УДК 539.3:534:532.5

ПРОДОЛЬНЫЕ НЕЛИНЕЙНЫЕ ВОЛНЫ В ВЯЗКОУПРУГИХ СТЕРЖНЯХ, ПЛАСТИНАХ И ЦИЛИНДРИЧЕСКИХ ОБОЛОЧКАХ

Аршинов Г.А. – канд. физ.-мат. наук

Кубанский государственный аграрный университет

Исследуются нелинейные дисперсионные волны в тонкостенных элементах конструкций из линейно-вязкоупругого материала наследственного типа. Для стержня и пластины рассмотрен общий случай, когда вязкоупругие свойства проявляются при объемных и сдвиговых деформациях. Уравнения движения, выведенные методом возмущений, сводятся к эволюционным уравнениям Кортевега де Вриза – Бюргерса для стержня и Кадомцева – Петвиашвили – Бюргерса для пластины и цилиндрической оболочки. Для стержня и пластины использованы неклассические кинематические уравнения, в то время как для оболочки принята модель Кирхгофа –Лява.

Рассмотрим бесконечный стержень неизменного поперечного сечения, свободный от внешних объемных и поверхностных воздействий. Введем систему координат, направив ось x вдоль линии центров тяжести поперечных сечений, а оси y и z расположим в одном из них. Учитывая инерцию поперечных движений, аппроксимируем перемещения точек стержня функциями [1]

$$u_1 = u(x,t), \qquad u_2 = -\nu y u_x, \qquad u_3 = -\nu z u_x, \tag{1}$$

где u_1, u_2, u_3 – соответственно перемещения по осям x, y, z, t – время, ν - коэффициент Пуассона.

Конечные деформации стержня зададим соотношениями:

$$\varepsilon_{ij} = \frac{1}{2}(u_{i,j} + u_{j,i} + u_{k,i}u_{k,j}), \tag{2}$$

предполагая, что $x_1 = x,$, $x_2 = y,$ $x_3 = z.$

В отличие от [2] рассмотрим общий случай, когда вязкоупругие свойства стержня проявляются при объемных и сдвиговых деформациях. Воспользуемся уравнениями линейной вязкоупругости для описания наследственных реологических свойств стержня [3]

$$\begin{aligned} s_{ij}(t) &= 2\mu[e_{ij}(t) - \alpha \int_{-\infty}^{t} e^{-\beta(t-\tau)} e_{ij}(\tau)]\,\mathrm{d}\,\tau \\ \sigma(t) &= K[\theta(t) - \alpha \int_{-\infty}^{t} e^{-\beta(t-\tau)} \theta(\tau)\,\mathrm{d}\,\tau] \end{aligned}, \tag{3}$$

где s_{ij}, e_{ij} – соответственно компоненты девиаторов напряжений и деформаций; $\sigma = \frac{1}{3}\sigma_{ii}$ – среднее напряжение, $\theta = \varepsilon_{ii}$ – объемное расширение, $K = \dfrac{E}{3(1-2\nu)}$ – модуль объемной деформации, $\mu = \dfrac{E}{2(1+\nu)}$ – параметр Ламе; α, β - константы, определяющие реологические свойства стержня; E – модуль Юнга; ν – коэффициент Пуассона.

С целью упрощения исследования интегральные операторы в уравнениях (3) заменим дифференциальными разложением функций $e_{ij}(\tau)$, $\theta(\tau)$ в ряд Тейлора по степеням ($t-\tau$), ограничиваясь при этом двумя слагаемыми, при условии βt>>1.

В результате получаем приближенные формулы для компонент напряжений

$$\sigma_{ij} = L(\lambda\theta\delta_{ij} + 2\mu\varepsilon_{ij}), \tag{4}$$

где введенный оператор $L = \dfrac{\alpha}{\beta^2}\dfrac{\partial}{\partial t} + (1 - \dfrac{\alpha}{\beta})$ действует на функцию $\mathrm{f}(t)$ по правилу $L\,\mathrm{f} = \dfrac{\alpha}{\beta^2}\mathrm{f}_t + (1-\dfrac{\alpha}{\beta})\mathrm{f}$, а $\lambda = \dfrac{\nu E}{(1+\nu)(1-2\nu)}$ – параметр Ламе.

Формулы (4) представим в развернутом виде:

$$\sigma_{11} = L\left\{ \mathrm{E}u_x + \frac{1}{2}\left[\left((\lambda+2\mu)+2\nu^2\lambda\right)u_x^2 + (\lambda+2\mu)\nu^2 r^2 u_{xx}^2\right]\right\},$$

$$\sigma_{22} = \sigma_{33} = L\left\{\frac{1}{2}\left[\left(2(\lambda+\mu)\nu^2+\lambda\right)u_x^2 + \lambda\nu^2 r^2 u_{xx}^2\right]\right\},$$

$$\sigma_{12} = L[\mu y\left(-\nu u_{xx} + \nu^2 u_x u_{xx}\right)],$$

$$\sigma_{13} = L[\mu z\left(-\nu u_{xx} + \nu^2 u_x u_{xx}\right)]$$

или

$$\sigma_{11} = L[E\left(u_x + A_1 u_x^2 + A_2 r^2 u_{xx}^2\right)],$$

$$у_{22} = у_{33} = L[\ E\ \left(B_1\,\mathrm{u}_\mathrm{x}^2 + B_2\,\mathrm{r}^2\mathrm{u}_{\mathrm{xx}}^2\right)],$$

$$у_{12} = L\left[\frac{E\,\mathrm{у}}{2(1+\mathrm{н})}\left(-\,\mathrm{нu}_{\mathrm{xx}} + \mathrm{н}^2\mathrm{u}_\mathrm{x}\mathrm{u}_{\mathrm{xx}}\right)\right],$$

$$у_{13} = L\left[\frac{E\mathrm{z}}{2(1+\mathrm{н})}\left(-\,\mathrm{н\,u}_{\mathrm{xx}} + \mathrm{н}^2\mathrm{u}_\mathrm{x}\mathrm{u}_{\mathrm{xx}}\right)\right],$$

где

$$\mathrm{A}_1 = a\left(2\nu^3 - \nu + 1\right),\quad B_1 = a\nu\left(2\nu - 2\nu^2 + 1\right),\quad A_2 = a\nu^2(1-\nu),$$

$$B_2 = a\nu^3,\qquad a = \frac{1}{2(1+\nu)(1-2\nu)},\qquad r^2 = z^2 + y^2.$$

Уравнение движения стержня получим из вариационного принципа

$$\delta J = \int_{t_1}^{t_2} \mathrm{d}t \iiint_V \{\rho \dot{u}_i \delta \dot{u}_i - \sigma_{ij}\delta\varepsilon_{ij}\}\,\mathrm{d}V = 0, \tag{5}$$

где точкой обозначена производная по t, ρ – плотность материала стержня, $\delta\varepsilon_{ij}$ – вариации деформаций, δu_i – вариации перемещений, а тройной интеграл вычисляется по объему стержня.

Вычислим вариации деформаций стержня

$$\delta\varepsilon_{11} = \delta u_x + u_x \delta u_x + \nu^2 r^2 u_{xx}\delta u_{xx},$$

$$\delta\varepsilon_{22} = \delta\varepsilon_{33} = (-\nu + \nu^2 u_x)\delta u_x,$$

$$\delta\varepsilon_{12} = -\frac{\nu y}{2}\delta u_{xx} + \frac{\nu^2 y}{2}(u_{xx}\delta u_x + u_x \delta u_{xx}),$$

$$\delta\varepsilon_{13} = -\frac{\nu z}{2}\delta u_{xx} + \frac{\nu^2 z}{2}(u_{xx}\delta u_x + u_x \delta u_{xx}).$$

Определим вариацию внутренней энергии стержня, используя формулы (4), а также вариации компонент деформации

$$\delta w = L\{E[-\left(u_x + A_1 u_x^2 + A_2 r^2 u_{xx}^2 + u_x^2 + A_1 u_x^3 + A_2 r^2 u_x u_{xx}^2\right)_x +$$

$$+\nu^2 r^2\left(u_x u_{xx} + A_1 u_{xx} u_x^2 + A_2 r^2 u_{xx}^3\right)_{xx} + +2\left(\nu B_1 u_x^2 + \nu B_2 r^2 u_{xx}^2 - \nu^2 B_1 u_x^3 - \nu^2 B_2 r^2 u_x u_{xx}^2\right)_x +$$

$$+\frac{r^2\nu^2}{4(1+\nu)}\left(\left(-4_{xx} + \nu u_x u_{xx}\right)_{xx} - \nu\left(-u_{xx}^2 + \nu u_x u_{xx}^2\right)_x + \nu\left(-u_x u_{xx} + \nu u_x^2 u_{xx}\right)_{xx}\right)\ ]\ \}\delta u\,.$$

После преобразований приходим к равенству:

$$\delta w = L\{E[-\left(u_{xx} 2A_1 u_x u_{xx} + 2A_2 r^2 u_{xx} u_{xxx} + 2u_x u_{xx} + 3A_1 u_x^2 u_{xx} +\right.$$

$$+ A_2 r^2 u_{xx}^4 + 2A_2 r^2 u_x u_{xx} u_{xxx}\big) + \nu^2 r^2\left(u_{xx}^2 + u_x u_{xxx} + A_1 u_{xxx} u_x^2 +\right.$$

$$+ 2A_1 u_{xx}^2 u_x + 3A_2 r^2 u_{xx}^2 u_{xxx}\big)_x + 2\left(2\nu B_1 u_x u_{xx} + 2\nu B_2 r^2 u_{xx} u_{xxx} -\right.$$

$$- 3\nu B_1 u_x^2 u_{xx} - \nu B_2 r^2 u_{xx}^3 - 2\nu^2 r^2 B_2 u_x u_{xx} u_{xxx}\big) +$$

$$+\frac{r^2\nu^2}{4(1+\nu)}\left(u_{xxxx} - \left(2\nu u_x u_{xx} - \nu^2 u_x u_{xx}\right)_{xx} - \nu\left(-u_{xx}^2 + \nu u_x u_{xx}^2\right)_x\right)\ ]\ \}\delta u\,.$$

Уравнение движения стержня получим из (5) после подстановки в него значения вариации внутренней энергии:

$$\rho\left(-u_{tt} + \nu^2 r^2 u_{ttxx}\right) + L\{E[u_{xx} - (u\nu B_1 - 2A_1 - 2)u_x u_{xx} - \frac{\nu^2 r^2}{4(1+\nu)} u_{xxxx} +$$

$$+\left(3\nu^2 r^2 - 2A_2 r^2 + 4\nu B_2 r^2 - \frac{\nu^3 r^2}{1+\nu}\right) u_{xx} u_{xxx} + \left(6\nu^2 r^2 A_1 - 2A_2 r^2 - 4\nu^2 B_2 r^2 - \frac{3\nu^4 r^2}{2(1+\nu)} -\right.$$

$$\left. - \frac{\nu^3 r^2}{2(1+\nu)}\right) u_x u_{xx} u_{xxx} - (3A_1 + 6\nu B_1) u_x^2 u_{xx} - A_2 r^2 u_{xx}^4 + \left(\nu^2 r^2 + \frac{\nu^3 r^2}{2(1+\nu)}\right) u_x u_{xxxx} +$$

$$+\left(2\nu^2 A_1 r^2 - 2\nu^2 B_2 r^2 + \frac{\nu^4 r^2}{2(1+\nu)}\right) u_{xx}^3 + \left(A_1 \nu^2 r^2 - \frac{r^2 \nu^4}{4(1+\nu)}\right) u_x^2 u_{xxxx} +$$

$$+ 6A_2 \nu^2 r^4 u_{xx} u_{xxx}^2 + 3A_2 r^4 \nu^2 u_{xx}^2 u_{xxxx}\ ]\ \} = 0\,.$$

После преобразования уравнение представим в виде:

$$\rho\left(-u_{tt} + \nu^2 r^2 u_{ttxx}\right) + LE\{\left[u_{xx} + (2A_1 - 4\nu B_1 + 2)u_x u_{xx} - \frac{\nu^2 r^2}{4(1+\nu)} u_{xxxx}\right] +$$

$$+ z^2\left(2A_2 - 3\nu^2 - 4\nu B_2 + \frac{\nu^3}{1+\nu}\right) u_{xx} u_{xxx} + r^2\left(2A_2 - 6\nu^2 A_1 + 4\nu^2 B_2 +\right.$$

$$+\frac{3\nu^4}{2(1+\nu)}+\frac{\nu^3}{2(1+\nu)}\Big)u_x u_{xx}u_{xxx}+(3A_1+6\nu B_1)u_x^2 u_{xx}+\alpha_2 r^2 u_{xx}^4-$$

$$-z^2\left(\nu^2+\frac{\nu^3}{2(1+\nu)}\right)u_x u_{xxxx}+r^2\left(-2\nu^2 A_1+2\nu^2 B_2-\frac{\nu^4}{2(1+\nu)}\right)u_{xx}^3+$$

$$+r^2\left(\frac{\nu^4}{4(1+\nu)}-A_1\nu^2\right)-6A_2\nu^2 r^4 u_{xx}u_{xxx}^3-3A_2\nu^2 r^4 u_{xx}^2 u_{xxxx}\Big\}=0\,.$$

В последнем уравнении движения перейдем к безразмерным переменным:

$$\xi=\frac{x}{l}-\frac{c}{l}t\,,\qquad \tau=\varepsilon\frac{c}{l}t\,,\qquad u^*=\frac{u}{A}\,,\qquad x^*=\frac{x}{d}\,,\qquad y^*=\frac{y}{d}\,,$$

где A – амплитудный параметр возмущения; l, d – соответственно характерные длина волны и поперечный размер стержня, c – скорость волны, $\varepsilon=\dfrac{A}{l}$ – характеристика нелинейности волнового процесса.

Примем допущение, что $\varepsilon=\dfrac{A}{l}$ – малый параметр, т.е. характерная длина волны l значительно превосходит амплитудный параметр A, а поперечный размер стержня и реологические постоянные α,β определяют отношения порядков

$$\frac{\alpha c}{\beta^2 l}=O(\varepsilon)\,,\qquad \frac{d}{l}=O(\sqrt{\varepsilon})\,.$$

Пренебрегая членами порядка выше, чем ε, получаем безразмерное уравнение движения стержня:

$$\frac{\rho c^2}{E}\left(-u_{\xi\xi}+2\varepsilon u_{\xi\tau}+\nu^2\frac{r^2}{l^2}u_{\xi\xi\xi\xi}\right)+\left(1-\frac{\alpha}{\beta}\right)u_{\xi\xi}-\frac{\alpha c}{\beta^2 l}u_{\xi\xi\xi}+$$

$$+2(A_1-4\nu B_1+2)\left(1-\frac{\alpha}{\beta}\right)\varepsilon u_\xi u_{\xi\xi}-\frac{\nu^2 r^2}{4(1+\nu)l^2}\left(1-\frac{\alpha}{\beta}\right)u_{\xi\xi\xi\xi}=0 \qquad (6)$$

Для анализа уравнения (6) применим метод возмущений. Представим функцию $u(\xi,\tau)$ в виде асимптотического разложения

$$u=u_0+\varepsilon u_1+\mathbf{K} \qquad (7)$$

Осуществим подстановку асимптотического разложения (7) в уравнение (6). С учетом введенных соотношений порядков в нулевом приближении получим

$$\left[-\frac{\rho c^2}{E}+\left(1-\frac{\alpha}{\beta}\right)\right]u_{0\xi\xi}=0 .$$

Согласно условию $u_{0\xi\xi}\neq 0$, из последнего уравнения найдем скорость распространения продольной волны в линейно-вязкоупругом стержне

$$c=\sqrt{\frac{E}{\rho}(1-\frac{\alpha}{\beta})} . \tag{8}$$

Из формулы (8) при $\alpha=0$, т.е. отсутствии свойства вязкости, вытекает известная формула для скорости распространения продольной волны в линейно-упругом стержне:

$$c=\sqrt{\frac{E}{\rho}} .$$

Для разрешимости уравнения относительно неизвестной функции u_1 в разложении (7), полученном из первого приближения, необходимо, чтобы u_0 удовлетворяло известному уравнению Кортевега де Вриза – Бюргерса:

$$\psi_\tau+b_1\psi\psi_\xi+b_2\psi_{\xi\xi\xi}+b_3\psi_{\xi\xi}=0 ,$$

где $\psi=u_{0\xi}$, $b_1=1-\dfrac{\alpha}{\beta}$, $b_2=\dfrac{\nu r^2 d^2}{2l^2\varepsilon}$, $b_3=-\dfrac{\alpha c}{\beta^2 l\varepsilon}$.

С целью исследования распространения нелинейных дисперсионных волн в бесконечной вязкоупругой пластине толщиной 2h, изготовленной из материала наследственного типа и свободной от внешних воздействий, построим математическую модель волнового процесса.

С помощью кинематических соотношений определим компоненты вектора перемещений точек пластины при симметричных по толщине колебаниях и невысоких частотах [2]

$$u_1 = u(x,y,t); \quad u_2 = v(x,y,t); \qquad u_3 = z\cdot w(x,y,t), \tag{9}$$

где $u(x,y,t)$ и $v(x,y,t)$ – функции, определяющие поле перемещений в срединной плоскости пластины по осям x и y соответственно, $w(x,y,t)$ – перемещения по оси z, t – время.

Зададим физические соотношения между напряжениями и деформациями уравнениями линейной наследственной теории вязкоупругости (3), содержащими экспоненциальное разностное ядро, обобщая результаты [2] на тот случай, когда вязкоупругие свойства среды проявляются при объемных и сдвиговых деформациях.

С помощью формулы (9) определим компоненты деформаций по формулам (2) и их вариации $\delta\varepsilon_{ij}$. Из закона состояния (3) найдем компоненты тензора напряжений σ_{ij}.

Далее, руководствуясь вариационным принципом

$$\int_{t_1}^{t_2}[\iint_D\int_{-h}^{h}(\sigma_{ij}\cdot\delta\varepsilon_{ij} - \rho\dot{u}_i\cdot\delta\dot{u}_i)\,\mathrm{d}x\,\mathrm{d}y\,\mathrm{d}z]\mathrm{d}t = 0\,,$$

где ρ – плотность материала пластины, $\delta\varepsilon_{ij}$ – вариации деформаций, δu_i – вариации перемещений, точкой обозначена производная по времени, получаем интегро-дифференциальные уравнения движения пластины:

$$2h\rho\,\ddot{u} = \int_{-h}^{h}\{\frac{\partial}{\partial x}[\,(1+u_x)(A_1+B_{11})+B_{12}u_y] + \frac{\partial}{\partial y}[u_y(A_1+B_{22})+B_{12}(1+u_x)]\}\mathrm{d}z\,.$$

$$2h\rho\,\ddot{v} = \int_{-h}^{h}\{\frac{\partial}{\partial x}[\,v_x(A_1+B_{11})+B_{12}(1+v_y)] + \frac{\partial}{\partial y}[(1+v_y)(A_1+B_{22})+B_{12}v_x]\}\ \mathrm{d}z\,.$$

$$\frac{2h^3}{3}\rho\,\ddot{w} = \int_{-h}^{h}\{-(k+w)(A_1+B_{33}) - z(B_{13}w_x + B_{23}w_y) + \tag{10}$$

$$+\frac{\partial}{\partial x}[z^2w_x(A_1+B_{11})+B_{12}z^2w_y+B_{13}z(1+w)] +$$

$$+\frac{\partial}{\partial y}[z^2w_y(A_1+B_{22})+B_{12}z^2w_x+B_{23}z(1+w)]\}\mathrm{d}z\,,$$

где введены следующие обозначения:

$$A_1 = K(\theta - \alpha \int\limits_{-\infty}^{t} e^{-\beta(t-\tau)} \theta(\tau)\,d\tau)\,, \tag{11}$$

$$B_{ij} = 2\mu(\varepsilon_{ij} - \alpha \int\limits_{-\infty}^{t} e^{-\beta(t-\tau)} \varepsilon_{ij}\,d\tau)\,, \tag{12}$$

$k = \dfrac{\pi}{12}$ – поправочный коэффициент.

Для наследственных материалов с быстро затухающей памятью, когда $\beta t >> 1$, систему уравнений (10) можно упростить. Заменим в выражениях (11) и (12) интегральные операторы дифференциальными, разлагая функции $\theta(\tau)$, $e_{ij}(\tau)$ в ряды Тейлора по степеням $(t-\tau)$ и сохраняя в полученных разложениях два слагаемых.

В итоге получим аппроксимации

$$A_1 \approx \lambda_1 \theta\,, \quad B_{ij} \approx 2\mu_1 \varepsilon_{ij}\,, \tag{13}$$

где введены операторы

$$\lambda_1 = K[(1-\frac{\alpha}{\beta}) + \frac{\alpha}{\beta^2}\frac{\partial}{\partial t}], \qquad \mu_1 = \mu[(1-\frac{\alpha}{\beta}) + \frac{\alpha}{\beta^2}\frac{\partial}{\partial t}]\,,$$

действующие на функцию $\varphi(t)$ по правилу

$$\lambda_1 \varphi = K[(1-\frac{\alpha}{\beta})\varphi + \frac{\alpha}{\beta^2}\frac{\partial}{\partial t}\varphi], \qquad \mu_1 \varphi = \mu[(1-\frac{\alpha}{\beta})\varphi + \frac{\alpha}{\beta^2}\frac{\partial}{\partial t}\varphi]\,.$$

Введем ряд обозначений: A – амплитуда колебаний, l – длина волны и $\varepsilon = \dfrac{A}{l}$ – малый параметр, позволяющий нам исследовать длинные волны малой амплитуды.

Заменим в системе (10) A_1 и B_{ij} их приближениями (13) и перейдем к безразмерным переменным:

$$u = Au^*, \quad v = Av^*, \quad w = hw^*, \quad \xi = \frac{x}{l} - \frac{c}{l}t\,, \quad \eta = \sqrt{\varepsilon}\,\frac{y}{l}\,, \ \chi = \varepsilon\frac{x}{l}\,. \tag{14}$$

Исследуем безразмерные уравнения движения пластины с помощью асимптотического метода. Неизвестные функции запишем в виде асимптотических разложений, опуская звездочки при соответствующих безразмерных переменных:

$$u = u_0 + \varepsilon u_1 + \ldots, \quad v = \sqrt{\varepsilon}\,(v_1 + v_2 + \ldots), \quad w = w_0\varepsilon + w_1\varepsilon^2 + \ldots \,. \tag{15}$$

Если величины $\varepsilon = \dfrac{A}{l}, \ \dfrac{\alpha c}{\beta^2 l}, \ \dfrac{h^2}{l^2}$ – одного порядка малости, то разложения (15) можно подставить в безразмерные уравнения движения пластины.

Обозначенные отношения порядков позволяют для первых членов разложений составить следующую систему уравнений:

$$\rho c^2 u_{0\xi\xi} = (\lambda_2 + 2\mu_2)u_{0\xi\xi} + \lambda_2 k w_{0\xi} \tag{16}$$

$$\lambda_2 k u_{0\xi\xi} + (\lambda_2 + 2\mu_2)k^2 w_0 = 0, \tag{17}$$

из которой следует, что

$$w_0 = -\frac{\lambda_2}{k(\lambda_2 + 2\mu_2)} u_{0\xi}, \tag{18}$$

где $\lambda_2 = \left(1 - \dfrac{\alpha}{\beta}\right)\lambda, \quad \mu_2 = \mu(1 - \dfrac{\alpha}{\beta})$.

Из уравнения (16) найдем скорость волны с учетом формулы (18):

$$c = \sqrt{\frac{1}{\rho}(\lambda_2 + 2\mu_2 - \frac{\lambda_2^2}{\lambda_2 + 2\mu_2})}\,. \tag{19}$$

Далее для вторых членов разложений (15) составим систему трех уравнений:

$$2(\lambda_2 + 2\mu_2)u_{0\xi\chi} + (\lambda_2 + \mu_2)\mathrm{v}_{1xh} + \mu_2 u_{0\eta\eta} + \lambda_2 k w_{0\chi} + 3(\lambda_2 +$$

$$+ 2\mu_2)u_{0\xi}u_{0\xi\xi} + \lambda_2 w_0 w_{0\xi} + \lambda_2 k(u_{0\xi}w_0)_\xi + \frac{2\mu\alpha c}{3\beta^2 l\varepsilon}(2u_{0\xi\xi\xi} - k w_{0\xi\xi}) +$$

$$+ \lambda_2 k w_{1\xi} - \rho c^2 u_{1\xi\xi} + (\lambda_2 + 2\mu_2)u_{1\xi\xi} = 0 \tag{20}$$

$$\rho c^2 \mathrm{v}_{1\xi\xi} = (\lambda_2 + \mu_2)u_{0\xi\eta} + \mu_2 \mathrm{v}_{1\xi\xi} + \lambda_2 k w_{0\eta}\,. \tag{21}$$

$$\frac{1}{3}\frac{\rho c^2 h^2}{l^2\varepsilon}w_{0\xi\xi}=-\lambda_2 k(u_{0\chi}+\mathrm{v}_{1\eta})+\frac{1}{3}\frac{\mu_2 h^2}{l^2\varepsilon}w_{0\xi\xi}-\frac{3}{2}(\lambda_2+2\mu_2)kw_0^2-$$

$$-\frac{1}{2}\lambda_2(ku_{0\xi}^2+2w_0u_{0\xi})-\lambda_2 k(u_{1\xi}+kw_1)-2\mu_2 k^2 w_1^2+\frac{2\mu\alpha c}{3\beta^2 l\varepsilon}(ku_{0\xi\xi}-2k^2 w_{0\xi})\,. \qquad (22)$$

В ходе интегрирования уравнения (21) по переменной ξ и с учетом формулы (18) получим равенство $v_{1\xi}=u_{or}$.

Принимая во внимание последнее равенство и формулу (18), продифференцируем уравнение (22) по ξ и приведем его к виду:

$$\lambda k u_{1\xi\xi}+k^2(\lambda_2+2\mu_2)w_{1\xi}=\frac{1}{3}\frac{\lambda_2 h^2(\rho c^2-\mu_2)}{l^2\varepsilon k(\lambda_2+2\mu_2)}u_{0\xi\xi\xi\xi}-$$

$$-\lambda_2 k u_{0\xi\chi}-\lambda_2 k u_{0\eta\eta}-[\lambda_2 k+\frac{\lambda_2^2}{k(\lambda_2+2\mu_2)}]u_{0\xi}u_{0\xi\xi}+ \qquad (23)$$

$$+\frac{2\mu\alpha ck}{3\beta^2 l\varepsilon}(1+\frac{2\lambda_2}{\lambda_2+2\mu_2})u_{0\xi\xi\xi}\,.$$

Приравнивая сумму последних трех слагаемых в уравнении (20) к левой части уравнения (23), умноженной на $\frac{\lambda_2}{k(\lambda_2+2\mu_2)}$, с учетом выражения (19) можно записать следующее:

$$\frac{\lambda_2}{k(\lambda_2+2\mu_2)}[\frac{1}{3}\frac{\lambda_2 h^2(\rho c^2-\mu_2)}{\varepsilon l^2 k(\lambda_2+2\mu_2)}u_{0\xi\xi\xi\xi}-\lambda_2 k u_{0\xi\chi}-\lambda_2 k u_{0\eta\eta}-$$

$$-(\lambda_2 k+\frac{\lambda_2^2}{k(\lambda_2+2\mu_2)})u_{0\xi}u_{0\xi\xi}+\frac{2\mu\alpha ck}{3\beta^2 l\varepsilon}(1+\frac{2\lambda_2}{\lambda_2+2\mu_2})u_{0\xi\xi\xi}]+$$

$$+2(\lambda_2+2\mu_2)u_{0\xi\chi}+(\lambda_2+\mu_2)\mathrm{v}_{1\xi\eta}+\mu_2 u_{0\eta\eta}+\lambda_2 k w_{0\chi}+$$

$$+3(\lambda_2+2\mu_2)u_{0\xi}u_{0\xi\xi}+\lambda_2 w_0 w_{0\xi}+\lambda_2 k\frac{\partial}{\partial\xi}(u_{0\xi}w_0)+$$

$$+\frac{2\mu\alpha c}{3\beta^2 l\varepsilon}(2u_{0\xi\xi\xi}-kw_{0\xi\xi})=0\,.$$

В ходе тождественных преобразований последнего уравнения, используя обозначение $u_{0\xi}=\psi$, получим эволюционное уравнение Кадомцева – Петвиашвили – Бюргерса:

$$(\psi_\chi + \frac{3}{2}\psi\psi_\xi + b\psi_{\xi\xi\xi} + \mathrm{d}\,\psi_{\xi\xi})_\xi = -\frac{1}{2}\psi_{\eta\eta},$$

где

$$b = \frac{\lambda_2^2 h^2 (3\lambda_2 + 2\mu_2)}{24k^2 l^2 \varepsilon(\lambda_2 + 2\mu_2)^2 (\lambda_2 + \mu_2)},$$

$$d = \frac{\mu\alpha c(3\lambda_2^2 + 6\lambda_2\mu_2 + 4\mu_2^2)}{6\beta^2 l\varepsilon\mu_2(\lambda_2 + 2\mu_2)(\lambda_2 + \mu_2)}.$$

Выведем эволюционное уравнение для бесконечной однородной цилиндрической оболочки толщиной h и радиуса R, выполненной из линейного вязкоупругого материала и работающей в условиях гипотезы Кирхгофа –Лява и отсутствия инерции вращения. Оболочку отнесем к цилиндрической системе координат, направляя ось x по образующей оболочки, y – по касательной к осевому сечению, z – по нормали к срединной поверхности оболочки, и допустим отсутствие объемных и поверхностных сил.

Гипотеза Кирхгофа – Лява приводит к компонентам деформаций [4]:

$$\varepsilon_x^z = U_x + \frac{1}{2}[(U_x - zW_{xx})^2 + (V_x - zW_{yy})^2 + W_x^2] - zW_{xx}.$$

$$\varepsilon_y^z = V_y - K_y W + \frac{1}{2}[(U_y - zW_{xy})^2 + (V_y - zW_{yy})^2 + W_y^2] - zW_{yy}.$$

$$\gamma^z = U_y + V_x + (U_x - zW_{xx})(U_y - zW_{xy}) + (V_x - zW_{xy})\times \qquad (24)$$

$$\times(V_y - zW_{yy}) + W_x W_y - 2zW_{xy},$$

где U, V, W – компоненты перемещения точек срединной поверхности соответственно по осям x, y, z; верхний индекс z указывает на то, что компоненты деформаций определены в слое, удаленном на расстоянии z от срединной поверхности; $K_y = \frac{1}{R}$ – кривизна оболочки.

Связь между компонентами напряжения и деформаций зададим уравнениями линейной теории вязкоупругости, учитывающей линейную упругость объемных деформаций:

$$\sigma_x^z = \frac{E}{1-\nu^2}(\varepsilon_x + \nu\varepsilon_y) - 2\mu\alpha\int_{-\infty}^{t} e^{-\beta(t-\tau)} e_x \, d\tau,$$

$$\sigma_y^z = \frac{E}{1-\nu^2}(\varepsilon_y + \nu\varepsilon_x) - 2\mu\alpha\int_{-\infty}^{t} e^{-\beta(t-\tau)} e_y \, d\tau, \qquad (25)$$

$$\tau = \mu[\gamma - \alpha\int_{-\infty}^{t} e^{-\beta(t-\tau)} \gamma \, d\tau],$$

где E – модуль Юнга, μ – параметр Ламе, ν – коэффициент Пуассона, t – время; α, β – параметры вязкоупругости, $e_x = \varepsilon_x - \frac{1}{3}(\varepsilon_x + \varepsilon_y)$, $e_y = \varepsilon_y - \frac{1}{3}(\varepsilon_x + \varepsilon_y)$ – компоненты девиатора деформаций.

Разлагая функции e_x, e_y, γ в ряд Тейлора по степеням $(t-\tau)$, при условии быстрого затухания памяти материала $\beta t >> 1$ и сохранения двух членов разложения, из соотношений (25) получим приближенные уравнения состояния:

$$\sigma_x = N\varepsilon_x + L\varepsilon_y, \ \sigma_y = N\varepsilon_y + L\varepsilon_x, \ \tau = K\gamma,$$

где введены обозначения

$$N = \frac{E}{1-\nu^2} + \frac{2p}{3}; \ L = \frac{\nu E}{1-\nu^2} - \frac{p}{3}; \ K = \frac{E}{2(1+\nu)} + p,$$

и оператор $p = 2\mu(\frac{\alpha}{\beta^2}\frac{\partial}{\partial t} - \frac{\alpha}{\beta})$, действующий на функцию $f(t)$ по правилу

$$p f = 2\mu(\frac{\alpha}{\beta^2} f_t - \frac{\alpha}{\beta} f).$$

Используя последние формулы для напряжений, вычислим усилия и моменты, действующие на выделенный элемент оболочки по формулам [4]

$$N_x = \int_{-\frac{h}{2}}^{\frac{h}{2}} \sigma_x \, dz, \qquad N_y = \int_{-\frac{h}{2}}^{\frac{h}{2}} \sigma_y \, dz, \qquad T = \int_{-\frac{h}{2}}^{\frac{h}{2}} \tau_y \, dz,$$

$$M_x = \int_{-\frac{h}{2}}^{\frac{h}{2}} \sigma_x z \, dz, \qquad M_y = \int_{-\frac{h}{2}}^{\frac{h}{2}} \sigma_y z \, dz, \qquad H_y = \int_{-\frac{h}{2}}^{\frac{h}{2}} \tau_y z \, dz,$$

и подставим усилия и моменты в уравнения движения оболочки

$$\frac{\partial N_x}{\partial x}+\frac{\partial T}{\partial y}-\rho h\frac{\partial^2 U}{\partial t^2}=0\,.$$

$$\frac{\partial T}{\partial x}+\frac{\partial N_y}{\partial y}-\rho h\frac{\partial^2 V}{\partial t^2}=0\,.$$

$$\frac{\partial^2 M_x}{\partial x^2}+\frac{\partial^2 M_y}{\partial y^2}+2\frac{\partial^2 H}{\partial x\partial y}+K_y N_y+\frac{\partial}{\partial x}(N_x\frac{\partial W}{\partial x}+T\frac{\partial W}{\partial y})+\frac{\partial}{\partial y}(T\frac{\partial W}{\partial x}+N_y\frac{\partial W}{\partial y})-\rho h\frac{\partial^2 W}{\partial t^2}=0\,,$$

где ρ – плотность материала.

Введем безразмерные переменные

$$U=AU^*,\;\; V=AV^*,\;\; W=hW^*,\quad x=lx^*,\;\; y=Ry^*. \qquad (26)$$

Рассмотрим волны малой амплитуды и большой длины. Будем считать толщину оболочки h малой по сравнению с радиусом кривизны R и малыми безразмерные параметры:

$$\varepsilon=\frac{A}{l},\quad \delta_1=\frac{\sqrt{hR}}{l},\quad \delta_2=\frac{h}{R},\quad \delta_3=\frac{A}{R}. \qquad (27)$$

Допустим, что δ_1,δ_2 эквивалентны ε, тогда как δ_3 эквивалентно $\sqrt{\varepsilon}$.

Перейдем в уравнениях движения к безразмерным переменным (26). Совершим замену переменных

$$\xi=x^*-\frac{c_1}{l}t,\;\; \eta=\varepsilon y^*,\;\; \tau=\varepsilon\frac{c_1}{l}t\,,$$

где c_1 – неизвестная величина,

и одновременно представим $U^*,\;\; V^*,\;\; W^*$ в виде следующих асимптотических разложений, опуская звездочки при соответствующих безразмерных переменных:

$$U=U_0+\varepsilon U_1+\ldots,\;\; V=\sqrt{\varepsilon}(V_0+\varepsilon V_1+\ldots),\; W=W_0+\varepsilon W_1+\ldots$$

Тогда, полагая параметр $\frac{\alpha c_1}{\beta^2 l}$ эквивалентным ε, в нулевом приближении из уравнений движения получим:

$$[E(1-\frac{\alpha_1}{3})-\rho(1-\nu^2)c_1^2]U_{0\xi\xi}+E(\frac{\alpha_1}{6}-\nu)\frac{h}{R\varepsilon}W_{0\xi}=0\,. \qquad (27)$$

$$[\frac{1}{2}E(1-\nu-\alpha_1)-\rho(1-\nu^2)c_1^2]V_{0\xi\xi}+E[\frac{A}{\sqrt{\varepsilon}R}(\frac{1+\nu}{2}-\frac{\alpha_1}{3})U_{0\xi\eta}+$$

$$+\frac{hl}{R^2\sqrt{\varepsilon}}(\frac{\alpha_1}{3}-1)W_{0\eta}]=0\,. \tag{28}$$

$$\frac{h}{R\varepsilon}W_0=\nu_1 U_{0\xi}\,, \tag{29}$$

где $\alpha_1=\dfrac{\alpha}{\beta(1+\nu)}$, $\quad \nu_1=\dfrac{3}{2}\dfrac{2\nu-\alpha_1}{3-\alpha_1}$.

В силу уравнения (29) из уравнения (27) получаем скорость волны:

$$c_1=\sqrt{\frac{E}{\rho}\frac{\alpha_2}{(1-\nu^2)}}, \tag{30}$$

где $\alpha_2=1-\dfrac{\alpha_1}{3}+\dfrac{3}{2}(\dfrac{\alpha_1}{6}-\nu)\dfrac{2\nu-\alpha_1}{3-\alpha_1}$.

При $\alpha_2>0$ скорость c_1 – ненулевая, действительная величина. Из неравенства $\alpha_2>0$ следует, что $\alpha_2-24(1-н)\alpha_1+36(1-\nu^2)>0.$ Последнее неравенство выполняется, если $\alpha_1<12(1-\nu)-6\sqrt{(1-\nu)(3-5\nu)}$ или $\alpha_1>12(1-\nu)+6\sqrt{(1-\nu)(3-5\nu)},$ что возможно при соответствующем выборе α, β, ν.

В первом приближении получим систему уравнений, условием разрешимости которой является уравнение Кадомцева – Петвиашвили – Бюргерса для $\psi=U_{0\xi}$:

$$[\psi_\tau+b_1\psi\psi_\xi+b_2\psi_{\xi\xi\xi}+b_3\psi_{\xi\xi}]_\xi=-b_4\psi_{\eta\eta}\,,$$

где введены обозначения:

$$b_1=\frac{1}{2\alpha_2}[1-\frac{\alpha_1}{3}-(\nu-\frac{\alpha_1}{6})^2],\qquad b_2=\frac{Rh\nu_1}{2l^2\varepsilon^2}(\frac{\alpha_1}{6}-\nu),$$

$$b_3=\frac{\alpha_1 c_1}{4\alpha_2\beta\varepsilon l}[(\frac{\alpha_1}{6}-\nu)(\frac{2h\nu_1}{3R\varepsilon}+\frac{1}{3})+\frac{2}{3}-\frac{h\nu_1}{3R\varepsilon}],$$

$$b_4=\frac{1}{A_2}(\nu-\frac{\alpha_1}{6})(1+\frac{A\alpha_1}{3R\sqrt{\varepsilon}})-\frac{lA}{2R^2}(1-\nu-\frac{\alpha_1}{2})-\frac{A(1+\nu-\frac{\alpha_1}{3})}{4R\alpha_2 A_2\sqrt{\varepsilon}}\,.$$

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. Работнов Ю.М. Механика деформируемого твердого тела. М.: Наука, 1979. 744 с.

2. Москвитин В.В. Сопротивление вязкоупругих материалов. М.: Наука, 1972.

3. Аршинов Г.А., Могилевич Л.И. Статические и динамические задачи вязкоупругости. Саратов: Изд-во СГАУ им Н.И. Вавилова, 2002. 146 с.

4. Вольмир А.С. Нелинейная динамика пластинок и оболочек. М.: Наука, 1972.