УДК 539.3:532.5

НЕЛИНЕЙНАЯ ДИНАМИКА ФИЗИЧЕСКИ ЛИНЕЙНОЙ И НЕЛИНЕЙНОЙ ВЯЗКОУПРУГОЙ ПЛАСТИНЫ

Аршинов Г.А.

Кубанский государственный аграрный университет

Метод возмущений применяется для исследования дисперсионных волн в геометрически нелинейной пластине из линейно- и нелинейно-вязкоупругого материала. Выведены эволюционное уравнения Кадомцева – Петвиашвили – Бюргерса для физически линейной и модифицированное уравнение для физически нелинейной пластины.

Рассматривается бесконечная пластина толщиной 2h, свободная от внешних воздействий. Компоненты вектора перемещений точек пластины при симметричных по толщине колебаниях и невысоких частотах зададим соотношениями [1:

$$u_1 = u(x,y,t); \quad u_2 = v(x,y,t); \qquad u_3 = z \cdot w(x,y,t), \qquad (1)$$

в которых $u(x,y,t)$ и $v(x,y,t)$ – функции, определяющие поле перемещений в срединной плоскости по осям x и y соответственно; $w(x,y,t)$ – перемещения по оси ; t – время.

Используя кинематические соотношения (1) и формулы Лагранжа для конечных деформаций

$$\varepsilon_{ij} = \frac{1}{2}(u_{i,j} + u_{j,i} + u_{k,i} \cdot u_{k,j}) \qquad (2)$$

вычислим компоненты тензора деформаций.

Реологические свойства пластины зададим уравнениями линейной теории вязкоупругости, содержащими экспоненциальное ядро вида[2].

$$\sigma_{ij}(t)=\lambda\theta(t)\delta_{ij}+2\mu\varepsilon_{ij}(t)-\alpha\int\limits_{-\infty}^{t}e^{-\beta(t-\tau)}[\lambda\theta(\tau)\delta_{ij}+2\mu\varepsilon_{ij}(\tau)]d\tau, \qquad (3)$$

где $\sigma_{ij},\varepsilon_{ij}$ – соответственно компоненты тензоров напряжений и деформаций; $\theta=\varepsilon_{ii}$ – объемное расширение; δ_{ij} – символы Кронекера; α,β – реологические параметры;

λ,μ – упругие постоянные Ламе.

Уравнения движения пластины получим, применяя вариационный принцип

$$\int\limits_{t_1}^{t_2}[\iint\limits_{D}\int\limits_{-h}^{h}(\sigma_{ij}\cdot\delta\varepsilon_{ij}-\rho\,\dot{u}_i\cdot\delta\dot{u}_i)dxdydz]dt=0, \qquad (4)$$

где ρ – плотность материала пластины; $\delta\varepsilon_{ij}$ – вариации деформаций; δu_i – вариации перемещений; точкой обозначена производная по времени.

В результате вычисления компонент деформаций (2) на основе функций (1), вариаций $\delta\varepsilon_{ij},\delta u_i$, затем компонент тензора напряжений σ_{ij} из закона состояния (3) и подстановки найденных величин в уравнение (4), из последнего в силу произвольности вариаций δu_i после интегрирования по переменной *z* получаем интегро-дифференциальные уравнения движения пластины:

$$2h\rho\ddot{u}=\int\limits_{-h}^{h}\{\frac{\partial}{\partial x}[(1+u_x)(A_1+B_{11})+B_{12}u_y]+\frac{\partial}{\partial y}[u_y(A_1+B_{22})+$$

$$+B_{12}(1+u_x)]\}dz.$$

$$2h\rho v=\int\limits_{-h}^{h}\{\frac{\partial}{\partial x}[v_x(A_1+B_{11})+B_{12}(1+v_y)]+\frac{\partial}{\partial y}[(1+v_y)(A_1+$$

$$+B_{22})+B_{12}v_x]\}\ dz.$$

$$\frac{2h^3}{3}\rho\ddot{w}=\int\limits_{-h}^{h}\{-(k+w)(A_1+B_{33})-z(B_{13}w_x+B_{23}w_y)+ \qquad (5)$$

$$+\frac{\partial}{\partial x}[z^2w_x(A_1+B_{11})+B_{12}z^2w_y+B_{13}z(1+w)]+$$

$$+\frac{\partial}{\partial y}[z^2w_y(A_1+B_{22})+B_{12}z^2w_x+B_{23}z(1+w)]\}dz,$$

где введены следующие обозначения:

$$A_1 = K(\theta - \alpha \int\limits_{-\infty}^{t} e^{-\beta(t-\tau)}\theta(\tau)d\tau) \qquad (6)$$

$$B_{ij} = 2\mu(\varepsilon_{ij} - \alpha \int\limits_{-\infty}^{t} e^{-\beta(t-\tau)}\varepsilon_{ij}d\tau), \qquad (7)$$

$k = \dfrac{\pi}{12}$ – поправочный коэффициент, а К – модуль объемного расширения.

Буквенные индексы в системе (5), как и ранее, определяют производную по соответствующей переменной.

Заменим интегральные операторы в формулах (6) и (7) дифференциальными, разлагая функции $\theta(\tau)$, $\varepsilon_{ij}(\tau)$ в ряды Тейлора по степеням $(t-\tau)$, сохраняя в полученных разложениях два слагаемых, что допустимо для $\beta t >> 1$.

В результате получим аппроксимации:

$$A_1 \approx \lambda_1\theta,\ \ B_{ij} \approx 2\mu_1\varepsilon_{ij}, \qquad (8)$$

где введены операторы

$$\lambda_1 = K[(1-\frac{\alpha}{\beta}) + \frac{\alpha}{\beta^2}\frac{\partial}{\partial t}], \qquad \mu_1 = \mu[(1-\frac{\alpha}{\beta}) + \frac{\alpha}{\beta^2}\frac{\partial}{\partial t}],$$

действующие на функцию $\varphi(t)$ по правилу

$$\lambda_1\varphi = K[(1-\frac{\alpha}{\beta})\varphi + \frac{\alpha}{\beta^2}\frac{\partial}{\partial t}\varphi],\ \mu_1\varphi = \mu[(1-\frac{\alpha}{\beta})\varphi + \frac{\alpha}{\beta^2}\frac{\partial}{\partial t}\varphi].$$

Обозначим через А амплитуду колебаний, а через l - длину волны и рассмотрим длинные волны малой амплитуды, вводя таким образом малый параметр $\varepsilon = \dfrac{A}{l}$. Заменим в системе (5) A_1 и B_{ij} их приближениями (8) и исследуем полученные уравнения асимптотическим методом. Для этого перейдем в полученных уравнениях к безразмерным переменным

$$u = Au^*, \quad v = A v^*, \quad w = hw^*$$

$$\xi = \frac{x}{l} - \frac{c}{l}t, \quad \eta = \sqrt{\varepsilon}\frac{y}{l}, \quad \chi = \varepsilon\frac{x}{l}. \tag{9}$$

Представим неизвестные функции асимптотическими разложениями, опуская звездочки при соответствующих безразмерных переменных:

$$u = u_0 + \varepsilon u_1 + \ldots$$
$$v = \sqrt{\varepsilon}(v_1 + v_2 + \ldots) \tag{10}$$
$$w = w_0\varepsilon + w_1\varepsilon^2 + \ldots$$

Допустим, что величины $\varepsilon = \frac{A}{l}, \quad \frac{\alpha c}{\beta^2 l}, \quad \frac{h^2}{l^2}$ - одного порядка малости и подставим разложения (10) в безразмерные уравнения пластины. Учитывая введенные отношения порядков, для первых членов разложения получим систему уравнений:

$$\rho c^2 u_{0\xi\xi} = (\lambda_2 + 2\mu_2)u_{0\xi\xi} + \lambda_2 k w_{0\xi}, \tag{11}$$

$$\lambda_2 k u_{0\xi\xi} + (\lambda_2 + 2\mu_2)k^2 w_0 = 0. \tag{12}$$

Из уравнения (12) следует, что

$$w_0 = -\frac{\lambda_2}{k(\lambda_2 + 2\mu_2)}u_{0\xi} \tag{13}$$

где $\lambda_2 = \lambda + \frac{2\alpha\mu}{3\beta}, \quad \mu_2 = \mu(1 - \frac{\alpha}{\beta})$.

Из уравнения (4.11) в силу формулы (4.13) определим скорость волны

$$c = \sqrt{\frac{1}{\rho}(\lambda_2 + 2\mu_2 - \frac{\lambda_2^2}{\lambda_2 + 2\mu_2})} \tag{14}$$

Для вторых членов разложений (10)получим систему трех уравнений

$$2(\lambda_2 + 2\mu_2)u_{0\xi\chi} + (\lambda_2 + \mu_2)v_{1xh} + \mu_2 u_{0\eta\eta} + \lambda_2 k w_{0\chi} + 3(\lambda_2 +$$

$$+ 2\mu_2)u_{0\xi}u_{0\xi\xi} + \lambda_2 w_0 w_{0\xi} + \lambda_2 k(u_{0\xi}w_0)_\xi + \frac{2\mu\alpha c}{3\beta^2 l\varepsilon}(2u_{0\xi\xi\xi} - kw_{0\xi\xi}) +$$

$$+ \lambda_2 k w_{1\xi} - \rho c^2 u_{1\xi\xi} + (\lambda_2 + 2\mu_2)u_{1\xi\xi} = 0, \tag{15}$$

$$rc^2 v_{1\xi\xi} = (\lambda_2 + \mu_2) u_{0\xi\eta} + \mu_2 v_{1xx} + \lambda_2 k w_{0\eta}, \qquad (16)$$

$$\frac{1}{3}\frac{\rho c^2 h^2}{l^2 \varepsilon} w_{0\xi\xi} = -\lambda_2 k(u_{0\chi} + v_{1h}) + \frac{1}{3}\frac{\mu_2 h^2}{l^2 \varepsilon} w_{0\xi\xi} - \frac{3}{2}(\lambda_2 + 2\mu_2) k w_0^2 -$$

$$-\frac{1}{2}\lambda_2 (k u_{0\xi}^2 + 2 w_0 u_{0\xi}) - \lambda_2 k(u_{1\xi} + k w_1) - 2\mu_2 k^2 w_1^2 +$$

$$+\frac{2\mu\alpha c}{3\beta^2 l\varepsilon}(k u_{0\xi\xi} - 2k^2 w_{0\xi}) \qquad (17)$$

После интегрирования уравнения (16) по переменной ξ и применения формулы (13), приходим к равенству $v_{1\xi} = u_{0\eta}$.В силу последнего равенства и формулы (13) уравнение (17) после его дифференцирования по ξ приведем к виду:

$$\lambda k u_{1\xi\xi} + k^2(\lambda_2 + 2\mu_2) w_{1\xi} = \frac{1}{3}\frac{\lambda_2 h^2(\rho c^2 - \mu_2)}{l^2 \varepsilon k(\lambda_2 + 2\mu_2)} u_{0\xi\xi\xi\xi} -$$

$$-\lambda_2 k u_{0\xi\chi} - \lambda_2 k u_{0\eta\eta} - [\lambda_2 k + \frac{\lambda_2^2}{k(\lambda_2 + 2\mu_2)}] u_{0\xi} u_{0\xi\xi} +$$

$$+\frac{2\mu\alpha c k}{3\beta^2 l\varepsilon}(1 + \frac{2\lambda_2}{\lambda_2 + 2\mu_2}) u_{0\xi\xi\xi} \qquad (18)$$

Учитывая формулу (14), легко установить, что последние три слагаемых в уравнении (15) равны левой части уравнения (18), умноженной на величину $\frac{\lambda_2}{k(\lambda_2 + 2\mu_2)}$.

Приравнивая соответствующие слагаемые, получаем

$$\frac{\lambda_2}{k(\lambda_2 + 2\mu_2)}[\frac{1}{3}\frac{\lambda_2 h^2(\rho c^2 - \mu_2)}{\varepsilon l^2 k(\lambda_2 + 2\mu_2)} u_{0\xi\xi\xi\xi} - \lambda_2 k u_{0\xi\chi} - \lambda_2 k u_{0\eta\eta} -$$

$$d = \frac{\mu\alpha c(3\lambda_2^2 + 6\lambda_2\mu_2 + 4\mu_2^2)}{6\beta^2 l\varepsilon\mu_2(\lambda_2 + 2\mu_2)(\lambda_2 + \mu_2)}$$

$$+2(\lambda_2 + 2\mu_2) u_{0\xi\chi} + (\lambda_2 + \mu_2) v_{1xh} + \mu_2 u_{0\eta\eta} + \lambda_2 k w_{0\chi} + \qquad (19)$$

$$+3(\lambda_2 + 2\mu_2) u_{0\xi} u_{0\xi\xi} + \lambda_2 w_0 w_{0\xi} + \lambda_2 k \frac{\partial}{\partial\xi}(u_{0\xi} w_0) +$$

$$+\frac{2\mu\alpha c}{3\beta^2 l\varepsilon}(2u_{0\xi\xi\xi}-kw_{0\xi\xi})=0$$

Выполняя тождественные преобразования в уравнении (19) и вводя обозначение $u_{0\xi}=\psi$, приходим к уравнению Кадомцева – Петвиашвили – Бюргерса

$$(\psi_\chi+\frac{3}{2}\psi\psi_\xi+b\psi_{\xi\xi\xi}+d\psi_{\xi\xi})_\xi=-\frac{1}{2}\psi_{\eta\eta}, \qquad (20)$$

где введены обозначения

$$b=\frac{\lambda_2^2 h^2(3\lambda_2+2\mu_2)}{24k^2 l^2\varepsilon(\lambda_2+2\mu_2)^2(\lambda_2+\mu_2)},$$

$$d=\frac{\mu\alpha c(3\lambda_2^2+6\lambda_2\mu_2+4\mu_2^2)}{6\beta^2 l\varepsilon\mu_2(\lambda_2+2\mu_2)(\lambda_2+\mu_2)}.$$

Перейдем к рассмотрению физически нелинейной вязкоупругой пластины. Как и в линейном случае, рассмотрим неограниченную пластину толщиной $2h$, свободную от внешних воздействий, а перемещения точек пластины аппроксимируем функциями

$$u_1=u(x,y,t);\quad u_2=v(x,y,t);\quad u_3=z\cdot w(x,y,t) \qquad (21)$$

Используя (21) и тензор деформаций Лагранжа

$$\varepsilon_{ij}=\frac{1}{2}(u_{i,j}+u_{j,i}+u_{k,i}\cdot u_{k,j}), \qquad (22)$$

вычислим компоненты тензора конечных деформаций.

Реологические свойства пластины зададим уравнениями квадратичной теории вязкоупругости, содержащими экспоненциальное ядро [2].

$$\sigma_{ij}(t)=\lambda\theta(t)\delta_{ij}+2\mu\varepsilon_{ij}(t)-\alpha\int_{-\infty}^{t}e^{-\beta(t-\tau)}[\lambda\theta(\tau)\delta_{ij}+2\mu\varepsilon_{ij}(\tau)+2\mu\gamma\varepsilon_u^2(\tau)e_{ij}]d\tau, \qquad (23)$$

где $\sigma_{ij}, \varepsilon_{ij}$ - соответственно компоненты тензоров напряжений и деформаций, $\theta = \varepsilon_{ii}$ - объемное расширение, $e_{ij} = \varepsilon_{ij} - \frac{1}{3}\theta\delta_{ij}$ - компоненты девиатора деформаций, δ_{ij} - символы Кронекера, α, β, γ - реологические параметры, λ, μ - упругие постоянные Ламе, $\varepsilon^2 = \frac{2}{3} e_{ij} e_{ij}$ - квадрат интенсивности деформаций.

В результате вычисления компонент деформаций (22) на основе функций (21), вариаций $\delta\varepsilon_{ij}, \delta u_i$, затем компонент тензора напряжений σ_{ij} из закона состояния (23) и подстановки найденных величин в уравнение (4), из последнего в силу произвольности вариаций δu_i после интегрирования по переменной *z* получаем интегро-дифференциальные уравнения движения пластины:

$$2h\rho \ddot{u} = \int_{-h}^{h} \{ \frac{\partial}{\partial x}[(1+u_x)(A_1 + B_{11}) + B_{12} u_y] + \frac{\partial}{\partial y}[u_y (A_1 + B_{22}) + B_{12}(1+u_x)]\} dz$$

$$2h\rho \ddot{v} = \int_{-h}^{h} \{ \frac{\partial}{\partial x}[v_x (A_1 + B_{11}) + B_{12}(1+v_y)] + \frac{\partial}{\partial y}[(1+v_y)(A_1 + B_{22}) + B_{12} v_x]\} dz$$

$$\frac{2h^3}{3}\rho \ddot{w} = \int_{-h}^{h} \{ -(k+w)(A_1 + B_{33}) - z(B_{13} w_x + B_{23} w_y) + \frac{\partial}{\partial x}[z^2 w_x (A_1 + B_{11}) + B_{12} z^2 w_y + B_{13} z(1+w)] + \frac{\partial}{\partial y}[z^2 w_y (A_1 + B_{22}) + B_{12} z^2 w_x + B_{23} z(1+w)]\} dz, \qquad (24)$$

где введены следующие обозначения:

$$A_1 = \lambda\theta + \frac{2}{3}\mu\alpha \int_{-\infty}^{t} e^{-\beta(t-\tau)} (1+\gamma\varepsilon^2)\theta(\tau) d\tau \qquad (25)$$

$$B_{ij} = 2\mu(\varepsilon_{ij} - \alpha \int_{-\infty}^{t} e^{-\beta(t-\tau)} (1+\gamma\varepsilon^2) \varepsilon_{ij} d\tau), \qquad (26)$$

а $k = \frac{\pi}{12}$ - поправочный коэффициент.

Упростим дальнейшее исследование системы (24), заменяя интегральные операторы в формулах (25) и (26) дифференциальными путем разложения функций $(1+ge^2)q(t)$, $(1+ge^2)e_{ij}(t)$, в ряды Тейлора по степеням $(t-\tau)$, сохраняя в полученных разложениях два слагаемых, что возможно для $\beta t >> 1$.

В результате получим приближения

$$A_1 \approx \lambda_1\theta, \quad B_{ij} \approx 2\mu_1\varepsilon_{ij}, \tag{27}$$

где введены операторы

$$\lambda_1 = \lambda + \frac{2\mu\alpha}{3\beta}(1 - \frac{1}{\beta}\frac{\partial}{\partial t}), \qquad \mu_1 = \mu + \frac{\mu\alpha}{\beta}(\frac{1}{\beta}\frac{\partial}{\partial t} - 1),$$

действующие на функцию $\varphi(t)$ по правилу

$$\lambda_1\varphi = \lambda\varphi + \frac{2\mu\alpha}{3\beta}(\varphi - \frac{1}{\beta}\frac{\partial\varphi}{\partial t}),$$

$$\mu_1\varphi = \mu\varphi + \frac{\mu\alpha}{\beta}(\frac{1}{\beta}\frac{\partial\varphi}{\partial t} - \varphi).$$

Для исследования уравнений движения (24) применим асимптотический метод. Обозначим через A амплитуду колебаний, а через l - длину волны и рассмотрим длинные волны малой амплитуды, вводя таким образом малый параметр $\varepsilon = \frac{A}{l}$. Заменим в системе (24) A_1 и B_{ij} их приближениями (27) и перейдем в полученных уравнениях к безразмерным переменным

$$u = Au^*, \quad v = Av^*, \quad w = hw^*$$

$$\xi = \frac{x}{l} - \frac{c}{l}t, \quad \eta = \sqrt{\varepsilon}\frac{y}{l}, \quad \chi = \varepsilon\frac{x}{l}. \tag{28}$$

Представим искомые функции в виде следующих асимптотических разложений, опуская звездочки при соответствующих безразмерных переменных:

$$u = u_0 + \varepsilon u_1 + \ldots$$

$$v = \sqrt{\varepsilon}\,(v_1 + v_2 + \ldots) \tag{29}$$

$$w = \varepsilon w_0 + \varepsilon^2 w_1 + \ldots$$

Допустим, что величины $\varepsilon = \frac{A}{l}$, $\frac{\alpha c}{\beta^2 l}$, $\frac{h^2}{l^2}$ - одного порядка малости, а реологическая постоянная γ - порядка $\frac{1}{\varepsilon}$.

Подставляя разложение (29) в безразмерные уравнения пластины и учитывая введенные отношения порядков, для первых членов разложения получаем

$$\rho c^2 u_{0\xi\xi} = (\lambda_2 + 2\mu_2) u_{0\xi\xi} + \lambda_2 k w_{0\xi}, \tag{30}$$

$$\lambda_2 k u_{0\xi\xi} + (\lambda_2 + 2\mu_2) k^2 w_0 = 0, \tag{31}$$

Из уравнения (31) следует, что

$$w_0 = -\frac{\lambda_2}{k(\lambda_2 + 2\mu_2)} u_{0\xi} \tag{32}$$

где $\lambda_2 = \lambda + \frac{2\alpha\mu}{3\beta}$, $\quad \mu_2 = \mu(1 - \frac{\alpha}{\beta})$.

Из уравнения (30) в силу равенства (32) определяем скорость

$$c = \sqrt{\frac{1}{\rho}(\lambda_2 + 2\mu_2 - \frac{\lambda_2^2}{\lambda_2 + 2\mu_2})} \tag{33}$$

Для следующих членов разложений (29) получим систему трех уравнений

$$2(\lambda_2 + 2\mu_2) u_{0\xi\chi} + (\lambda_2 + \mu_2)\, v_{1\xi\eta} + \mu_2 u_{0\eta\eta} + \lambda_2 k w_{0\chi} + 3(\lambda_2 +$$

$$+ 2\mu_2) u_{0\xi} u_{0\xi\xi} + \lambda_2 w_0 w_{0\xi} + \lambda_2 k (u_{0\xi} w_0)_\xi + \frac{2\mu\ \alpha c}{3\beta^2 l\varepsilon}(2u_{0\xi\xi\xi} - k w_{0\xi\xi}) -$$

$$-\frac{16}{9}\mu\gamma\frac{\varepsilon\alpha}{\beta} u_{0\xi}^2 u_{0\xi\xi} + \lambda_2 k w_{1\xi} - \rho c^2 u_{1\xi\xi} + (\lambda_2 + 2\mu_2) u_{1\xi\xi} = 0 \tag{34}$$

$$\rho c^2 v_{1xx} = (l_2 + m_2) u_{0xh} + m_2 v_{1xx} + \lambda_2 k w_{0\eta} \tag{35}$$

$$\frac{1}{3}\frac{\rho c^2 h^2}{l^2\varepsilon} w_{0\xi\xi} = -\lambda_2 k (u_{0\chi} + v_{1\eta}) + \frac{1}{3}\frac{\mu_2 h^2}{l^2\varepsilon} w_{0\xi\xi} - \frac{3}{2}(\lambda_2 + 2\mu_2) k w_0^2 -$$

$$-\frac{1}{2}\lambda_2(ku_{0\xi}^2+2w_0u_{0\xi})-\lambda_2k(u_{1\xi}+kw_1)-2\mu_2k^2w_1^2+$$

$$+\frac{2\mu\alpha c}{3\beta^2 l\varepsilon}(ku_{0\xi\xi}-2k^2w_{0\xi}) \qquad (36)$$

После интегрирования уравнения (35) по переменной ξ и применения формулы (32), приходим к равенству $v_{1\xi}= u_{0\xi}$.В силу этого равенства и формулы (32) уравнение (36) после его дифференцирования по ξ приведем к виду

$$\lambda_2ku_{1\xi\xi}+k^2(\lambda_2+2\mu_2)w_{1\xi}=\frac{1}{3}\frac{\lambda_2h^2(\rho c^2-\mu_2)}{l^2\varepsilon k(\lambda_2+2\mu_2)}u_{0\xi\xi\xi\xi}-$$

$$-\lambda_2ku_{0\xi\chi}-\lambda_2ku_{0\eta\eta}-[\lambda_2k+\frac{\lambda_2^2}{k(\lambda_2+2\mu_2)}]u_{0\xi}u_{0\xi\xi}+ \qquad (37)$$

$$+\frac{2\mu\alpha ck}{3\beta^2 l\varepsilon}(1+\frac{2\lambda_2}{\lambda_2+2\mu_2})u_{0\xi\xi\xi}$$

Учитывая формулу (33), легко видеть, что последние три слагаемых в уравнении (35) равны левой части уравнения (37), умноженной на величину $\frac{\lambda_2}{k(\lambda_2+2\mu_2)}$.

Приравнивая соответствующие слагаемые, получаем

$$\frac{\lambda_2}{k(\lambda_2+2\mu_2)}[\frac{1}{3}\frac{\lambda_2h^2(\rho c^2-\mu_2)}{\varepsilon l^2k(\lambda_2+2\mu_2)}u_{0\xi\xi\xi\xi}-\lambda_2ku_{0\xi\chi}-\lambda_2ku_{0\eta\eta}-$$

$$-(\lambda_2k+\frac{\lambda_2^2}{k(\lambda_2+2\mu_2)})u_{0\xi}u_{0\xi\xi}+\frac{2\mu\alpha ck}{3\beta^2 l\varepsilon}(1+\frac{2\lambda_2}{\lambda_2+2\mu_2})u_{0\xi\xi\xi}]+$$

$$+2(\lambda_2+2\mu_2)u_{0\xi\chi}+(\lambda_2+\mu_2)v_{1xh}+\mu_2u_{0\eta\eta}+\lambda_2kw_{0\chi}+ \qquad (38)$$

$$+3(\lambda_2+2\mu_2)u_{0\xi}u_{0\xi\xi}+\lambda_2w_0w_{0\xi}+\lambda_2k\frac{\partial}{\partial\xi}(u_{0\xi}w_0)+$$

$$+\frac{2\mu\alpha c}{3\beta^2 l\varepsilon}(2u_{0\xi\xi\xi}-kw_{0\xi\xi})-\frac{16}{9}\mu\gamma\frac{\varepsilon\alpha}{\beta}u_{0\xi}^2u_{0\xi\xi}=0$$

Выполняя преобразования в уравнении (38) и вводя обозначение $u_{0\xi} = \psi$, приходим к модифицированному уравнению Кадомцева – Петвиашвили – Бюргерса

$$(\psi_\chi + \frac{3}{2}\psi\psi_\xi + b\psi_{\xi\xi\xi} + d\psi_{\xi\xi} - m\psi^2\psi_\xi)_\xi = -\frac{1}{2}\psi_{\eta\eta}, \quad (39)$$

где введены обозначения

$$b = \frac{\lambda_2^2 h^2 (3\lambda_2 + 2\mu_2)}{24k^2 l^2 \varepsilon(\lambda_2 + 2\mu_2)^2 (\lambda_2 + \mu_2)},$$

$$d = \frac{\mu\alpha c(3\lambda_2^2 + 6\lambda_2\mu_2 + 4\mu_2^2)}{6\beta^2 l\varepsilon\mu_2(\lambda_2 + 2\mu_2)(\lambda_2 + \mu_2)},$$

$$m = -\frac{16}{9}\mu\gamma\frac{\varepsilon\alpha}{\beta}.$$

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1.Аршинов Г.А., Могилевич Л.И. Статические и динамические задачи вязкоупругости. Саратов: Изд-во СГАУ, 2002. 152 с.

2. Москвитин В.В. Сопротивление вязкоупругих материалов. М., 1972.