УДК 539.3:534:532.5

ЭВОЛЮЦИОННОЕ УРАВНЕНИЕ ПРОДОЛЬНЫХ УЕДИНЕННЫХ ВОЛН В ВЯЗКОУПРУГОЙ БЕСКОНЕЧНОЙ ПЛАСТИНЕ И ЕГО ТОЧНОЕ РЕШЕНИЕ

Аршинов Г.А. – канд. физ.-мат. наук

Кубанский государственный аграрный университет

Выводятся уравнения движения геометрически нелинейной вязкоупругой пластины, используются неклассические кинематические уравнения. Рассмотрен общий случай, когда вязкоупругие свойства проявляются при объемных и сдвиговых деформациях. Полученные уравнения методом возмущений сводятся к эволюционному уравнению Кортевега де Вриза – Бюргерса – Петвиашвили, для которого определяется точное решение, описывающие продольные двумерные уединенные волны. Указываются условия, при которых формируются ударно-волновые структуры деформации пластины.

Уединенные нелинейные волны в нелинейных упругих пластинах исследуются в работе [1]. В работе [2] изучаются дисперсионные нелинейные волны в вязкоупругих пластинах при упругих объемных деформациях. В данной статье предлагается обобщение результатов, полученных в [2], когда вязкоупругие свойства пластины проявляются при объемных и сдвиговых деформациях.

Для исследования распространения нелинейных дисперсионных волн в бесконечной вязкоупругой пластине толщиной $2h$, изготовленной из материала наследственного типа и свободной от внешних воздействий, построим математическую модель волнового процесса.

С помощью кинематических соотношений определим компоненты вектора перемещений точек пластины при симметричных по толщине колебаниях и невысоких частотах [2]

$$u_1 = u(x,y,t); \quad u_2 = v(x,y,t); \qquad u_3 = z \cdot w(x,y,t), \tag{1}$$

где $u(x,y,t)$ и $v(x,y,t)$ – функции, определяющие поле перемещений в срединной плоскости пластины соответственно по осям x и y, $w(x,y,t)$ – перемещения по оси z, t – время.

Конечные деформации пластины зададим соотношениями тензора Грина

$$\varepsilon_{ij} = \frac{1}{2}(u_{i,j} + u_{j,i} + u_{k,i}u_{k,j}), \tag{2}$$

предполагая, что $x_1 = x,$, $x_2 = y,$ $x_3 = z.$.

Воспользуемся уравнениями линейной вязкоупругости для описания наследственных реологических свойств пластины [3]

$$\begin{aligned} s_{ij}(t) &= 2\mu[e_{ij}(t) - \alpha \int_{-\infty}^{t} e^{-\beta(t-\tau)} e_{ij}(\tau)\,d\tau \\ \sigma(t) &= K[\theta(t) - \alpha \int_{-\infty}^{t} e^{-\beta(t-\tau)} \theta(\tau)\,d\tau] \end{aligned}, \tag{3}$$

где s_{ij}, e_{ij} – соответственно компоненты девиаторов напряжений и деформаций; $\sigma = \frac{1}{3}\sigma_{ii}$ – среднее напряжение, $\theta = \varepsilon_{ii}$ – объемное расширение, $K = \frac{E}{3(1-2\nu)}$ – модуль объемной деформации, $\mu = \frac{E}{2(1+\nu)}$ – параметр Ламе; α, β - константы, определяющие реологические свойства стержня; E – модуль Юнга; ν – коэффициент Пуассона.

С помощью формулы (1) определим компоненты деформаций по формулам (2) и их вариации $\delta\varepsilon_{ij}$. Из закона состояния (3) найдем компоненты тензора напряжений σ_{ij}.

Далее, руководствуясь вариационным принципом

$$\int_{t_1}^{t_2}[\iint_D \int_{-h}^{h}(\sigma_{ij}\cdot\delta\varepsilon_{ij}-\rho\dot{u}_i\cdot\delta\dot{u}_i)\,\mathrm{d}x\,\mathrm{d}y\,\mathrm{d}z]\,\mathrm{d}t=0\,,$$

где ρ – плотность материала пластины, $\delta\varepsilon_{ij}$ – вариации деформаций, δu_i – вариации перемещений, точкой обозначена производная по времени, получаем интегро-дифференциальные уравнения движения пластины:

$$2h\rho\ddot{u} = \int_{-h}^{h}\{\frac{\partial}{\partial x}[(1+u_x)(A_1+B_{11})+B_{12}u_y]+\frac{\partial}{\partial y}[u_y(A_1+B_{22})+B_{12}(1+u_x)]\}\,\mathrm{d}z\,.$$

$$2h\rho\ddot{v} = \int_{-h}^{h}\{\frac{\partial}{\partial x}[v_x(A_1+B_{11})+B_{12}(1+v_y)]+\frac{\partial}{\partial y}[(1+v_y)(A_1+B_{22})+B_{12}v_x]\}\,\mathrm{d}z\,.$$

$$\frac{2h^3}{3}\rho\ddot{w} = \int_{-h}^{h}\{-(k+w)(A_1+B_{33})-z(B_{13}w_x+B_{23}w_y)+ \tag{4}$$

$$+\frac{\partial}{\partial x}[z^2w_x(A_1+B_{11})+B_{12}z^2w_y+B_{13}z(1+w)]+$$

$$+\frac{\partial}{\partial y}[z^2w_y(A_1+B_{22})+B_{12}z^2w_x+B_{23}z(1+w)]\}\,\mathrm{d}z\,,$$

где введены следующие обозначения:

$$A_1 = K(\theta-\alpha\int_{-\infty}^{t}e^{-\beta(t-\tau)}\theta(\tau)\,\mathrm{d}\tau)\,, \tag{5}$$

$$B_{ij} = 2\mu(\varepsilon_{ij}-\alpha\int_{-\infty}^{t}e^{-\beta(t-\tau)}\varepsilon_{ij}\,\mathrm{d}\tau)\,, \tag{6}$$

$k=\frac{\pi}{12}$ – поправочный коэффициент.

Для наследственных материалов с быстро затухающей памятью, когда $\beta t>>1$, систему уравнений (4) можно упростить. Заменим в выражениях (5) и (6) интегральные операторы дифференциальными, разлагая функции $\theta(\tau)$, $e_{ij}(\tau)$ в ряды Тейлора по степеням $(t-\tau)$ и сохраняя в полученных разложениях два слагаемых.

В итоге получим аппроксимации

$$A_1\approx\lambda_1\theta\,,\quad B_{ij}\approx 2\mu_1\varepsilon_{ij}\,, \tag{7}$$

где введены операторы

$$\lambda_1 = K[(1-\frac{\alpha}{\beta}) + \frac{\alpha}{\beta^2}\frac{\partial}{\partial t}], \qquad \mu_1 = \mu[(1-\frac{\alpha}{\beta}) + \frac{\alpha}{\beta^2}\frac{\partial}{\partial t}],$$

действующие на функцию $\varphi(t)$ по правилу

$$\lambda_1\varphi = K[(1-\frac{\alpha}{\beta})\varphi + \frac{\alpha}{\beta^2}\frac{\partial}{\partial t}\varphi], \quad \mu_1\varphi = \mu[(1-\frac{\alpha}{\beta})\varphi + \frac{\alpha}{\beta^2}\frac{\partial}{\partial t}\varphi].$$

Введем ряд обозначений: A – амплитуда колебаний, l – длина волны и $\varepsilon = \frac{A}{l}$ – малый параметр, позволяющий исследовать длинные волны малой амплитуды.

Заменим в системе (4) A_1 и B_{ij} их приближениями (7) и перейдем к безразмерным переменным:

$$u = Au^*, \quad v = Av^*, \quad w = hw^*, \quad \xi = \frac{x}{l} - \frac{c}{l}t, \quad \eta = \sqrt{\varepsilon}\,\frac{y}{l}, \quad \chi = \varepsilon\frac{x}{l}. \qquad (8)$$

Исследуем безразмерные уравнения движения пластины с помощью асимптотического метода. Неизвестные функции запишем в виде асимптотических разложений, опуская звездочки при соответствующих безразмерных переменных:

$$u = u_0 + \varepsilon u_1 + \ldots, \quad v = \sqrt{\varepsilon}\,(v_1 + v_2 + \ldots), \quad w = w_0\varepsilon + w_1\varepsilon^2 + \ldots\ . \qquad (9)$$

Если величины $\varepsilon = \frac{A}{l}$, $\frac{\alpha c}{\beta^2 l}$, $\frac{h^2}{l^2}$ – одного порядка малости, то разложения (9) можно подставить в безразмерные уравнения движения пластины.

Обозначенные отношения порядков позволяют для первых членов разложений составить следующую систему уравнений:

$$\rho c^2 u_{0\xi\xi} = (\lambda_2 + 2\mu_2)u_{0\xi\xi} + \lambda_2 k w_{0\xi} \qquad (10)$$

$$\lambda_2 k u_{0\xi\xi} + (\lambda_2 + 2\mu_2)k^2 w_0 = 0, \qquad (11)$$

из которой следует, что

$$w_0 = -\frac{\lambda_2}{k(\lambda_2 + 2\mu_2)}u_{0\xi}, \qquad (12)$$

где $\lambda_2 = \left(1 - \frac{\alpha}{\beta}\right)\lambda$, $\quad \mu_2 = \mu(1 - \frac{\alpha}{\beta})$.

Скорость волны найдем исходя из уравнения (10) и с учетом формулы (12):

$$c=\sqrt{\frac{1}{\rho}(\lambda_2+2\mu_2-\frac{\lambda_2^2}{\lambda_2+2\mu_2})}\,. \tag{13}$$

Далее для вторых членов разложений (9) составим систему трех уравнений:

$$2(\lambda_2+2\mu_2)u_{0\xi\chi}+(\lambda_2+\mu_2)\,v_{1xh}+\mu_2 u_{0\eta\eta}+\lambda_2 k w_{0\chi}+3(\lambda_2+$$

$$+2\mu_2)u_{0\xi}u_{0\xi\xi}+\lambda_2 w_0 w_{0\xi}+\lambda_2 k(u_{0\xi}w_0)_\xi+\frac{2\mu\alpha c}{3\beta^2 l\varepsilon}(2u_{0\xi\xi\xi}-kw_{0\xi\xi})+$$

$$+\lambda_2 k w_{1\xi}-\rho c^2 u_{1\xi\xi}+(\lambda_2+2\mu_2)u_{1\xi\xi}=0 \tag{14}$$

$$\rho c^2\,\mathrm{v}_{1\xi\xi}=(\lambda_2+\mu_2)u_{0\xi\eta}+\mu_2 v_{1\xi\xi}+\lambda_2 k w_{0\eta}\,. \tag{15}$$

$$\frac{1}{3}\frac{\rho c^2 h^2}{l^2\varepsilon}w_{0\xi\xi}=-\lambda_2 k(u_{0\chi}+v_{1\eta})+\frac{1}{3}\frac{\mu_2 h^2}{l^2\varepsilon}w_{0\xi\xi}-\frac{3}{2}(\lambda_2+2\mu_2)kw_0^2-$$

$$-\frac{1}{2}\lambda_2(ku_{0\xi}^2+2w_0u_{0\xi})-\lambda_2 k(u_{1\xi}+kw_1)-2\mu_2 k^2 w_1^2+$$

$$+\frac{2\mu\alpha c}{3\beta^2 l\varepsilon}(ku_{0\xi\xi}-2k^2 w_{0\xi})\,. \tag{16}$$

В ходе интегрирования уравнения (15) по переменной ξ и с учетом формулы (12) получим равенство:

$$v_{1\xi}=u_{0\eta}\,.$$

Принимая во внимание последнее равенство и формулу (12), продифференцируем уравнение (16) по ξ и приведем его к виду:

$$\lambda k u_{1\xi\xi}+k^2(\lambda_2+2\mu_2)w_{1\xi}=\frac{1}{3}\frac{\lambda_2 h^2(\rho c^2-\mu_2)}{l^2\varepsilon k(\lambda_2+2\mu_2)}u_{0\xi\xi\xi\xi}-\lambda_2 k u_{0\xi\chi}-$$

$$-\lambda_2 k u_{0\eta\eta}-[\lambda_2 k+\frac{\lambda_2^2}{k(\lambda_2+2\mu_2)}]u_{0\xi}u_{0\xi\xi}+\frac{2\mu\alpha c k}{3\beta^2 l\varepsilon}(1+\frac{2\lambda_2}{\lambda_2+2\mu_2})u_{0\xi\xi\xi}\,. \tag{17}$$

Приравнивая сумму последних трех слагаемых в уравнении (14) к левой части уравнения (17), умноженной на $\frac{\lambda_2}{k(\lambda_2+2\mu_2)}$, с учетом выражения (13) можно записать следующее:

$$\frac{\lambda_2}{k(\lambda_2+2\mu_2)}[\frac{1}{3}\frac{\lambda_2 h^2(\rho c^2-\mu_2)}{\varepsilon l^2 k(\lambda_2+2\mu_2)}u_{0\xi\xi\xi\xi}-\lambda_2 k u_{0\xi\chi}-\lambda_2 k u_{0\eta\eta}-$$

$$-(\lambda_2 k+\frac{\lambda_2^2}{k(\lambda_2+2\mu_2)})u_{0\xi}u_{0\xi\xi}+\frac{2\mu\alpha ck}{3\beta^2 l\varepsilon}(1+\frac{2\lambda_2}{\lambda_2+2\mu_2})u_{0\xi\xi\xi}]+$$

$$+2(\lambda_2+2\mu_2)u_{0\xi\chi}+(\lambda_2+\mu_2)v_{1\xi\eta}+\mu_2 u_{0\eta\eta}+\lambda_2 k w_{0\chi}+$$

$$+3(\lambda_2+2\mu_2)u_{0\xi}u_{0\xi\xi}+\lambda_2 w_0 w_{0\xi}+\lambda_2 k\frac{\partial}{\partial\xi}(u_{0\xi}w_0)+$$

$$+\frac{2\mu\alpha c}{3\beta^2 l\varepsilon}(2u_{0\xi\xi\xi}-kw_{0\xi\xi})=0\,.$$

В ходе тождественных преобразований последнего уравнения, используя обозначение $u_{0\xi}=\psi$, получим эволюционное уравнение Кадомцева – Петвиашвили – Бюргерса

$$(\psi_\chi+\frac{3}{2}\psi\psi_\xi+b\psi_{\xi\xi\xi}+d\psi_{\xi\xi})_\xi=-\frac{1}{2}\psi_{\eta\eta}, \qquad (18)$$

$$b=\frac{\lambda_2^2 h^2(3\lambda_2+2\mu_2)}{24k^2 l^2\varepsilon(\lambda_2+2\mu_2)^2(\lambda_2+\mu_2)},$$

$$d=\frac{\mu\alpha c(3\lambda_2^2+6\lambda_2\mu_2+4\mu_2^2)}{6\beta^2 l\varepsilon\mu_2(\lambda_2+2\mu_2)(\lambda_2+\mu_2)}.$$

Найдем точное решение уравнения (18) из сингулярного многообразия вида:

$$\text{ш}=\frac{\text{щ}_0}{F}+\text{щ}_1, \qquad (19)$$

где $\text{щ}_0, \text{щ}_1, F$ – неизвестные функции независимых переменных.

В результате подстановки выражения (19) в уравнение Кадомцева – Петвиашвили – Бюргерса можно записать равенство:

$$\text{ш}=18b\frac{\partial^2}{\partial \text{х}^2}(\ln F)+\frac{18}{5}d\frac{\partial}{\partial \text{х}}(\ln F)+\text{щ}_1, \qquad (20)$$

где щ_1 удовлетворяет условию (20) и вычисляется следующим образом:

$$\text{щ}_1=-6b\frac{F_{xxx}}{F_x}+\frac{9}{2}b\frac{F_{xx}^2}{F_x^2}-\frac{9}{2}d\frac{F_{xx}}{F_x}+\frac{3}{50}\frac{d^2}{b}-\frac{3}{2}\frac{F_x}{F_x}-\frac{3}{4}\frac{F_y^2}{F_x^2}\,. \qquad (21)$$

Подставив функцию $F=1+e^{\frac{2(k_1\xi+k_2-\omega\chi)}{n}}$ в равенство (20), приходим к точному решению уравнения КПБ:

$$\text{ш}=-\frac{72bk_1^2}{n^2}[1-th^2(\frac{k_1\,\text{о}+k_2\,\text{з}-\text{щч}}{n})]+\frac{18\,\text{d}\,k_1}{5n}[1+th(\frac{k_1\,\text{о}+k_2\,\text{з}-\text{щч}}{n})]\ , \qquad (22)$$

где k_2 – произвольный параметр, $100k_1^2=\frac{d^2}{b^2}n^2, n\in Z$,

$$\omega=\frac{4}{n^2}bk_1^3+\frac{12}{5}\frac{dk_1^2}{n}-\frac{1}{25}\cdot\frac{d^2}{b}k_1+\frac{k_2^2}{2k_1}$$

или

$$\psi=-\frac{72bk_1^2}{n^2}th^2[\frac{(k_1\xi+k_2\eta-\omega\chi)}{n}]+\frac{18dk_1}{5n}th[\frac{(k_1\xi+k_2\eta-\omega\chi)}{n}]+\frac{72bk_1^2}{n^2}+\frac{18dk_1}{5n},$$

где

$$k_1=\pm\frac{n}{2}\cdot\frac{d}{5b},\quad \omega=\frac{3d^3n}{125b^2}\pm\frac{5bk_2^2}{nd}\,. \qquad (23)$$

Волну растяжения, соответствующую неравенству $\psi>0$, получим, если в формуле (23) оставим знак «+». При этом $k_1=\frac{n}{2}\cdot\frac{d}{5b}<0$ и точное решение уравнения Кадомцева – Петвиашвили – Бюргерса описывает ударно-волновую структуру.

Возвращаясь к размерным переменным, запишем функцию

$$\varphi=k_1\xi+k_2\eta-\omega\chi=\frac{k_1}{l}(x+\frac{k_2y}{k_1}\sqrt{\varepsilon}-ct-\frac{\omega}{k_1}\varepsilon x)=x+\frac{k_2y}{k_1}\sqrt{\varepsilon}-ct-\frac{\omega}{k_1}\varepsilon ct\,,$$

согласно которой найдем поправку к скорости распространения волны:

$$\frac{\omega}{k_1}\varepsilon\,.$$

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. Потапов А.И. Нелинейные волны деформации в стержнях и пластинах. Горький: Изд-во Горьк. гос. ун-та, 1985.

2. Аршинов Г.А., Могилевич Л.И. Статические и динамические задачи вязкоупругости. Саратов: Изд-во СГАУ им. Н.И. Вавилова, 2002. 146 с.

3. Москвитин В.В. Сопротивление вязкоупругих материалов. М.: Наука, 1972.