2 = \frac{\nu r^2 d^2}{2l^2 \varepsilon}$, $b_3 = -\frac{\alpha c}{\beta^2 l \varepsilon}$.

При исследовании продольных волн в линейно-вязкоупругих стержнях были введены малый параметр $\frac{A}{l} = \varepsilon$ и отношение порядков $\frac{d}{l} \sim \sqrt{\varepsilon}$, из которого следует $Al \sim d^2$. Таким образом, для возникновения уединенной волны в стержне требуется условие, связывающее характерный линейный размер стержня, амплитуду и длину волны.

В работе [4] представлено подробное описание точного решения этого уравнения (9):

$$\Psi = \frac{12b_2}{b_1} k_1^2 [1 - th^2(\frac{k_1\xi - \omega\tau}{2})] + \frac{6}{5} \frac{b_3}{b_1} k_1 [1 + th(\frac{k_1\xi - \omega\tau}{2})], \quad (10)$$

где

$$25k_1^2 = \frac{b_3^2}{b_2^2}, \quad \omega = b_2 k_1^3 + \frac{6b_3 k_1^2}{5} - \frac{1}{25} \frac{b_3^3}{b_2} k_1$$

или

$$\Psi = -\frac{12b_2 k_1^2}{b_1} th^2(\frac{k_1\xi - \omega\tau}{2}) + \frac{6b_3 k_1}{5b_1} th(\frac{k_1\xi - \omega\tau}{2}) + \frac{12b_2 k_1^2}{b_1} + \frac{6b_3 k_1}{5b_1},$$

где

$$k_1 = \pm \frac{b_3}{5b_2}, \quad \omega = \frac{6b_3^3}{125b_2^2}.$$

Используя следующие обозначения

$$c_1 = -\frac{12b_2 k_1^2}{b_1}, \quad c_2 = \frac{6b_3 k_1}{5b_1}, \quad c_3 = \frac{12b_2 k_1^2}{b_1} + \frac{6b_3 k_1}{5b_1},$$

получим выражение:

$$\Psi = c_1 th^2(\frac{k_1\xi - \omega\tau}{2}) + c_2 th(\frac{k_1\xi - \omega\tau}{2}) + c_3.$$

При $\frac{b}{b} < 1$ запишем неравенства вида $b_1 > 0, b_2 > 0, b_3 < 0, \psi < 0$ и

найдем коэффициенты c_1, c_2, c_3 :

$$c_1 = -\frac{12b_3^2}{25b_1b_2}, \quad c_1 < 0; \quad c_2 = \pm \frac{6b_3^2}{25b_1b_2}, \quad c_2 \text{ имеет знак } k_1,$$

$$c_3 = \frac{12b_3^2}{25b_1b_2} \pm \frac{6b_3^2}{25b_1b_2} = \frac{6b_3^2}{25b_1b_2} (2 \pm 1), \quad c_3 > 0.$$

Если в уравнениях выбран верхний знак “+”, то с учетом $b_3 < 0$ и $k_1 < 0$ уравнение примет вид:

$$\psi = c_1 th^2\left(\frac{|k_1|\xi - |\omega|\tau}{2}\right) - c_2 th\left(\frac{|k_1|\xi - |\omega|\tau}{2}\right) + c_3,$$

где

$$c_3 = \frac{12b_2b_3^2}{25b_1b_2^2} + \frac{6b_3b_3}{25b_1b_2} = \frac{18b_3^2}{25b_1b_2}.$$

Согласно условию $\theta \rightarrow -\infty$, получим $\psi \rightarrow c_1 - c_2 + c_3$,

где

$$\theta = |k_1|\xi - |\omega|\tau, \text{ а } c_1 - c_2 + c_3 = -\frac{12b_3^2}{25b_1b_2^2} + \frac{6b_3^2}{25b_1b_2^2} + \frac{18b_3^2}{25b_1b_2^2} = \frac{12b_3^2}{25b_1b_2^2}.$$

При $\theta \rightarrow +\infty$

$$\psi \rightarrow c_1 + c_2 + c_3 = -\frac{12b_3^2}{25b_1b_2^2} - \frac{6b_3^2}{25b_1b_2^2} + \frac{18b_3^2}{25b_1b_2^2} = 0.$$

Производную представим следующим выражением:

$$\psi'_\theta = -\frac{1}{ch^2\left(\frac{|k_1|\xi - |\omega|\tau}{2}\right)} \frac{24b_3^2}{25b_1b_2^2} \left(th\left(\frac{|k_1|\xi - |\omega|\tau}{2}\right) + \frac{1}{4} \right).$$

Из уравнения $\psi'_\theta = 0$ найдем критические точки функции. В ходе преобразований получаем: $th\left(\frac{|k_1|\xi - |\omega|\tau}{2}\right) = -\frac{1}{4}$. Функция $\psi\left(\frac{\theta}{2}\right)$ будет максимальной в точке, определенной значением $\theta_{кр}$, являющимся корнем уравнения:

$$th \frac{\theta}{2} = -\frac{1}{4}.$$

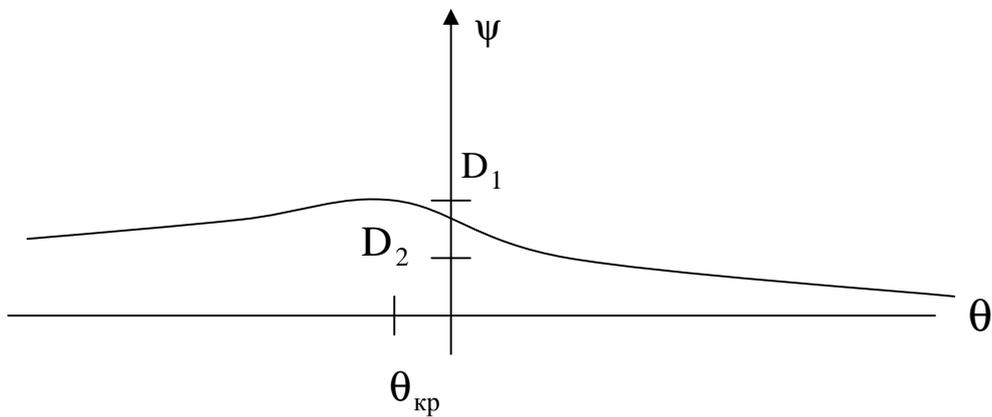
Тогда максимальное значение функции найдем по формуле

$$\Psi_{\max}\left(\frac{\theta_{кр}}{2}\right) = \frac{c_1}{16} + \frac{c_2}{4} + c_3,$$

которую можно записать в виде

$$\Psi_{\max}\left(\frac{\theta_{кр}}{2}\right) = \frac{3}{4} \frac{b_3^2}{b_1 b_2^2}.$$

Вышеприведенный анализ показывает, что при ранее указанных условиях решение уравнения (9) будет иметь структуру ударной волны, т.е. в линейно-вязкоупругом стержне образуется ударная волна растяжения ($\psi > 0$).



Зависимость деформаций от перемещений

На рисунке представлена зависимость деформации от перемещения и введены обозначения:

$$D_1 = \Psi_{\max}\left(\frac{\theta_{кр}}{2}\right) = \frac{3}{4} \frac{b_3^2}{b_1 b_2^2}, \quad D_2 = c_3 = \frac{18b_3^2}{25b_1 b_2^2}.$$

Возвращаясь к размерным переменным

$$u = k_1 \text{о-щф} = \frac{k_1}{1} \left(x - ct - \frac{\psi}{k_1} e^{ct} \right),$$

определим поправку к скорости распространения волны, согласно выражению:

$$\frac{\omega}{k_1} \varepsilon.$$

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. Потапов А.И. Нелинейные волны деформации в стержнях и пластинах. Горький: Изд-во Горьк. гос. ун-та, 1985.

2. Аршинов Г.А., Могилевич Л.И. Статические и динамические задачи вязкоупругости. Саратов: Изд-во СГАУ им. Н.И. Вавилова, 2002. 146 с.

3. Москвитин В.В. Сопротивление вязкоупругих материалов. М.: Наука, 1972.

4. Кудряшов Н.А. Точные решения нелинейных волновых уравнений, встречающихся в механике // Прикладная математика и механика. 1990. Т. 54. Вып. 3. С. 450–453.